К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ВЕРСИИ

ЕГЭ 2020

Т. М. Ерина

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО

100 БАЛЛОВ

эффективный тренинг

- Текстовые задачи
- Логарифмические, показательные уравнения и неравенства
- Иррациональные уравнения и неравенства
- Тригонометрические уравнения и неравенства
- Способы решения задач с параметром и модулями
- Метод замены множителей
- Комбинаторика. Теория вероятностей

Издательство ЭКЗАМЕН®

Т. М. Ерина

ЕГЭ 100 БАЛЛОВ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО

Текстовые задачи
Логарифмические, показательные уравнения и неравенства
Иррациональные уравнения и неравенства
Тригонометрические уравнения и неравенства
Способы решения задач с параметром и модулями
Метод замены множителей
Комбинаторика. Теория вероятностей

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2020

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е71

Ерина Т. М.

Е71 ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство / Т. М. Ерина. — Издательство «Экзамен», 2020. — 350, [2] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»)

ISBN 978-5-377-14998-9

Предлагаемое пособие адресовано в первую очередь тем, кто хочет успешно подготовиться к Единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике профильного уровня и получить максимальный балл. Поскольку ЕГЭ — не только выпускной школьный экзамен, но и вузовский вступительный экзамен, который предусматривает проверку знаний по всему школьному курсу, в пособие включены задачи и краткие справочные материалы по важнейшим темам школьного курса математики. Особое внимание уделяется решению задач, в том числе решению задач повышенной сложности.

Пособие включает 9 параграфов. Каждый параграф начинается с перечисления некоторых теоретических сведений с комментариями, позволяющими вспомнить соответствующий материал. Затем приводятся примеры решения задач различного уровня сложности и упражнения, позволяющие лучше понять и запомнить рассмотренные способы решения задач. Заканчивается каждый параграф набором задач для самостоятельного решения.

Пособие адресовано учащимся старших классов, оно также может быть использовано учителями математики общеобразовательных организаций, классов, в которых математика является профильным предметом, классов с углубленным изучением математики для подготовки учащихся к экзаменам и проведения различных форм проверки знаний.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60х90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 10. Усл. печ. л. 22,0.
Тираж 6 000 экз. Заказ № 4632.

ISBN 978-5-377-14998-9

СОДЕРЖАНИЕ

§1. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Текстовые задачи являются традиционным разделом экзамена по математике. Входят они и в структуру контрольных измерительных материалов по математике ЕГЭ и ОГЭ. Решение таких задач позволяет проверить развитость логического мышления абитуриента, его сообразительность и наблюдательность, умение проводить исследования.

Решение текстовых задач обычно осуществляется в несколько этапов:

1) введение неизвестной величины;
2) составление с помощью введенных неизвестных и известных из условия задачи величин уравнений (или одного уравнения), неравенств;
3) решение полученных уравнений (неравенств);
4) отбор решений по смыслу задачи.

Умение решать ту или иную задачу зависит от многих факторов. Однако прежде всего необходимо научиться различать основные типы задач и уметь решать простейшие из них. В связи с этим целесообразно рассмотреть типовые задачи и их решения.

Разбиение задач на типы условно. Мы будем придерживаться общепринятого разбиения:

1) задачи на движение;
2) задачи на совместную работу;
3) задачи на проценты;
4) задачи на смеси и сплавы;
5) задачи на прогрессию;
6) задачи на числовые зависимости;
7) задачи на составление неравенств;
8) задачи на оптимальное решение, т.е. на нахождение экстремума функции;
9) другие виды задач.

Задачи на движение

Задачи на движение — классический тип текстовых задач. Разнообразные объекты движутся в одном или разных направлениях, в условии перечислен ряд данных, по которым требуется найти некоторую величину, например скорость, расстояние, время, за которое это расстояние пройдено... Зачастую знания одной формулы $S = vt$ оказывается недостаточно, необходимо провести самостоятельное исследование задачи.

Немного теории

При решении задач на движение принимают следующие допущения.

1. Если нет специальных оговорок, то движение считают равномерным.
2. Скорость считается величиной положительной.
3. Любой переход с одного режима движения на новый считается происходящим мгновенно.
4. Если тело с собственной скоростью x км/ч движется по реке, скорость которой равна y км/ч, то скорость движения тела по течению считают равной $(x + y)$ км/ч, против течения — равной $(x - y)$ км/ч. Если в задачах говорится о движении плота, то полагают, что он движется со скоростью течения.
5. Если два тела одновременно начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, а начальное расстояние между ними равно S, то время, через которое они встретятся, равно $\frac{S}{v_1 + v_2}$.
6. Если одно тело догоняет другое, то время, через которое первое тело догонит второе, равно $\frac{S}{v_1 - v_2}$, где v_1 и v_2 — скорости тел, $v_1 > v_2$, S — начальное расстояние между телами.
7. Основными параметрами задач на движение являются: а) пройденный путь (S); б) скорость (v); в) время (t).

Зависимость между указанными величинами выражается известными формулами:

$$S = vt,\ v = \frac{S}{t},\ t = \frac{S}{v}. \qquad (1)$$

При вычислениях особое внимание следует уделить переводу величин в одну систему единиц. Например, если путь задан в километрах, а время в часах, то скорость должна быть приведена в километрах в час (а не в метрах в час, в километрах в секунду и т.п.).

Задачи на движение по прямой

Начнем с задач, в которых объекты (пешеходы, автомобили, поезда и т.п.) движутся по прямой. Сюда же включим и те задачи, в которых траектория движения значения не имеет, важно лишь направление движения по дороге — друг за другом или в разные стороны. К таким задачам относится пример 1.

Пример 1. Из пункта A вышел товарный поезд. Спустя 3 ч вслед за ним в том же направлении вышел пассажирский поезд, скорость которого на 30 км/ч больше скорости товарного. Через 15 ч после своего выхода пассажирский поезд оказался впереди товарного на 300 км. Определить скорость товарного поезда.

Решение. Пусть скорость товарного поезда x км/ч, тогда скорость пассажирского поезда $(x + 30)$ км/ч.

В условии задачи сказано, что товарный поезд был в пути 18 ч, поэтому он проделал путь $18x$ км. Пассажирский поезд за 15 ч прошел $15(x + 30)$ км.

Так как пассажирский поезд оказался впереди товарного на 300 км, то мы получим следующее уравнение: $15(x + 30) - 18x = 300$.

Решим его: $3x = 150$; $x = 50$.

По смыслу задачи скорость должна быть числом положительным. Найденное значение удовлетворяет этому условию.

Ответ: 50 км/ч.

Примечание. Решение задачи может быть оформлено иначе — в виде таблицы.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
Товарный поезд	x	18	$18x$
Пассажирский поезд	$x + 30$	15	$15(x + 30)$

Так как пассажирский поезд проехал на 300 км больше товарного, то составим уравнение: $15(x + 30) - 18x = 300$.

Полученное уравнение имеет решение $x = 50$.

Ответ: 50 км/ч.

Пример 2. Три тела движутся по прямой линии от точки A к точке B. Второе тело начало двигаться на 5 с, а третье на 8 с позже первого. Скорость первого тела меньше скорости второго на 6 м/с. Скорость третьего тела равна 30 м/с. Найдите расстояние AB и скорость первого тела, если известно, что все три тела достигают точки B в один и тот же момент.

Решение. Пусть расстояние AB равно s м, скорость второго тела x м/с. Тогда скорость первого тела $(x-6)$ м/с, а скорость третьего тела 30 м/с.

Следовательно, $\frac{s}{x-6}$ с, $\frac{s}{x}$ с, $\frac{s}{30}$ с — время, затраченное соответственно первым, вторым, третьим телом на прохождение всего расстояния.

Так как первое тело затратило на путь на 5 с больше, чем второе, а третье — на 8 с меньше, чем первое, то мы можем составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{x-6}-\dfrac{s}{x}=5, \\ \dfrac{s}{x-6}-\dfrac{s}{30}=8. \end{cases}$$

Решим ее: $\begin{cases} \dfrac{6s}{x(x-6)}=5, \\ \dfrac{s(36-x)}{30(x-6)}=8. \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$\dfrac{180}{x(36-x)}=\dfrac{5}{8};\ x^2-36x+288=0.$

Из этого уравнения находим $x=12$ или $x=24$.

Проверим, удовлетворяют ли полученные значения x условию задачи.

Из условия задачи следует, что $6<x<30$. Первое неравенство вытекает из того, что скорость второго тела на 6 м/с больше первого, но при значениях x, меньших 6, получим отрицательную скорость, чего быть не может.

В то же время скорость второго тела должна быть меньше 30 м/с, так как третье тело (со скоростью 30 м/с) начало движение на 3 с позже второго, а достигли они точки B одновременно.

Неравенству $6 < x < 30$ удовлетворяют оба значения: $x = 12$ и $x = 24$.

Если $x = 12$, то $x - 6 = 6$ и $s = 60$.

Если $x = 24$, то $x - 6 = 18$ и $s = 360$.

Ответ: 1) 6 м/с и 60 м; 2) 18 м/с и 360 м.

Примечание. Решение этой задачи можно также оформить в таблице:

	v (м/с)	t (с)	s (м)
I тело	$x - 6$	$\frac{S}{x-6}$	s
II тело	x	$\frac{S}{x}$	s
III тело	30	$\frac{S}{30}$	s

В дальнейшем мы будем записывать все решения именно так — в форме таблице.

Кстати, у читателя может возникнуть вопрос: зачем проверять полученные значения на соответствие условию задачи, ведь уравнение мы составляем исходя из данных условия. На вопрос можно ответить только утвердительно: да, конечно.

Однако при составлении уравнения (или системы уравнений) мы можем не учесть *все* данные. И полученные значения переменной могут им не удовлетворять, как это происходит в следующей задаче. Так что проверка в конце решения никогда не бывает лишней.

Пример 3. Из пункта A в пункт B одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

Решение. Пусть скорость первого пешехода x км/ч, скорость второго пешехода y км/ч, весь путь равен z км. Заполним две таблицы, охарактеризовав движение пешеходов.

Таблица 1

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
I пешеход	x	$\frac{z}{2x}$	$\frac{z}{2}$
II пешеход	y	$\frac{z-24}{y}$	$z - 24$

Таблица 2

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
I пешеход	x	$\frac{z-15}{x}$	$z-15$
II пешеход	y	$\frac{z}{2y}$	$\frac{z}{2}$

По условию задачи в первом и во втором случаях время одно и то же, поэтому:

$$\begin{cases} \frac{z}{2x} = \frac{z-24}{y}, \\ \frac{z-15}{x} = \frac{z}{2y}. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$\frac{z}{2(z-15)} = \frac{2(z-24)}{z}$, откуда $z^2 - 52z + 480 = 0$ и $z = 40$ или $z = 12$.

Второе значение не удовлетворяет условию, из которого следует, что расстояние между A и B больше 24 км.

Итак, расстояние между пунктами равно 40 км.

Ответ: 40 км.

Пример 4. Два поезда, выйдя одновременно из разных городов, встретились через 20 часов. За какое время каждый из поездов проходит расстояние между этими городами, если одному из них требуется для этого на 9 часов больше, чем другому?

Решение. Пусть скорость первого поезда x км/ч, скорость второго поезда y км/ч, весь путь равен z км. Составим две таблицы.

Первая таблица характеризует движение поездов до места встречи.

Таблица 1

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
I поезд	x	20	$20x$
II поезд	y	20	$20y$

По условию задачи $20x + 20y = z$.

Будем считать, что скорость первого поезда больше скорости второго ($x > y$). Заполним вторую таблицу, характеризующую прохождение расстояния между городами каждым поездом.

Таблица 2

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
I поезд	x	$\frac{z}{x}$	z
II поезд	y	$\frac{z}{y}$	z

Составим второе уравнение на основании того, что второму поезду потребуется на 9 часов больше времени, чем первому: $\frac{z}{y} - \frac{z}{x} = 9.$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 20x + 20y = z, \\ \frac{z}{y} - \frac{z}{x} = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x + 20y = z, \\ \frac{20x + 20y}{y} - \frac{20x + 20y}{x} = 9. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуем к виду $20\frac{x}{y} - 20\frac{y}{x} = 9.$

Обозначив $\frac{x}{y} = t$, получим: $20t - \frac{20}{t} = 9,$

$20t^2 - 9t - 20 = 0,$

откуда $t = \frac{5}{4}$ или $t = -\frac{4}{5}$. Второй корень отрицательный, то есть не удовлетворяет по смыслу.

Из первого уравнения системы следует, что

$$\frac{z}{x} = 20 + \frac{20y}{x} = 36 \text{ (ч)}; \quad \frac{z}{y} = 20 + \frac{20x}{y} = 45 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 36 ч и 45 ч.

Следующий пример хорошо иллюстрирует важность правильного выбора обозначений величин задачи.

Пример 5. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть назад и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через 5 секунд — второй, еще через 5 секунд — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, они оказались на одном расстоянии от места старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки и первого в 7 м от конца дорожки. Найдите скорость третьего пловца.

Р е ш е н и е. На рисунке 1 точкой B обозначено место встречи *всех* пловцов (в задаче сказано, что в некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, они оказались на одном расстоянии от места старта); в точке D встречаются третий и второй пловцы; в точке C встречаются третий и первый.

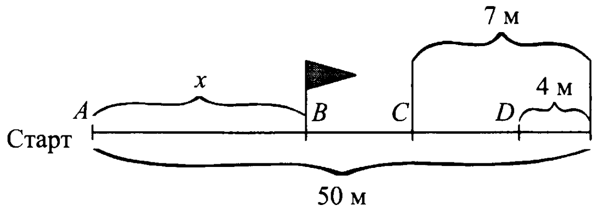


Рис. 1

Итак, в задаче требуется найти скорость одного из пловцов, поэтому может показаться, что будет удобно в качестве неизвестной рассматривать скорость третьего пловца. Поскольку в задаче нет явного указания на связи между скоростями трех пловцов, то, скорее всего, возникнет желание обозначить их скорости, например, x м/с, y м/с, z м/с, то есть ввести три переменные.

Далее можно перейти к составлению уравнений. Время, за которое третий пловец проплыл 54 м (проплыл 50 м, повернул и проплыл еще 4 м), на 5 с меньше времени, за которое второй проплыл 46 м. Поэтому:

$$\frac{54}{z}+5=\frac{46}{y}.$$

Аналогично составим уравнение относительно скоростей третьего и первого пловцов:

$$\frac{57}{z}+10=\frac{43}{x}.$$

И последнее, из того, что в какой-то момент времени (причем до первого касания бортика) пловцы встретились, можно сделать простой вывод: первый пловец затратил на преодоление некоторого расстояния на 5 с больше второго, а второй — на 5 с больше третьего.

Поскольку расстояния мы не знаем, то получаем еще одну переменную (например, s) и два уравнения:

$$\frac{s}{x}=\frac{s}{y}+5, \qquad \frac{s}{y}=\frac{s}{z}+5.$$

Итак, получили четыре уравнения с четырьмя переменными. Решив их, мы, безусловно, получим ответ, однако не самым легким путем.

Попробуем ввести другие обозначения, а именно обозначим буквой x м расстояние, пройденное каждым пловцом до места их первой встречи, а буквой y с — время, которое прошло до нее с момента старта первого пловца.

Составим таблицу, из которой будет видно, какие неизвестные величины мы приняли за x и y, какое время плыли пловцы до места первой встречи и какова скорость каждого пловца.

Первая таблица характеризует движение пловцов от старта до места первой встречи.

Таблица 1

	v (м/с)	t (с)	s (м)
I	$\frac{x}{y}$	y	x
II	$\frac{x}{y-5}$	$y-5$	x
III	$\frac{x}{y-10}$	$y-10$	x

Заполним вторую таблицу, описывающую движение третьего и второго пловцов от старта до места их второй встречи в точке D.

Таблица 2

	v (м/с)	t (с)	s (м)
II	$\frac{x}{y-5}$	$\frac{46(y-5)}{x}$	46
III	$\frac{x}{y-10}$	$\frac{54(y-10)}{x}$	54

Составим уравнение на основании того, что второй пловец стартовал на 5 с раньше третьего пловца: $\frac{54(y-10)}{x}+5=\frac{46(y-5)}{x}$.

Заполним третью таблицу, характеризующую движение третьего и первого пловцов от старта до места их второй встречи в точке C.

Таблица 3

	v (м/с)	t (с)	s (м)
I	$\frac{x}{y}$	$\frac{43y}{x}$	43
III	$\frac{x}{y-10}$	$\frac{57(y-10)}{x}$	57

Составим уравнение на основании того, что первый пловец стартовал на 10 с раньше третьего пловца: $\frac{57(y-10)}{x}+10=\frac{43y}{x}$.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{54(y-10)}{x}+5=\frac{46(y-5)}{x}, \\ \frac{57(y-10)}{x}+10=\frac{43y}{x}, \end{cases}$$

причем $x > 0$, а $y > 10$.

Решив ее, получим $x = 22$, $y = 25$.

Найдем скорость третьего пловца: $v_3=\frac{x}{y-10}=\frac{22}{15}$ (м/с).

Ответ: $1\frac{7}{15}$ (м/с).

В примере 4, в отличие от предыдущего, удобно в качестве переменных рассматривать скорости объектов. Подумайте, почему.

Пример 6. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент времени, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 9 км позади них (рис. 2.1). А в тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист обогнал пешехода на 3 км (рис. 2.2). На сколько километров пешеход отстал от велосипедиста в тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста? (рис. 2.3).

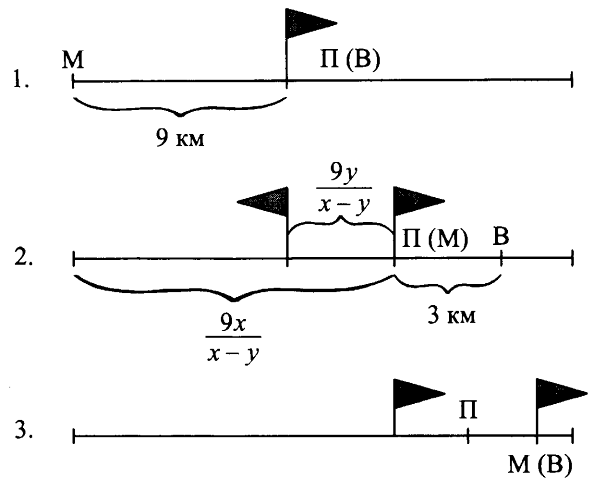


Рис. 2

Р е ш е н и е . На рисунке 2 флажками отмечены встречи пешехода и велосипедиста, пешехода и мотоциклиста, мотоциклиста и велосипедиста.

Итак, рассмотрим первую ситуацию: мотоциклист, догнав пешехода, тем самым ликвидировал свое отставание от него на 9 км в начальный момент движения (рис. 2.1 и 2.2). В этом случае время, за которое мотоциклист догнал пешехода, равно $\frac{9}{v_м - v_п}$.

Заполним первую таблицу.

Таблица 1

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
Мотоциклист	x	$\frac{9}{x-y}$	$\frac{9x}{x-y}$
Пешеход	y	$\frac{9}{x-y}$	$\frac{9y}{x-y}$
Велосипедист	z	$\frac{9}{x-y}$	$\frac{9z}{x-y}$

Рассмотрим вторую ситуацию. На рисунке 2.2 между мотоциклистом и велосипедистом 3 км. Тогда время, за которое мотоциклист догонит велосипедиста, равно $\frac{3}{v_м - v_в}$. За это время и пешеход пройдет некоторое расстояние (табл. 2).

Таблица 2

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
Мотоциклист	x	$\frac{3}{x-z}$	$\frac{3x}{x-z}$
Пешеход	y	$\frac{3}{x-z}$	$\frac{3y}{x-z}$
Велосипедист	z	$\frac{3}{x-z}$	$\frac{3z}{x-z}$

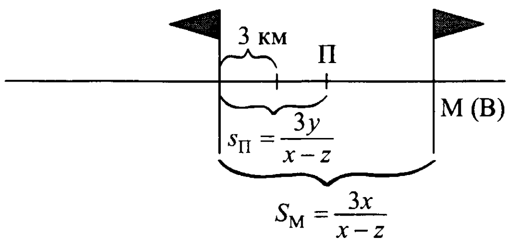


Рис. 3

По рисунку 3 видно, что в задаче требуется найти расстояние между пешеходом и велосипедистом через $\frac{3}{x-z}$ ч, то есть разность

$$\frac{3x}{x-z} - \frac{3y}{x-z}. \qquad (*)$$

К моменту встречи мотоциклиста и велосипедиста мотоциклист проехал на 9 км больше, чем велосипедист.

Взяв данные из двух таблиц, найдем разность всего пути мотоциклиста и всего пути велосипедиста:

$$\left(\frac{9x}{x-y} + \frac{3x}{x-z}\right) - \left(\frac{9z}{x-y} + \frac{3z}{x-z}\right) = 9.$$

Последовательно имеем:

$$\frac{9(x-z)}{x-y} + \frac{3(x-z)}{x-z} = 9; \quad \frac{9(x-z)}{x-y} = 6; \quad x - y = \frac{3}{2}(x-z).$$

Используя это соотношение, найдем значение выражения (*):

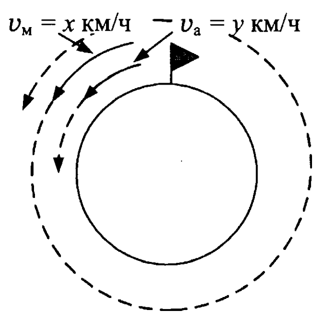
$$\frac{3x}{x-z}-\frac{3y}{x-z}=\frac{3(x-y)}{x-z}=\frac{3\cdot\frac{3}{2}(x-z)}{x-z}=\frac{9}{2}=4{,}5.$$

О т в е т : 4,5 км.

Задачи на движение по окружности

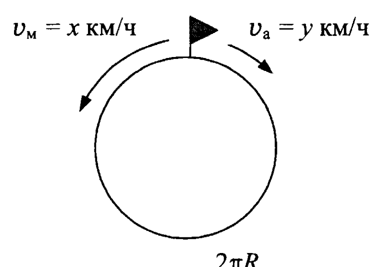
Пример 7. Автобус и мотоциклист выезжают одновременно из поселка, расположенного на кольцевой дороге. Время, которое затрачивает мотоциклист на то, чтобы обогнать автобус при движении в одном направлении, в три раза больше времени, которое нужно для того, чтобы они встретились при движении в разных направлениях. Найдите скорость автобуса, если скорость мотоциклиста равна 80 км/ч.

Р е ш е н и е . Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а y км/ч — скорость автобуса. Изобразим на рисунках 4 и 5 разные виды движения.



$$t_{встречи}=\frac{2\pi R}{x-y},$$

Рис. 4



$$t_{встречи}=\frac{2\pi R}{x+y}.$$

Рис. 5

По условию задачи

$$\frac{2\pi R}{x-y}=3\frac{2\pi R}{x+y},$$

$$\frac{1}{x-y}=\frac{3}{x+y}, \qquad x+y=3x-3y,\ \ 4y=2x,$$

$x=2y$, то есть $v_м=2v_а$.

Так как по условию задачи скорость мотоциклиста равна 80 км/ч, то скорость автобуса — 40 км/ч.

О т в е т : 40 км/ч.

При решении предыдущей задачи пройденное расстояние можно было обозначить любой буквой. Обозначая его как $2\pi R$, мы просто подчеркнули, что движение идет по кругу.

Пример 8. Две точки движутся по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. При движении в разных направлениях они встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждую минуту. Найдите скорость движения каждой точки.

Р е ш е н и е . При движении точек в разных направлениях (рис. 6) они за 15 с обе проходят длину окружности, то есть 1,2 м, так как начинают движение одновременно и встречаются через каждые 15 с.

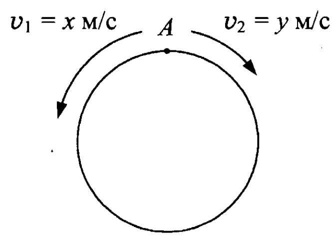


Рис. 6

Таблица 1

	v (м/с)	t (с)	S (м)
I	x	15	$15x$
II	y	15	$15y$

Составим первое уравнение на основании того, что обе точки за 15 с прошли путь 1,2 м, то есть $15x + 15y = 1{,}2$.

При движении точек в одном направлении первая точка догоняет вторую через каждую минуту (то есть для определенности будем считать $x > y$). Это означает, что за 1 минуту первая точка должна пройти полный круг 1,2 м и еще столько, сколько успеет пройти за 1 минуту вторая точка.

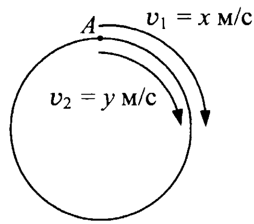


Рис. 7

Таблица 2

	v (м/с)	t (с)	s (м)
I	x	60	$60x$
II	y	60	$60y$

Составим второе уравнение на основании того, что первая точка за указанное время прошла на 1,2 м больше, чем вторая: $60x = 60y + 1{,}2$.

Таким образом, мы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 15x + 15y = 1{,}2, \\ 60x = 60y + 1{,}2. \end{cases}$$

Решив ее, получим $x = 0{,}05$; $y = 0{,}03$.

Ответ: 0,05 м/с и 0,03 м/с.

Пример 9. По сигналу тренера два бегуна побежали по круговому маршруту в противоположных направлениях. Первый бегун пробежал к месту их встречи на 500 м больше, чем второй. Продолжая бежать по кругу в том же направлении, первый пришел к месту старта через 9 минут после встречи со вторым бегуном, а второй — через 16 минут после встречи. Какова длина кругового маршрута?

Решение. Поскольку мы знаем больше о движении бегунов после встречи в точке A (рис. 8), то имеет смысл сначала рассмотреть его.

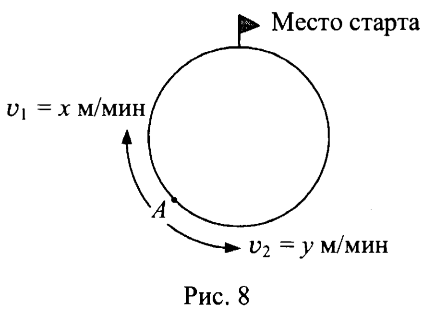


Рис. 8

Таблица 1

	v (м/мин)	t (мин)	s (м)
I бегун	x	9	$9x$
II бегун	y	16	$16y$

После встречи второй спортсмен пробежал путь, уже проделанный первым бегуном. А этот путь был по условию задачи на 500 м длиннее, то есть $16y - 9x = 500$.

Теперь перейдем к ситуации до встречи в точке A.

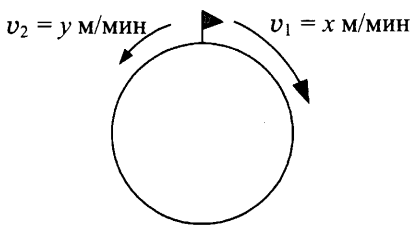


Рис. 9

До встречи первый спортсмен пробегает тот путь, который второй пробежал после встречи, и наоборот. Поэтому выразим время через расстояние и скорости.

Таблица 2

	v (м/мин)	t (мин)	s (м)
I бегун	x	$\frac{16y}{x}$	$16y$
II бегун	y	$\frac{9x}{y}$	$9x$

Время каждого спортсмена от старта до места встречи одно и то же, поэтому

$$\frac{16y}{x} = \frac{9x}{y}.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 16y - 9x = 500, \\ 16\frac{y}{x} = 9\frac{x}{y}. \end{cases}$$

Ее решением являются числа $\begin{cases} x = \dfrac{500}{3}, \\ y = 125. \end{cases}$

Длина кругового маршрута равна

$16y + 9x = 16 \cdot 125 + 9 \cdot \dfrac{500}{3} = 3500$ (м).

Ответ: 3500 м.

Пример 10. При вращении двух колес, соединенных ременной передачей, меньшее из них делает в минуту на 400 оборотов больше другого, а время, за которое оно делает один оборот, на 0,2 секунды меньше, чем время оборота другого колеса. Сколько оборотов в минуту делает каждое колесо?

Решение. Пусть большое колесо делает x об/мин, а маленькое — y об/мин. Составим таблицу, характеризующую движение каждого колеса в течение одной минуты.

Таблица 1

	v (об/мин)	t (мин)	S (об)
Большое колесо	x	1	x
Маленькое колесо	y	1	y

По условию задачи $y - x = 400$.

Составим таблицу, характеризующую поворот каждого колеса на один оборот.

Таблица 2

	v (об/мин)	t (мин)	S (об)
Большое колесо	x	$\dfrac{1}{x}$	1
Маленькое колесо	y	$\dfrac{1}{y}$	1

По условию задачи малое колесо делает один оборот на 0,2 секунды быстрее, чем большое колесо:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{300}.$$

Решив систему уравнений $\begin{cases} y - x = 400, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{300}, \end{cases}$ получим $\begin{cases} x = 200, \\ y = 600. \end{cases}$

Ответ: 200 об/мин; 600 об/мин.

Пример 11. Часы со стрелками показывают 7 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой?

Решение. Скорость движения минутной стрелки 360 градусов в час, а часовой — 30 градусов в час. Заполним таблицу, характеризующую движение каждой стрелки до момента первой встречи (t_1).

	Скорость (град/ч)	**Время (ч)**	**Путь (град)**
Минутная стрелка	360	t_1	360 t_1
Часовая стрелка	30	t_1	30 t_1

Составим уравнение на основании того, что минутная стрелка за время t_1 прошла путь на 210 градусов больше, чем часовая.

$360\,t_1 - 30\,t_1 = 210;\ t_1 = \dfrac{7}{11}.$

То есть через $\dfrac{7}{11}$ часа стрелки в первый раз встретятся.

Обозначим t_2 ч время второй встречи и заполним таблицу:

	Скорость (град/ч)	**Время (ч)**	**Путь (град)**
Минутная стрелка	360	t_2	360 t_2
Часовая стрелка	30	t_2	30 t_2

Теперь за время t_2 минутная стрелка пройдет на 360 градусов больше, чем часовая.

Получим уравнение: $360t_2 - 30t_2 = 360;\ t_2 = \dfrac{12}{11}$ ч.

Аналогично найдем

$t_3 = t_4 = t_5 = \dfrac{12}{11}$ ч.

Следовательно, минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой через $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \frac{7}{11} + \frac{12}{11} \cdot 4 = 5$ ч $= 300$ мин.

О т в е т: 300 мин.

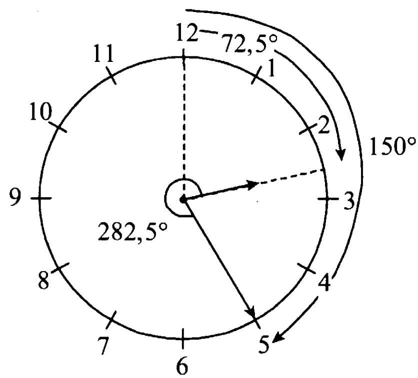
Пример 12. Часы со стрелками показывают 2 часа 25 минут. Через сколько минут минутная стрелка в девятый раз поравняется с часовой?

Р е ш е н и е.

Скорость движения минутной стрелки 360 град/ч = 6 град/мин, а часовой — 30 град/ч = 0,5 град/мин.

Заполним таблицу, характеризующую движение стрелок за 2 часа 25 минут, считая от начала суток (в 24 часа 00 минут стрелки сошлись).

	v (град/мин)	t (мин)	Путь (град)
Минутная стрелка	6	145	72,5
Часовая стрелка	0,5	145	$870 = 2 \cdot 360 + 150$



Следующая таблица характеризует движение каждой стрелки до момента первой встречи (t_1).

	v (град/мин)	t (мин)	Путь (град)
Минутная стрелка	6	t_1	$6t_1$
Часовая стрелка	0,5	t_1	$0{,}5t_1$

Составим уравнение на основании того, что минутная стрелака за время t_1 минут пройдет путь на 282,5° больше:

$$6t_1 - 0{,}5t_1 = 282{,}5; \ t_1 = \frac{565}{11}.$$

Пусть во второй раз стрелки встретятся через t_2 минут после первой встречи, тогда

$6t_2 - 0{,}5t_2 = 360;\ t_2 = \dfrac{720}{11}.$

Аналогично найдем

$t_3 = t_4 = \ldots t_9 = \dfrac{720}{11}.$

Таким образом, искомое время

$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = t_9 = \dfrac{565}{11} + \dfrac{720}{11} \cdot 8 = 575.$

О т в е т: 575 мин.

Прямолинейное движение не по одной прямой

Пример 13. Два тела движутся по двум сторонам прямого угла. В начальный момент тела отстоят от вершины на 60 и 80 см соответственно. Через 2 секунды после начала движения расстояние между телами стало равно 25 см. Определить скорость каждого тела, если известно, что одно тело движется на 7,5 см/с медленнее другого.

Р е ш е н и е . Прежде чем приступить к решению задачи, определим, в каком направлении движутся тела: от вершины или к ней. Так как 25 см меньше 60 см, 80 см и уж тем более меньше $\sqrt{60^2 + 80^2}$ см, то понятно, что тела движутся к вершине.

Далее в задаче не сказано, какое из двух тел движется быстрее, поэтому рассмотрим два случая.

I случай. Пусть первое тело движется медленнее второго тела. Если скорость второго тела x см/с, то скорость первого тела $(x - 7{,}5)$ см/с.

Рис. 10

Охарактеризуем движение тел за 2 секунды.

Таблица 1

	v (см/с)	t (с)	s (см)
I тело	$x - 7{,}5$	2	$2(x - 7{,}5)$
II тело	x	2	$2x$

В треугольнике OAB (рис. 10) $OA = 60 - (2x - 15) = 75 - 2x$, $OB = 80 - 2x$.

Воспользуемся теоремой Пифагора, составим и решим уравнение:

$(75 - 2x)^2 + (80 - 2x)^2 = 625,$

$2x^2 - 155x + 2850 = 0,$

$x = 47{,}5$ или $x = 30.$

Таким образом, $v_{\text{I}} = 40$ см/с, $v_{\text{II}} = 47{,}5$ см/с или $v_{\text{I}} = 22{,}5$ см/с, $v_{\text{II}} = 30$ см/с.

II случай. Пусть первое тело движется быстрее второго тела. Если скорость первого тела y см/с, то скорость второго тела $(y - 7{,}5)$ см/с.

Охарактеризуем движение тел за 2 секунды.

Таблица 2

	v (см/с)	t (с)	s (см)
I тело	y	2	$2y$
II тело	$y - 7{,}5$	2	$2(y - 7{,}5)$

В треугольнике OAB (рис. 11) $OA = 60 - 2y$, $OB = 95 - 2y$.

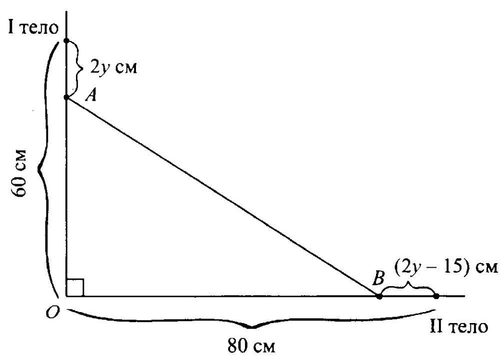


Рис. 11

Воспользуемся теоремой Пифагора и составим уравнение:

$(60 - 2y)^2 + (95 - 2y)^2 = 625.$

Решив это уравнение, получим $y = 40$ или $y = 37{,}5$. Следовательно, в этом случае $v_{\mathrm{I}} = 40$ см/с, $v_{\mathrm{II}} = 32{,}5$ см/с или $v_{\mathrm{I}} = 37{,}5$ см/с, $v_{\mathrm{II}} = 30$ см/с.

Ответ: 1) 40 см/с; 47,5 см/с; 2) 22,5 см/с; 30 см/с; 3) 40 см/с; 32,5 см/с; 4) 37,5 см/с; 30 см/с.

Следующая задача сложнее, ее длинная формулировка способна напугать многих школьников. Мы специально приводим ее решение, для того чтобы вы увидели, что для составления математической модели не требуется никаких дополнительных знаний, а нужно только внимательно проанализировать условие и грамотно выбрать переменные.

Пример 14. Из двух различных пунктов одновременно в направлении пункта A по прямолинейным дорогам отправляются автомобиль C и велосипедист B, которые движутся с постоянными скоростями. Исходные точки отправления расположены так, что в начальный момент времени точки A, B и C задают прямоугольный треугольник ABC (угол B — прямой).

После того как автомобиль проехал 25 км, автомобиль, велосипедист и пункт A переместились в вершины равностороннего треугольника (треугольник ABC стал равносторонним). Найдите расстояние между пунктами отправления, если в момент прибытия автомобиля в пункт A велосипедисту осталось проехать еще 12 км.

Решение. Сначала на рисунке 12 изобразим расположение объектов в моменты времени, описанные в условии задачи. Обозначим первоначальное расположение пунктов отправления автомобиля, велосипедиста и пункта A точками, находящимися в вершинах прямоугольного треугольника ABC. Точки B_1 и C_1 соответствуют пунктам нахождения велосипедиста и автомобиля после того, как автомобиль проехал 25 км.

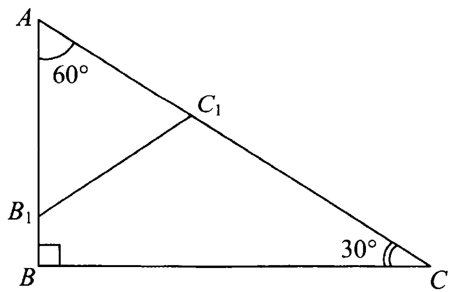


Рис. 12

Из условия следует, что в прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 30°, а значит, $AC = 2AB$ (свойство катета, лежащего против угла в 30°).

Пусть скорость автомобиля x км/ч, а велосипедиста y км/ч, расстояние от пункта отправления велосипедиста (B) до пункта A — z км. Выбор переменных объясняется тем, что скорости велосипедиста и автомобиля неизменны, а расстояние выбрано в качестве третьей переменной (попробуйте обойтись любыми двумя и убедитесь, что это невозможно). К тому же, как показал предыдущий анализ, есть некоторые соотношения между расстояниями ($AC = 2AB$, $AB_1 = AC_1$), и, кроме этого, в условии приведены сведения о расстояниях между объектами. О времени же никакой информации нет.

Заполним таблицу 1, описывающую первую фазу движения (до равностороннего треугольника).

Таблица 1

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
Автомобиль (C)	x	$\frac{25}{x}$	25
Велосипедист (B)	y	$\frac{25}{x}$	$\frac{25y}{x}$

Так как треугольник AB_1C_1 — равносторонний, то $AB_1 = AC_1$, то есть $AB - BB_1 = AC - CC_1$.

Составим первое уравнение: $z - \frac{25y}{x} = 2z - 25.$

За весь путь до пункта A автомобиль проехал $2z$ км со скоростью x км/ч, затратив время $\frac{2z}{x}$ ч. За это же время велосипедисту удалось проехать $(z - 12)$ км.

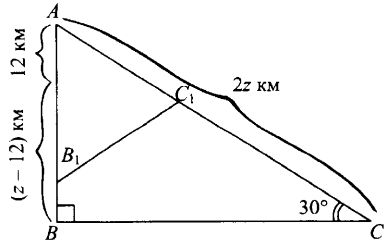


Рис. 13

Таблица 2

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
Автомобиль	x	$\frac{2z}{x}$	$2z$
Велосипедист	y	$\frac{z-12}{y}$	$z-12$

Составим второе уравнение: $\frac{2z}{x}=\frac{z-12}{y}$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} z-\frac{25y}{x}=2z-25, \\ \frac{2z}{x}=\frac{z-12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} z=\frac{25x-25y}{x}, \\ z(x-2y)=12x; \end{cases} \quad \begin{cases} z=\frac{25x-25y}{x}, \\ (25x-25y)(x-2y)=12x^2. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуем к виду $13x^2 - 75xy + 50y^2 = 0$ и решим его как квадратное относительно x:

$D = (-75y)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 50y^2 = 3025y^2 = (55y)^2$, $x = 5y$ или $x=\frac{10}{13}y$ (второй корень не подходит, так как из условия следует, что $x > y$).

Подставим $x = 5y$ в первое уравнение системы и получим

$$z=\frac{25\cdot 5y-25y}{5y}=20.$$

Из треугольника ABC находим:

$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{40^2-20^2}=20\sqrt{3}.$$

Ответ: $20\sqrt{3}$ км.

Движение с «дополнительной» скоростью

Если какое-то тело движется по реке, то при движении против течения его скорость уменьшается, а по течению — увеличивается. То же самое происходит при движении против ветра или по ветру, то есть у тела появляется «дополнительная» скорость, которая в зависимости от направления движения увеличивает или уменьшает скорость движения.

Пример 15. Если пароход и катер идут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход проходит в полтора раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорость парохода и катера в стоячей воде.

Р е ш е н и е . Пусть скорость парохода в стоячей воде x км/ч, тогда собственная скорость катера равна $(x - 8)$ км/ч.

Обозначив путь от пункта A до пункта B через a км и скорость течения реки y км/ч, заполним первую таблицу, отражающую движение катера и парохода по течению.

Таблица 1

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
Пароход	$x+y$	$\frac{a}{x+y}$	a
Катер	$x+y-8$	$\frac{a}{x+y-8}$	a

Так как по условию задачи время движения парохода по течению в полтора раза меньше, чем время движения катера, получим уравнение $\frac{a}{x+y-8}:\frac{a}{x+y}=1,5$ или $\frac{x+y}{x+y-8}=1,5.$

Движение парохода и катера против течения охарактеризуем, заполнив таблицу 2.

Таблица 2

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
Пароход	$x-y$	$\frac{a}{x-y}$	a
Катер	$(x-8)-y$	$\frac{a}{x-8-y}$	a

По условию задачи время парохода, затраченное на путь против течения, в два раза меньше, чем время катера:

$$\frac{a}{x-8-y}:\frac{a}{x-y}=2 \text{ или } \frac{x-y}{x-8-y}=2.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{x+y-8}=1,5,\\ \frac{x-y}{x-y-8}=2;\end{cases} \quad \begin{cases}x+y=1,5x+1,5y-12,\\ x-y=2x-2y-16;\end{cases}$$

$$\begin{cases}0,5x+0,5y=12,\\ x-y=16;\end{cases} \quad \begin{cases}x+y=24,\\ x-y=16;\end{cases} \quad \begin{cases}x=20,\\ y=4.\end{cases}$$

О т в е т : 20 км/ч; 12 км/ч.

Пример 16. Спускаясь по движущемуся эскалатору, пассажир проходит до его конца 40 ступеней. При движении против хода эскалатора ему приходится преодолевать 120 ступеней. Сколько бы он прошел ступеней, если бы спускался по неподвижному эскалатору?

Р е ш е н и е . Особенностью задачи является нахождение пути пассажира, то есть длины эскалатора, но не в метрах, а в ступенях.

Пусть:

K ступеней — длина эскалатора;

x (ст./мин) — собственная скорость пассажира;

y (ст./мин) — скорость эскалатора.

Составим таблицу, в которую занесем скорость и время движения пассажира по ходу эскалатора и против хода.

	v (ст./мин)	t (мин)	S (ст.)
По ходу эскалатора	$x+y$	$\frac{K}{x+y}$	K
Против хода эскалатора	$x-y$	$\frac{K}{x-y}$	K

Произведение времени на скорость дает путь.

Пассажир по ходу движения проделал путь в 40 ступеней, то есть $\frac{Kx}{x+y}=40$.

Аналогично — против хода эскалатора:

$\frac{Kx}{x-y}=120$.

Имеем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{Kx}{x+y}=40, \\ \frac{Kx}{x-y}=120. \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, получим $\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{3}$; откуда $y=\frac{1}{2}x$.

Подставим $y=\frac{1}{2}x$ в первое уравнение системы:

$$\frac{Kx}{x+\frac{1}{2}x}=40; \quad \frac{2K}{3}=40; \quad K=60.$$

О т в е т : 60 ступеней.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из пункта A в одном и том же направлении вышли два лыжника, причем второй стартовал на 6 минут позже первого и догнал первого в 2 км от старта. Если бы, дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно, то он встретил бы первого через 24 минуты после его старта. Найти скорость второго лыжника.
   Ответ: 20 км/ч.
2. Два велосипедиста стартовали один за другим с интервалом в 2 мин, причем второй велосипедист догнал первого на расстоянии 1 км от старта. Проехав всего 5 км, он повернул обратно и встретил первого в 4 км от старта. Найти скорость каждого велосипедиста.
   Ответ: 12 км/ч; 20 км/ч.
3. Два пловца на дистанции 100 метров стартовали один за другим с интервалом 1 с в пятидесятиметровом бассейне. Второй спортсмен догнал первого на отметке 21 м, затем, доплыв до противоположной стенки бассейна, повернул обратно и встретил первого пловца через $\frac{2}{3}$ с после момента поворота. Найти скорости пловцов.
   Ответ: 1,4 м/с; 1,5 м/с.
4. Школьник должен был выйти из дома в 7:30, сесть в ожидавшую его машину и доехать на ней до школы к определенному моменту. Однако он вышел из дома в 7:00 и побежал в противоположном направлении. Машина в 7:30 отправилась вслед за ним и, нагнав его, доставила в школу с опозданием на 10 минут. Во сколько раз скорость машины превосходит скорость бегущего школьника?
   Ответ: в 7 раз.
5. Расстояние между городами A и B равно 24 км. Два пешехода выходят одновременно навстречу друг другу из A и B, двигаясь с постоянными скоростями. После встречи первый пешеход доходит до B через 2 часа, а второй доходит до A через 8 часов. Определить скорость первого пешехода.
   Ответ: 4 км/ч.
6. Расстояние между A и B равно 156 км. Из A в B выезжает велосипедист. Через 2 часа из B ему навстречу отправляется другой велосипедист со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость первого велосипедиста. Встреча произошла на расстоянии 72 км от B. Найти сумму скоростей обоих велосипедистов.
   Ответ: 32 км/ч.

7. Две точки движутся по окружности длиной 27 см с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются каждые 9 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую каждые 45 с. Найти скорости точек.
Ответ: 0,018 м/с; 0,012 м/с.

8. Из пункта A в пункт B против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и, пока его 15 минут чинили, лодку снесло вниз по реке. Определить, на сколько позднее приплыла лодка в пункт B, если известно, что путь из пункта A в пункт B лодка проходит в 2,5 раза дольше, чем путь из B в A.
Ответ: $\frac{7}{16}$ ч.

9. Города A и B расположены на берегу реки, причем B расположен ниже по течению. В 9 ч утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов реки со скоростью течения реки. В тот же момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город к 9 часам вечера того же дня?
Ответ: нет.

10. Пассажир в метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 секунды; стоя на ступеньке движущегося эскалатора — за 56 секунд. За сколько секунд спустится пассажир, если он идет по неподвижному эскалатору?
Ответ: за 42 с.

Задачи на проценты

При решении задач на проценты необходимо помнить следующее:

1) 1% — это сотая часть числа.
2) Процент от числа находится умножением. Например, чтобы найти 35% от 410, надо число 410 умножить на дробь 0,35:
$410 \cdot 0{,}35 = 143{,}5$. Значит, 35% от 410 составляет 143,5.
3) Число по его проценту находится делением. Так, например, чтобы найти число, 18% которого равны 27, надо 27 разделить на 0,18, то есть $27 : 0{,}18 = 150$. Значит, число, 18% которого равны 27, есть 150.
4) Чтобы узнать, сколько процентов первое число составляет от второго, надо первое число разделить на второе и результат умножить на 100%. Например, найдем, сколько процентов от числа 200 составляет число 125:
$\frac{125}{200} \cdot 100\% = 62{,}5\%$.

5) В задачах на проценты часто возникает ситуация, когда надо найти процент от процента:
когда некоторая величина A_0 изменяется на $p\%$ за некоторый промежуток времени. Затем ее новое значение опять изменяется на $p\%$. Если этот процесс содержит n этапов, то тогда окончательное значение рассматриваемой величины

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \tag{1}$$

6) Если величина A_0 изменяется на первом этапе на $p_1\%$, на втором — на $p_2\%$ и т.д. до $p_n\%$ на последнем этапе, то окончательное значение этой величины вычисляется по формуле:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right). \tag{2}$$

7) Средний процент прироста $q\%$ определяется по формуле:

$$A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n. \tag{3}$$

8) Пусть сосуд объемом V_0 содержит $p\%$ раствор, и из сосуда выливают a л смеси и доливают a л воды, после чего раствор перемешивают. Эту процедуру повторяют n раз. Концентрация раствора после n процедур определяется формулой:

$$C_n = \frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n. \tag{4}$$

9) Если в предыдущем случае в сосуд каждый раз доливается не вода, а раствор того же вещества с постоянной концентрацией $q\%$, то концентрация раствора после n процедур определяется формулой

$$C_n = \frac{p}{100} + \frac{p-q}{100}\left(\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n - 1\right).$$

Пример 1

Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20% воды. Сколько сухих фруктов получится из 30 кг свежих фруктов?

Решение.

1) Так как свежие фрукты содержат 72% воды, то 28% в них — сухое вещество. Найдем 28% от 30 кг:
$30 \cdot 0{,}28 = 8{,}4$ (кг).

Таким образом, в 30 кг свежих фруктов содержится 8,4 кг сухого вещества (здесь найден процент от числа).

2) Так как 8,4 кг сухого вещества составляют 80% в сухих фруктах, то найдем количество сухих фруктов, разделив 8,4 на 0,8 (нахождение числа по проценту).

   $8{,}4 : 0{,}8 = 10{,}5$ (кг).

Таким образом, из 30 кг свежих фруктов получится 10,5 кг сухих фруктов.

Ответ: 10,5 кг.

Пример 2

Из 22 кг свежих грибов получено 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Какой процент воды содержат свежие грибы?

Решение.

1) Сухие грибы помимо 12% воды содержат 88% сухого вещества. Найдем количество сухого вещества в 2,5 кг сухих грибов (нахождение процента от числа):

   $2{,}5 \cdot 0{,}88 = 2{,}2$ (кг).

2) Это количество сухого вещества содержится и в 22 кг свежих грибов. Найдем, какую часть от 22 кг составляют 2,2 кг:

   $$\frac{2{,}2 \cdot 100\%}{22} = 10\%.$$

Таким образом, 10% из 22 кг составляет сухое вещество, а остальные 90% — вода.

Ответ: 90%.

Пример 3

Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и наконец после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение.

Воспользуемся формулой (2): $p_1 = 20\%$, $p_2 = 15\%$, $p_3 = 10\%$, A_0 — первоначальная цена, A_n — цена после трех уценок: $A_n = A_0(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}15)(1 - 0{,}1)$;

$A_n = A_0 \cdot 0{,}612$.

Таким образом, новая цена составляет 61,2% первоначальной цены (100%), то есть цена снижена на 38,8%.

Ответ: 38,8%.

Примечание. В формуле (2) мы изменили знак «+» на «–», так как речь идет не об увеличении, а о снижении цены.

Пример 4

Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды необходимо добавить к 180 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 4%?

Решение.

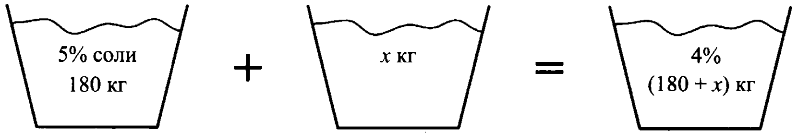


Рис. 14

1) Найдем количество пресной воды в 180 кг морской воды. Для этого нужно найти 95% от 180 кг:
$180 \cdot 0{,}95 = 171$ (кг).
2) Найдем количество пресной воды в $(180 + x)$ кг морской воды с содержанием соли 4%. Для этого нужно найти 96% от $(180 + x)$ кг, то есть
$(180 + x) \cdot 0{,}96 = 172{,}8 + 0{,}96x$ (кг).
3) Составим уравнение: $171 + x = 172{,}8 + 0{,}96x$.
Решив уравнение, найдем $x = 45$.
Ответ: 45 кг.

Пример 5

В первом сосуде находится 500 мл 70%-ного раствора кислоты, во втором — 200 мл 90%-ного раствора кислоты. Сколько миллилитров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился 74%-ный раствор кислоты?

Решение:

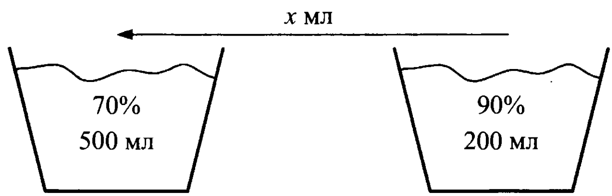


Рис. 15

1) Пусть перелили x мл раствора из второго сосуда в первый. В x мл этого раствора содержится $0{,}9x$ мл кислоты, так как раствор 90%-ный.
2) В первом сосуде содержится 70% кислоты, то есть $0{,}7 \cdot 500$ мл = = 350 мл.
3) После того как из второго сосуда перелили x мл раствора в первый сосуд, в первом сосуде стало $(350 + 0{,}9x)$ мл кислоты.
4) Найдем новую концентрацию раствора кислоты в первом сосуде, составив пропорцию:
$(350 + 0{,}9x)$ мл кислоты — α%
$(500 + x)$ мл кислоты — 100%.

Из пропорции найдем α:

$$\alpha = \frac{(350 + 0{,}9x) \cdot 100}{500 + x}\%, \text{ то есть } \alpha = \frac{35\,000 + 90x}{500 + x}\%.$$

5) По условию задачи $\alpha = 74\%$.

$\frac{35\,000 + 90x}{500 + x} = 74$; $35\,000 + 90x = 37\,000 + 74x$; $16x = 2000$; $x = 125$.

Ответ: 125 мл.

Пример 6

Выпуск продукции за год работы предприятия возрос на 8%. На следующий год он увеличился на 10%. Определить средний прирост продукции за этот период.

Решение.

Обозначим средний ежегодный прирост продукции через q%. Тогда по формуле (3):

$$\left(1 + \frac{8}{100}\right)\left(1 + \frac{10}{100}\right) = \left(1 + \frac{q}{100}\right)^2.$$

Отсюда находим $q = \sqrt{108 \cdot 110} - 100 \approx 8{,}99$.

Ответ: 8,99%.

Пример 7

В сосуде было 16 л некоторой жидкости. Часть её отлили и сосуд долили водой. Затем отлили столько же и опять долили водой. Сколько отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор этой жидкости?

Решение.

Воспользуемся формулой (4): $C_n = \frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n$;

$C_n = 25\% = \frac{25}{100}$; $p = 100\%$; $a = x$; $V_0 = 16$ л; $n = 2$;

$\frac{25}{100} = \frac{100}{100}\left(1 - \frac{x}{16}\right)^2$; $\left(1 - \frac{x}{16}\right)^2 = \frac{25}{100}$; $1 - \frac{x}{16} = \frac{1}{2}$; $x = 8$.

Ответ: 8 л.

Пример 8

Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина и в сосуд долили 2 л воды. После перемешивания из него снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате объем воды стал в 26 раз больше объема глицерина. Найти объем сосуда.

Р е ш е н и е .

Так как в результате объем воды стал в 26 раз больше объема глицерина, то объемная концентрация глицерина $C_n = \frac{V_{\text{гл}}}{V_0} = \frac{1}{27}$.

Воспользуемся формулой (4): $\frac{1}{27} = \frac{100}{100}\left(1 - \frac{2}{V_0}\right)^2$.

Решив это уравнение, найдем $V_0 = \frac{27 + 3\sqrt{3}}{13}$.

О т в е т : $\frac{27 + 3\sqrt{3}}{13}$ л.

Пример 9

Два сосуда одинакового объема наполнены раствором соли одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили $2a$ л раствора и долили $2a$ л воды. Из второго сосуда отлили $3a$ л раствора и долили $3a$ л воды. Потом эту процедуру повторили еще два раза. В результате концентрация кислоты в первом сосуде оказалась в $\frac{27}{8}$ раз больше, чем концентрация кислоты во втором сосуде. Какую часть от объема сосуда составляют a литров?

Р е ш е н и е .

Используя формулу (4), имеем

$$\frac{p}{100}\left(1 - \frac{2a}{V_0}\right)^3 = \frac{27}{8} \cdot \frac{p}{100}\left(1 - \frac{3a}{V_0}\right)^3 \text{ или } \left(1 - \frac{2a}{V_0}\right)^3 = \frac{27}{8}\left(1 - \frac{3a}{V_0}\right)^3.$$

Извлечем из обеих частей уравнения кубический корень:

$$1 - \frac{2a}{V_0} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3a}{V_0}\right); \quad 1 - \frac{2a}{V_0} = \frac{3}{2} - \frac{9a}{2V_0};$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{a}{V_0} = \frac{1}{2}; \quad \frac{a}{V_0} = \frac{1}{5}.$$

О т в е т : $\frac{1}{5}$.

Можно задачи, в условии которых присутствуют несколько растворов (сплавов), решать и не применяя формулу (4). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10

В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

Р е ш е н и е.

Будем заносить в таблицу данные о количестве растворов, объеме спирта в этих растворах и процентном содержании спирта в каждом растворе.

Количество растворов	Объем раствора	Содержание спирта	Концентрация раствора
I раствор	20 л	20 л	100%
II раствор	$(20-x+x)=20$ л	$(20-x)$ л	$\frac{(20-x)\cdot 100}{20}\% = A\%$
III раствор	$(20-x+x)=20$ л	$\left(20-x-\frac{Ax}{100}\right)$ л $= B$ л	$\frac{B\cdot 100}{20}\% = C\%$

Поясним, что x л — количество жидкости, отливаемое каждый раз.

Так как для получения II раствора отлили x л чистого спирта (концентрация I раствора — 100%), то содержание спирта во II растворе стало $(20 - x)$ л. Соответственно, изменилась и концентрация II раствора. Новую концентрацию можно найти, решив пропорцию:

20 л — 100%

$(20-x)$ л — $A\%$,

откуда $A=\frac{(20-x)100}{20}\%$.

Третий раствор по объему равен двум предыдущим, так как отливали и доливали одинаковое количество жидкости.

Содержание спирта в III растворе уменьшается по сравнению со II раствором. Найдем это уменьшение. Из II раствора отлили x л с концентрацией $A\%$, то есть с x л II раствора ушло $\frac{Ax}{100}$ л спирта. Тогда содержание спирта в III растворе стало $\left(20-x-\frac{Ax}{100}\right)$ л.

Обозначив это количество B л, найдем концентрацию III раствора, решив пропорцию:

20 л — 100%

B л — $C\%$,

откуда $C=\frac{B\cdot 100}{20}\%$.

Так как чистого спирта в III растворе оказалось втрое меньше, чем воды, то $B=\frac{1}{4}\cdot 20=5$ (л).

Р е ш и м   у р а в н е н и е.

$$20-x-\frac{Ax}{100}=5;\quad 20-x-\frac{(20-x)x}{20}=5;$$

$$400-20x-20x+x^2-100=0;$$

$x = 10$ или $x = 30$.

$x = 30$ не удовлетворяет условию задачи, так как в сосуде было 20 л спирта.

О т в е т: 10 л.

Пример 11

Имеются два сплава с различным процентным содержанием свинца. Масса одного 6 кг, другого 12 кг. От каждого из них отрезали по куску равной массы, после чего сплавили отрезанные куски с остатком другого куска. В результате процентное содержание свинца в полученных сплавах стало одинаковым. Какова масса отрезанного куска?

Р е ш е н и е.

Сплавы	Масса	Вещество (свинец)	Процентное содержание вещества
I сплав	6 кг	$\frac{6\alpha}{100}$ кг	$\alpha\%$
II сплав	12 кг	$\frac{12\beta}{100}$ кг	$\beta\%$
III сплав	$(6-x+x)=6$ кг	$\left(\frac{6\alpha}{100}-\frac{\alpha x}{100}+\frac{\beta x}{100}\right)=A$ кг	$\frac{A\cdot 100}{6}\%=\gamma\%$
IV сплав	$(12-x+x)=12$ кг	$\left(\frac{12\beta}{100}-\frac{\beta x}{100}+\frac{\alpha x}{100}\right)=C$ кг	$\frac{C\cdot 100}{12}\%=\nu\%$

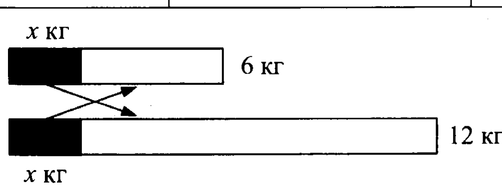


Рис. 16

Поясним, что x кг — масса, которую отрезают от каждого куска.

Обозначив процентное содержание свинца в I сплаве за $\alpha\%$, а во втором сплаве за $\beta\%$, найдем количество свинца в I сплаве $\left(\frac{6\alpha}{100}\right)$ кг и во II сплаве $\left(\frac{12\beta}{100}\right)$ кг.

Третий сплав получается, если от 6 кг первого сплава отрезать x кг и сплавить оставшуюся часть с x кг второго сплава. Найдем количество свинца в III сплаве. Свинца в III сплаве будет $\left(\frac{6\alpha}{100}-\frac{\alpha x}{100}+\frac{\beta x}{100}\right)$ кг, так как в I сплаве было $\left(\frac{6\alpha}{100}\right)$ кг свинца, с x кг первого сплава ушло $\left(\frac{\alpha x}{100}\right)$ кг (так как I сплав $\alpha\%$-ный), с x кг второго сплава поступит $\left(\frac{\beta x}{100}\right)$ кг (так как II сплав $\beta\%$-ный).

Обозначив это количество свинца в III сплаве за A кг, найдем процентное содержание III сплава:

6 кг — 100%

A кг — $\gamma\%$,

откуда $\gamma = \frac{A \cdot 100}{6}\%$.

Аналогично заполняем таблицу сведениями о IV сплаве.

По условию задачи в III и IV сплавах процентное содержание свинца стало одинаковым:

$\gamma = \nu$, то есть $\frac{A \cdot 100}{6} = \frac{C \cdot 100}{12}$; $\frac{1}{6}(6\alpha - \alpha x + \beta x) = \frac{1}{12}(12\beta - \beta x + \alpha x)$;

$12\alpha - 2\alpha x + 2\beta x = 12\beta - \beta x + \alpha x$; $12(\alpha - \beta) - 3x(\alpha - \beta) = 0$;

$(\alpha - \beta)(12 - 3x) = 0$; так как $\alpha \neq \beta$, то $x = 4$.

Ответ: 4 кг.

Пример 12

Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{3}{5}$ некоторой суммы положили в I банк, а остальную часть — во II банк. К концу года сумма этих вкладов составила 590 д. е., к концу следующего года — 701 д. е. Если бы первоначально $\frac{3}{5}$ исходного количества денег положили во II банк, а оставшуюся часть — в I банк, то через год сумма вкладов была бы 610 д. е. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

Решение.

1) Пусть $a_{\text{д.е.}}$ — вся сумма; $k\%$ — процент первого банка; $n\%$ — процент второго банка.

Обозначим $\frac{k}{100}=b$; $\frac{n}{100}=c$.

2) Если в первый банк положили $\frac{3}{5}a$ д. е., то через год там будет

$\frac{3}{5}a\left(1+\frac{k}{100}\right)=\frac{3}{5}a(1+b)$ д. е. (по первой формуле).

Через два года — $\frac{3}{5}a\left(1+\frac{k}{100}\right)^2=\frac{3}{5}a(1+b)^2$.

3) Аналогично, если во второй банк положить $\frac{2}{5}a$ д. е., то через год там будет $\frac{2}{5}a(1+c)$ д. е. (по первой формуле).

Через два года — $\frac{2}{5}a(1+c)^2$.

Составим таблицу для первого случая размещения.

	I банк	II банк	Всего
Вклад	$\frac{3}{5}a$ д. е.	$\frac{2}{5}a$ д. е.	a д. е.
I год	$\frac{3}{5}a(1+b)$ д. е.	$\frac{2}{5}a(1+c)$ д. е.	590 д. е.
II год	$\frac{3}{5}a(1+b)^2$ д. е.	$\frac{2}{5}a(1+c)^2$ д. е.	701 д. е.

Для второго случая размещения:

	I банк	II банк	Всего
Вклад	$\frac{2}{5}a$ д. е.	$\frac{3}{5}a$ д. е.	a д. е.
I год	$\frac{2}{5}a(1+b)$ д. е.	$\frac{3}{5}a(1+c)$ д. е.	610 д. е.
II год	$\frac{2}{5}a(1+b)^2$ д. е.	$\frac{3}{5}a(1+c)^2$ д. е.	Z

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}a(b+1)+\frac{2}{5}a(c+1)=590; & (1)\\ \frac{3}{5}a(b+1)^2+\frac{2}{5}a(c+1)^2=701; & (2)\\ \frac{3}{5}a(c+1)+\frac{2}{5}a(b+1)=610; & (3)\\ \frac{3}{5}a(c+1)^2+\frac{2}{5}a(b+1)^2=Z. & (4)\end{cases}$$

Умножим уравнение (1) на ($-\frac{3}{2}$) и сложим с уравнением (3):

$-\frac{1}{2}a(b+1)=-275$, откуда получаем: $b+1=\frac{550}{a}$.

Умножим уравнение (3) на ($-\frac{3}{2}$) и сложим с уравнением (1):

$-\frac{1}{2}a(c+1)=-325$, откуда получаем $c+1=\frac{650}{a}$.

Подставим $b+1=\frac{550}{a}$ и $c+1=\frac{650}{a}$ во второе уравнение системы:

(2) : $\frac{3}{5}a\left(\frac{550}{a}\right)^2+\frac{2}{5}a\left(\frac{650}{a}\right)^2=701$, решим это уравнение, найдем $a=500$.

Тогда $b+1=\frac{550}{500}=1{,}1$ и $c+1=\frac{650}{500}=1{,}3$.

Четвертое уравнение системы примет вид:

$\frac{3}{5}\cdot 500\cdot 1{,}3^2+\frac{2}{5}\cdot 500\cdot 1{,}1^2=Z$, то есть $Z=749$.

Ответ: 749 д. е.

Пример 13

Курс «прогалика» в течение двух месяцев уменьшался на одно и то же не превышающее 22 число процентов. В начале первого месяца господин К. имел некоторую сумму в «чепиках», которую он тогда же конвертировал в «прогалики». Два других господина, имея каждый суммы в «прогаликах» в 6,25 раза больше, чем та, которую получил господин К. от совершенной им валютной операции, конвертировали их в «чепики»: один — в конце первого месяца, а другой — в конце второго. При этом у одного из них «чепиков» оказалось больше ровно на столько, сколько господин К. имел в начале первого месяца. На сколько процентов за два месяца вырос курс «чепика»?

Решение.

1) Пусть 1 «прогалик» = k «чепиков» (курс).

2) «Прогалик» падал на $\alpha\% \le 22\%$ каждый месяц из двух.

I месяц (конец)	II месяц (конец)
1 «прогалик» = $k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$ «чепиков»	1 «прогалик» = $k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2$ «чепиков»
1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)}$ «прогаликов»	1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2}$ «прогаликов»

3)

	I месяц		II месяц	
	начало	конец	начало	конец
господин К.	было: x «чепиков» = $=\frac{x}{k}$ «прогаликов»	—	—	—
I господин	$\frac{6,25x}{k}$ «прогаликов»	$\frac{6,25x}{k}\times$ $\times\, k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$ «чепиков»	—	—
II господин	$\frac{6,25x}{k}$ «прогаликов»	—	—	$\frac{6,25x}{k}\times$ $\times\, k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2$ «чепиков»

4) Так как курс «прогалика» падал, то у II господина «чепиков» меньше:

$$\frac{6,25x}{k}k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)-\frac{6,25x}{k}k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2=x,$$

$$6,25\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)-6,25\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2=1;$$

$$\alpha^2-100\alpha+1600=0,$$

$\alpha = 80\%$ — не удовлетворяет условию задачи;

$\alpha = 20\%$ — ежемесячное падение курса «прогалика».

5) Узнаем, на сколько вырос «чепик» за два месяца.

Начало I месяца	Конец II месяца
1 «чепик» = $\frac{1}{k}$ «прогаликов»	1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2} = \frac{1}{k\left(1-\frac{20}{100}\right)^2} = \frac{1}{k\cdot\frac{16}{25}} = \frac{25}{16k}$ «прогаликов»

6) Составим пропорцию:

1 «чепик» — $\frac{1}{k}$ «прогаликов» — 100%,

1 «чепик» — $\frac{25}{16k}$ «прогаликов» — y%.

Решив эту пропорцию, получим 156,25%.

7) 156,25% – 100% = 56,25%.

Ответ: на 56,25%.

Пример 14

Курс «прогалика» по отношению к «чепику» падает на $28\frac{4}{7}$% в квартал. Что выгоднее:

а) сделать вклад в «чепиках» на год с начислением 60% годовых или

б) конвертировать «чепики» в «прогалики» и сделать вклад в «прогаликах» с начислением 510% годовых?

Решение.

1)

Начало года	Конец года
1 «прогалик» = = k «чепиков» (курс)	1 «прогалик» = $k\left(1-\frac{2}{7}\right)^4$ «чепиков» = $k\left(\frac{5}{7}\right)^4$ «чепиков»
1 «чепик» = = $\frac{1}{k}$ «прогаликов»	1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{2}{7}\right)^4} = \frac{1}{k\left(\frac{5}{7}\right)^4}$ «прогаликов»

2)

Начало года	Конец года
а) было x «чепиков»	$x + 0{,}6x = 1{,}6x$ «чепиков» $= \dfrac{1{,}6x}{k\left(1-\dfrac{28\frac{4}{7}}{100}\right)^4} = \dfrac{1{,}6x}{k\left(\frac{5}{7}\right)^4}$ «прогаликов»
б) было x «чепиков» $= \dfrac{x}{k}$ «прогаликов»	$\dfrac{x}{k} + 5{,}1 \cdot \dfrac{x}{k} = 6{,}1 \cdot \dfrac{x}{k}$ «прогаликов»

3) Сравним суммы в «прогаликах» в конце года:

$$\frac{1{,}6x}{k \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^4} \vee 6{,}1 \cdot \frac{x}{k}.$$

Сократим обе части сравнения на $\frac{x}{k}$.

Получим $\dfrac{1{,}6 \cdot 7^4}{5^4} \vee 6{,}1;$

$1{,}6 \cdot 7^4 \vee 6{,}1 \cdot 5^4;\ 3841{,}6 > 3812{,}5.$

Следовательно, $\dfrac{1{,}6x}{k\left(\frac{5}{7}\right)^4} > 6{,}1 \cdot \dfrac{x}{k}.$

О т в е т : первый вариант выгоднее.

Пример 15

31 декабря 2015 года Петр взял в банке 3 310 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть долг увеличивается на 10%), затем Петр переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Петр выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Р е ш е н и е .

Пусть 3 100 000 рублей = A рублей — сумма кредита,

$n\% = \dfrac{n}{100} = 0{,}01n$ — годовой процент банка.

Заполним таблицу, составляя (при необходимости) пропорции.

Деньги / Годы	Долг на начало года (руб.)	Долг на конец года (руб.)	Выплачено (руб.)	Остаток долга (руб.)
I год	A	$A + 0{,}01nA =$ $= A(1+0{,}01n) = B$	x	$B - x = C$
II год	C	$C + 0{,}01nC =$ $= C(1 + 0{,}01n) = D$	x	$D - x = E$
III год	E	$E + 0{,}01nE =$ $= E(1 + 0{,}01n) = M$	x	$M - x = O$

Из условия задачи следует, что $M - x = O$, то есть $M = x$. Заменим M на значение из таблицы: $E(1 + 0{,}01n) = x$.

Заменим E на значение из таблицы:

$(D - x)\,(1 + 0{,}01n) = x$.

Так как $n = 10$, то $1 + 0{,}01n = 1{,}1$ и $(D - x) \cdot 1{,}1 = x$.

Заменим C и B значениями из таблицы:

$(C \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 = x$;

$((B - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 = x$;

$((A \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 = x$;

$(A \cdot 1{,}21 - 1{,}1x - x) \cdot 1{,}1 = x$; $(1{,}21A - 2{,}1x) \cdot 1{,}1 = x$;

$1{,}331A - 2{,}31x = x$; $1{,}331A = 3{,}31x$;

$$x = \frac{1{,}331 \cdot A}{3{,}31} = \frac{1{,}331 \cdot 3\,310\,000}{3{,}31} = 1\,331\,000.$$

О т в е т : 1 331 000 рублей.

Пример 16

15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Р е ш е н и е.

Пусть сумма, взятая в кредит, равна S рублей. Заполним таблицу, отражающую условие задачи.

Месяцы	1	2	3	4	...	17	18	19
Долг без процентов	$\frac{18S}{18}$	$\frac{17S}{18}$	$\frac{16S}{18}$	$\frac{15S}{18}$	...	$\frac{2S}{18}$	$\frac{1S}{18}$	0
Долг с процентами	$\frac{18S}{18}t$	$\frac{17S}{18}t$	$\frac{16S}{18}t$	$\frac{15S}{18}t$	...	$\frac{2S}{18}t$	$\frac{1S}{18}t$	0

Поясним наличие множителя t на примере второго месяца. Долг на второй месяц кредитования составлял

$$\frac{17S}{18}+\frac{2}{100}\cdot\frac{17S}{18}=\frac{17S}{18}\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)=\frac{17S}{18}\cdot t,$$

где $t = 1 + \frac{2}{100}$.

Найдем выплаты:

первая выплата $S_1=\frac{18St}{18}-\frac{17S}{18}$

вторая выплата $S_2=\frac{17St}{18}-\frac{16St}{18}$

...

$$S_{17}=\frac{2St}{18}-\frac{1St}{18}$$

$$S_{18}=\frac{1St}{18}-0$$

Итого: $S_1 + S_2 + \ldots S_{18} = \frac{St}{18}\cdot(18+17+\ldots+1)-\frac{S}{18}\cdot(17+16+\ldots+1)=$

$$=\frac{St}{18}\cdot\frac{(1+18)\cdot 18}{2}-\frac{S}{18}\cdot\frac{(1+17)\cdot 17}{2}=\frac{19St}{2}-\frac{17S}{2}=\frac{19S\cdot 1{,}02-17S}{2}=$$

$= 1{,}19S$ (руб.) — сумма всех выплат.

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ руб} — 100\% \\ 1{,}19 \text{ руб} — x\% \end{array}\right| \; x=119\%.$$

О т в е т: 119%.

Пример 17

15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Р е ш е н и е.

Пусть сумма, взятая в кредит равна S тыс. рублей. Заполним таблицу, исходя из условия задачи.

Месяцы	1	2	3	...	11	12	13	...	23	24	25
Долг без процентов	$\frac{24S}{24}$	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	...	$\frac{14S}{24}$	$\frac{13S}{24}$	$\frac{12S}{24}$	...	$\frac{2S}{24}$	$\frac{1S}{24}$	0
Долг с процентами	$\frac{24S}{24}t$	$\frac{23S}{24}t$	$\frac{22S}{24}t$	...	$\frac{14S}{24}t$	$\frac{13S}{24}t$	$\frac{12S}{24}t$	...	$\frac{2S}{24}t$	$\frac{1S}{24}t$	0

Найдем первые 12 выплат:

$$S_1 = \frac{24St}{24} - \frac{23S}{24}$$

$$S_2 = \frac{23St}{24} - \frac{22S}{24}$$

...

$$S_{11} = \frac{14St}{24} - \frac{13S}{24}$$

$$S_{12} = \frac{13St}{24} - \frac{12S}{24}$$

Итого: $S_1 + S_2 + ... + S_{12} =$

$$= \frac{St}{24} \cdot (24 + 23 + ... + 13) - \frac{S}{24} \cdot (23 + 22 + ... + 12) =$$

$$= \frac{St}{24} \cdot \frac{(13+24) \cdot 12}{2} - \frac{S}{24} \cdot \frac{(12+23) \cdot 12}{2} =$$

$$= \frac{37St}{4} - \frac{35S}{4} = \frac{37 \cdot S \cdot 1{,}01 - 35S}{4} =$$

$$= 0{,}5925S, \ t = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01.$$

По условию задачи за первые 12 месяцев нужно выплатить 177,75 тыс. рублей, т.е. $0{,}5925 \cdot S = 177{,}75$; $S = 300$.

О т в е т: 300 тыс. рублей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Килограмм товара стоил 640 рублей. После снижения цены он стал стоить 570 рублей. На сколько процентов снижена цена? Ответ округлить до десятых долей процента.

О т в е т : 10,9%

2. Цену товара повысили на 20%, затем новую цену повысили на 35%. На сколько процентов повысили первоначальную цену?

О т в е т : на 62%.

3. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие содержат 13% воды. Сколько получится сухих грибов из 17,4 кг свежих грибов?

О т в е т : 2 кг.

4. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше массы первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке 10%, во втором — 40%. После сплавления этих двух слитков получился слиток, в котором процентное содержание меди равно 30%. Определить массу полученного слитка.
Ответ: 9 кг.
5. В начале года в банк было внесено 1680 д. е., а в конце года взято обратно 880 д. е. Еще через год общая сумма вклада оказалась равной 928,2 д. е. Сколько процентов годового дохода дает банк?
Ответ: 5%.
6. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять стали того и другого сорта, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?
Ответ: 40 т 5%-ного и 100 т 40%-ного.
7. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что I сплав содержит 40% олова, а II — 26% меди. Процентное содержание цинка в I и во II сплавах одинаково. Сплавив 150 кг I сплава и 250 кг II сплава, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько кг олова содержится в новом сплаве.
Ответ: 170 кг.
8. Сосуд емкостью 8 л наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота. После этого опять выпускают такое же, как в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось 9% кислорода. Определить, сколько литров выпускалось каждый раз из сосуда.
Ответ: 2 л.
9. Во что превратилась бы через 4 года сумма в 100 рублей, если бы банк начислял ежегодно 10%?
Ответ: 146,41 руб.
10. За время хранения в банке вклада проценты прибавлялись ежемесячно, сначала в размере 5% в месяц, затем $\frac{100}{9}\%$, потом $\frac{50}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.
Ответ: 12 месяцев.

11. Длину кирпича уменьшили на 26%, ширину уменьшили на 30%, высоту увеличили на 65%. Увеличился или уменьшился от этого объем кирпича и на сколько процентов?

Ответ: уменьшился на 14,53%.

12. В начале года в банк было внесено 1640 д. е., а в конце года взято обратно 882 д. е. Еще через год общая сумма вклада снова оказалась равной 882 рублям. Сколько процентов годового дохода дает банк?

Ответ: 5%.

13. После двойного снижения цены на 10% книга в букинистическом магазине стала стоить 283 руб. 50 коп. Какова первоначальная цена книги?

Ответ: 350 руб.

14. Имеется лом двух сортов стали с содержанием никеля 10% и 80%. Сколько нужно взять стали того и другого сорта, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 60%?

Ответ: 40 т 10%-ного и 100 т 80%-ного сорта.

15. Из 22 кг свежих грибов получено 2,5 кг сухих грибов. Сколько процентов воды содержат сухие грибы, если свежие грибы содержат 90% воды?

Ответ: 12%.

16. В сосуде было 18 л кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

Ответ: 9 л.

17. Сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, сплавили со 100 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось на 20%. Сколько серебра в сплаве?

Ответ: 120 г.

18. Число 256 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 108. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали число?

Ответ: 50%.

19. Имеются два водных раствора серной кислоты, первый — 40%-ный, второй — 60%-ный. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько было 40%-ного и 60%-ного растворов?

Ответ: 1 кг 40%-ного и 2 кг 60%-ного.

20. Вкладчику на его сбережения банк через год начислил проценты в размере 6 д. е. Добавив 44 д. е., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь было произведено начисление процентов, и теперь вклад вместе с процентами составил 257,5 д. е. Какая сумма первоначально была положена в банк?
Ответ: 200 д. е.

21. 31 декабря 2015 года Иван Петрович взял 13 240 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Иван Петрович переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Иван Петрович выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?
Ответ: 5 324 000 руб.

Задачи на прогрессии

Определение и свойства арифметической прогрессии

Последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется арифметической прогрессией.

Число d — разность прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:
$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии — каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Определение и свойства геометрической прогрессии

Последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же, отличное от нуля, число q, называется геометрической прогрессией.

Число q — знаменатель прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \quad S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии: каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Геометрическая прогрессия, у которой $|q|<1$, называется бесконечно убывающей, а ее сумма определяется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 1

Произведение первого и пятого членов убывающей арифметической прогрессии на 75 меньше произведения второго и четвертого ее членов. Найти сумму первых пяти членов прогрессии, если сумма первого и второго ее членов равна 7.

Решение.

По условию задачи $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 + 75 = a_2 \cdot a_4, \\ a_1 + a_2 = 7. \end{cases}$

Выразим по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ второй, четвертый и пятый члены прогрессии: $a_2 = a_1 + d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_5 = a_1 + 4d$.

Система примет вид: $\begin{cases} a_1(a_1 + 4d) + 75 = (a_1 + d)(a_1 + 3d), \\ a_1 + (a_1 + d) = 7; \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 4a_1 d + 75 = a_1^2 + 4a_1 d + 3d^2, \\ 2a_1 + d = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} d^2 = 25, \\ 2a_1 + d = 7, \end{cases}$$

отсюда $\begin{cases} d = 5, \\ a_1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} d = -5, \\ a_1 = 6. \end{cases}$

Прогрессия по условию убывающая. Следовательно, $\begin{cases} d = -5, \\ a_1 = 6. \end{cases}$

Найдем сумму первых пяти членов прогрессии:

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{(12-20)\cdot 5}{2} = -20.$$

Ответ: –20.

Пример 2

Разность первого и пятого членов убывающей геометрической прогрессии равна 240, а разность второго и четвертого равна 72. Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии.

Р е ш е н и е.

Так как $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_4 = b_1 \cdot q^3$ (по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$), то условие задачи приведет к системе уравнений с двумя переменными b_1 и q: $\begin{cases} b_1 - b_5 = 240, \\ b_2 - b_4 = 72, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} b_1 - b_1 \cdot q^4 = 240, \\ b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^3 = 72. \end{cases}$

Имеем далее $\begin{cases} b_1\left(1 - q^4\right) = 240, \\ b_1 \cdot q\left(1 - q^2\right) = 72. \end{cases}$

Так как $q \neq 1$ и $b_1 \neq 0$ (прогрессия убывающая), то, разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{1 - q^4}{q\left(1 - q^2\right)} = \frac{240}{72}; \quad \frac{1 + q^2}{q} = \frac{10}{3}; \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0; \quad q = 3 \text{ или } q = \frac{1}{3},$$

($q = 3$ не удовлетворяет условию задачи). Тогда

$b_1 = \dfrac{240}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}$; $b_1 = 243$. Найдем сумму восьми первых членов:

$$S_8 = \frac{243\left(\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3280}{9} = 364\frac{4}{9}.$$

О т в е т : $364\frac{4}{9}$.

Пример 3

Докажите, что числа $\dfrac{1}{\log_3 2}$, $\dfrac{1}{\log_6 2}$, $\dfrac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

Р е ш е н и е.

Используем характеристическое свойство арифметической прогрессии: $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, то есть $\dfrac{1}{\log_6 2} = \dfrac{\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2}}{2}$.

Упростим данное равенство, так как $\dfrac{1}{\log_b a} = \log_a b$.

$$\log_2 6 = \frac{\log_2 3 + \log_2 12}{2}; \quad \log_2 6 = \frac{1}{2}\log_2 36; \quad \log_2 6 = \log_2 6.$$

Следовательно, числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию. Что и требовалось доказать.

Пример 4

Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если первое из них оставить без изменения, ко второму из них прибавить 1, а к третьему прибавить 5, то получится возрастающая геометрическая прогрессия. Найти произведение исходных трех чисел.

Р е ш е н и е.

Обозначим исходные три числа a_1, a_2, a_3. Используя для арифметической прогрессии обозначение $\div$ и для геометрической прогрессии $\div\div$, запишем условие задачи следующим образом:

1) $\div\, a_1, a_2, a_3$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 15$; 2) $\div\div\, a_1, a_2 + 1, a_3 + 5$.

Воспользовавшись формулой n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ и характеристическим свойством геометрической прогрессии, получим соответственно:

1) $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 15$;

2) $(a_2 + 1)^2 = a_1(a_3 + 5)$, где $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$.

Таким образом, мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными a_1 и d:

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 5). \end{cases}$$

Имеем далее: $\begin{cases} a_1 + d = 5, \\ (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 5). \end{cases}$

Выразив a_1 через d из первого уравнения и подставив это выражение вместо a_1 во второе уравнение, получим: $36 = (5 - d)\cdot(10 + d)$, откуда находим $d = -7$ или $d = 2$.

Следовательно, $a_1 = 12$ при $d = -7$ или $a_1 = 3$ при $d = 2$.

Пара чисел $a_1 = 12$ и $d = -7$ не удовлетворяет условию, так как арифметическую прогрессию составляют три положительных числа. Значит, условию удовлетворяют три числа: 3; 5; 7. Произведение этих чисел равно 105.

О т в е т: 105.

Пример 5

Сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов арифметической прогрессии равна 20. Найти сумму первых двадцати членов этой прогрессии.

Решение.

Так как $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{14} = a_1 + 13d$, $a_{18} = a_1 + 17d$, то

$a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 4a_1 + 38d = 2(2a_1 + 19d)$.

По условию $2(2a_1 + 19d) = 20$, то есть $2a_1 + 19d = 10$.

Второе уравнение с неизвестными a_1 и d получить не удастся. Сумма первых двадцати членов:

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2a_1 + 19d) \cdot 10 = 10 \cdot 10 = 100,$$

так как $2a_1 + 19d = 10$.

Ответ: 100.

Пример 6

Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член уменьшить на 4, то полученные числа в том же порядке опять составят геометрическую прогрессию. Если в новой прогрессии третий член уменьшить на 9, то получится арифметическая прогрессия. Найти первоначально данные числа.

Решение.

Обозначим искомые три числа b_1, b_2, b_3. Используя обозначения $\div$ для арифметической прогрессии и для геометрической прогрессии $∺$, запишем условие задачи следующим образом:

1) $∺\, b_1, b_2, b_3;$

2) $∺\, b_1, b_2 - 4, b_3;$

3) $\div\, b_1, b_2 - 4, b_3 - 9.$

Воспользовавшись характеристическим свойством геометрической и арифметической прогрессий, получим соответственно:

1) $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$; 2) $(b_2 - 4)^2 = b_1 \cdot b_3$; 3) $b_2 - 4 = \dfrac{b_1 + b_3 - 9}{2}$.

Так как $b_2 = b_1 \cdot q$, а $b_3 = b_1 \cdot q^2$, то:

1) $b_1^2 \cdot q^2 = b_1 \cdot b_1 \cdot q^2;$

2) $(b_1 \cdot q - 4)^2 = b_1 \cdot b_1 \cdot q^2$;

3) $b_1 \cdot q - 4 = \dfrac{b_1 + b_1 \cdot q^2 - 9}{2}$.

Первое условие как тождественное равенство можно опустить. Мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1^2 \cdot q^2 - 8b_1 \cdot q + 16 = b_1^2 \cdot q^2; \\ 2b_1 \cdot q - 8 = b_1 + b_1 \cdot q^2 - 9. \end{cases}$$

Имеем далее:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q = 2; \\ b_1\left(q^2 - 2q + 1\right) = 1. \end{cases}$$

Выразим b_1 через q из первого уравнения системы: $b_1 = \dfrac{2}{q}$ и подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы:

$\dfrac{2\left(q^2 - 2q + 1\right)}{q} = 1$, откуда находим $q = 2$ или $q = \dfrac{1}{2}$.

При $q = 2$ $b_1 = 1$ и при $q = \dfrac{1}{2}$ $b_1 = 4$.

Значит, условию задачи удовлетворяют две тройки чисел:

1) 1, 2, 4; 2) 4, 2, 1.

Ответ: 1, 2, 4 и 4, 2, 1.

Пример 7

Сумма пятнадцати первых членов геометрической прогрессии составляет 30% суммы ее последующих пятнадцати членов. Во сколько раз четвертый член прогрессии меньше ее девятнадцатого члена?

Решение.

1) Найдем сумму первых пятнадцати членов геометрической прогрессии:

$$S_{15} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{15} - 1\right)}{q - 1}.$$

2) Найдем сумму последующих пятнадцати членов геометрической прогрессии:

$$S_{30} - S_{15} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{30} - 1\right)}{q - 1} - \frac{b_1 \cdot \left(q^{15} - 1\right)}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{30} - q^{15}\right)}{q - 1}.$$

3) Составим уравнение на основании того, что сумма первых пятнадцати членов составляет 30% суммы ее последующих пятнадцати членов:

$$\frac{b_1\cdot\left(q^{15}-1\right)}{q-1}=0{,}3\cdot\frac{b_1\left(q^{30}-q^{15}\right)}{q-1}.$$

Имеем далее $1 = 0{,}3 \cdot q^{15}$ или $q^{15}=\frac{10}{3}$.

4) $b_4=b_1\cdot q^3$; $b_{19}=b_1\cdot q^{18}$; $b_{19}:b_4=q^{15}=\frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Пример 8

Ваня, Миша, Алик и Вадим ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных каждым из них, образует в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Алик поймал столько рыб, сколько Вадим, а Вадим поймал бы на 12 рыб больше, то количество рыб, пойманных юношами, образовало бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша?

Решение.

Обозначим количество рыб, пойманных Ваней, Мишей, Аликом и Вадимом, a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно. Используя обозначения $\div$ для арифметической прогрессии и $\frac{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}$ для геометрической прогрессии, запишем условие задачи следующим образом:

1) $\div\, a_1, a_2, a_3, a_4$;

2) $\frac{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}\, a_1, a_2, a_4, a_4+12$. (*)

Воспользовавшись формулой n-го члена арифметической прогрессии, получим:

$a_2=a_1+d$; $a_4=a_1+3d$.

Тогда условие (*) запишется в виде

$$\frac{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}\, a_1,\ a_1+d,\ a_1+3d,\ a_1+3d+12.$$

Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии для ее второго и третьего членов и получим систему уравнений с двумя неизвестными a_1 и d:

$$\begin{cases}(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+3d),\\ (a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+3d+12).\end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $d^2 = a_1 d$ или $d = a_1$, так как $(d \neq 0)$. Тогда из второго уравнения системы $d = 3$. Следовательно, $a_1 = 3$ и $d = 3$. Количество рыб, пойманных Мишей, равно 6.

Ответ: 6.

Пример 9

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов всех ее членов равна $\frac{108}{13}$. Найти первый член прогрессии.

Решение.

Пусть $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots b_n,\ \ldots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то есть $b_1;\ b_1 q;\ b_1 q^2;\ \ldots b_1 q^{n-1};\ \ldots$ и $|q| < 1$.

По условию ее сумма равна 3, то есть $\frac{b_1}{1-q} = 3$.

Рассмотрим последовательность $b_1^3,\ b_2^3,\ b_3^3,\ \ldots\ b_n^3,\ \ldots$, то есть

$$b_1^3,\ b_1^3 q^3,\ b_1^3 q^6,\ \ldots\ b_1^3 q^{3n-3},\ \ldots . \qquad (*)$$

Каждый ее член получается из предыдущего умножением на q^3, то есть это геометрическая прогрессия. Так как $|q| < 1$, то $\left|q^3\right| < 1$ и последовательность (*) — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. По условию ее сумма равна $\frac{108}{13}$, то есть $\frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{108}{13}$.

Значит, в итоге мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 3, \\ \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{108}{13}. \end{cases}$

Выразив b_1 из первого уравнения $b_1 = 3(1 - q)$ и подставив во второе уравнение, получим $\frac{27(1-q)^3}{1-q^3} = \frac{108}{13}$, откуда $\frac{(1-q)^2}{1+q+q^2} = \frac{4}{13}$; $q = 3$ или $q = \frac{1}{3}$. Так как $|q| < 1$, то $q = 3$ не удовлетворяет условию. Тогда $b_1 = 3 \cdot (1-q) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$.

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$ равна 7, а сумма квадратов ее членов равна 24,5. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

   Ответ: $6\frac{722}{729}$.

2. Три числа образуют конечную возрастающую геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то новая тройка чисел будет представлять собой конечную арифметическую прогрессию. Если третье число этой новой тройки увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти сумму трех данных чисел.

   Ответ: 28.

3. При делении 14-го члена арифметической прогрессии на ее 5-й член в частном получается 3, а при делении 18-го члена на 7-й член в частном получается 2 и в остатке 4. Найти 23-й член прогрессии.

   Ответ: 20.

4. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после вычитания из него числа 297 получается число с теми же цифрами, что и данное число, но в обратном порядке, если же цифры исходного числа, начиная с цифры сотен, увеличить соответственно на 8, 5 и 1, то полученные числа составят арифметическую прогрессию.

   Ответ: 421.

5. У некоторой геометрической прогрессии сумма членов на нечетных местах равна $\frac{21}{16}$, а сумма членов на четных местах равна $\frac{21}{32}$. Найти знаменатель этой прогрессии, если число членов в прогрессии четное.

   Ответ: 0,5.

6. Найти все трехзначные числа, кратные 45, цифры которых образуют арифметическую прогрессию.

   Ответ: 630, 135, 765.

7. Найти натуральное трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего на 400, образуют арифметическую прогрессию.

   Ответ: 931.

8. Найти возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

   Ответ: 5, 9, 13, ...

9. Сумма пятого, девятого, шестнадцатого и двадцать второго членов арифметической прогрессии равна 20. Найти сумму первых 25 членов этой прогрессии.

Ответ: 125.

10. Три числа $\cos 6\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 2\alpha$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найти α.

Ответ: $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;\quad \frac{\pi}{4}(1+2k),\ k\in Z.$

Задачи на числовые зависимости

При решении задач на числовые зависимости полезно помнить следующие сведения.

1) Если натуральное число A имеет n знаков, то

$$A=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot 10+a_n,$$

где a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots a_1$ — соответственно количество единиц, десятков, сотен, … в числе A. Например: $2364 = 2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 4$,

a_1, a_2, … a_{n-1}, a_1 — цифры числа A.

2) Нужно понимать разницу между терминами «число» и «цифра». В десятичной системе счисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При помощи этих цифр можно записать любое число. Например: число $2996 = 2\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 6$.
3) Если к натуральному числу A справа приписать n-значное число B, то получим число $A\cdot 10^n+B$.
4) Если к n-значному числу A приписать слева число B, то получим число $B\cdot 10^n + A$.
5) Если дано число, записанное цифрами a_1, a_2, $\ldots a_{n-1}$, a_n (его обычно записывают в виде $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$), то оно равно

$$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot 10+a_n.$$

6) Если при делении натурального числа A на натуральное число B в частном получится q, а в остатке r ($r < B$), то $A = B\cdot q + r$.

Пример 1

Найти двузначное число, зная, что число его единиц на 4 меньше числа его десятков, а произведение искомого числа и суммы его цифр равно 1330.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое двузначное число, то есть $\overline{xy}=10x+y$.

По условию число единиц на 4 меньше числа десятков.

Следовательно, $x-y=4$.

Произведение искомого числа и суммы его цифр равно 1330, то есть

$(10x + y) \cdot (x + y) = 1330.$

Из системы $\begin{cases} x - y = 4, \\ (10x + y) \cdot (x + y) = 1330 \end{cases}$

находим: $x_1 = 9$ или $x_2 = -\frac{73}{11}$. x_2 не удовлетворяет условию, так как x — цифра.

Таким образом, $x = 9$, $y = 5$. Искомое число 95.

Ответ: 95.

Пример 2

Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если к искомому числу прибавить 27, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое число; x — цифра десятков, y — цифра единиц. Тогда $\overline{xy} = 10x + y$.

Из условия задачи следует, что $x + y = 15$ и $10x + y + 27 = 10y + x$.

Получим систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = 15, \\ 9x - 9y = -27; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ y = 9. \end{cases}$

Ответ: 69.

Пример 3

Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 11. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 2 и в остатке 5. Найти это число.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое число; x — цифра десятков, y — цифра единиц. Тогда $\overline{xy} = 10x + y$.

По условию задачи $10x + y = 6(x + y) + 11$ и $10x + y = 2xy + 5$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + y = 6(x + y) + 11, \\ 10x + y = 2xy + 5, \end{cases}$$

получим $x_1 = 9$; $y_1 = 5$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $y_2 = -1{,}8$. Условию задачи удовлетворяет только первая пара.

Ответ: 95.

Пример 4

Запись шестизначного числа начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

Р е ш е н и е.

Обозначив через x пятизначное число, следующее за цифрой 1, получим, что искомое число равно $100\,000 + x$. Если цифру 1 перенести на последнее место, то новое число будет равно $10x + 1$. По условию задачи $10x + 1 = 3(100\,000 + x)$.

Отсюда получаем: $x = 42\,857$.

О т в е т : первоначальное число равно 142 857.

Пример 5

Ученик должен был перемножить два трехзначных числа. Но он не заметил знака умножения и принял оба рядом стоящие множители за одно шестизначное число. Поэтому полученное произведение оказалось в семь раз больше истинного. Найти оба множителя.

Р е ш е н и е.

Обозначим первый множитель a, а второй b. Тогда истинное произведение будет равным $a \cdot b$, а шестизначное число $\overline{ab}$, где a и b трехзначные числа. $\overline{ab} = 1000a + b$.

По условию задачи $\overline{ab} = 7ab$, то есть $1000\,a + b = 7ab$. Выразим из этого уравнения a через b:

$$a = \frac{b}{7b-1000}.$$

Так как $7b - 1000 > 0$, то $b > 142{,}8$. Кроме того, $a \geq 100$ как трехзначное число.

Таким образом, $\dfrac{b}{7b-1000} \geq 100;\ b \geq 700b - 100000;\ b < 143{,}06.$ Но b — целое число и $142{,}8 < b < 143{,}06$.

Следовательно, $b = 143;\ a = \dfrac{143}{7 \cdot 143 - 1000} = \dfrac{143}{1} = 143.$

О т в е т : 143 и 143.

Пример 6

Если к натуральному двузначному числу x, сумма цифр которого равна 10, прибавить 44, то получится такое число y, что произведение его цифр равно 12. Найти число x.

Р е ш е н и е.

Число x — двузначное, то есть $10 \leq x \leq 99$,
поэтому $54 \leq y = x + 44 \leq 143$.

Известно также, что произведение цифр числа y равно 12.

Учитывая ограничение $54 \leq y \leq 143$, найдем возможные числа $y_1 = 143, y_2 = 126, y_3 = 134, y_4 = 62$. Найдя числа $x_1 = 99$, $x_2 = 82$, $x_3 = 90$, $x_4 = 18$, видим, что условию удовлетворяет $x_2 = 82$, так как сумма цифр равна 10.

Ответ: 82.

Задачи для самостоятельного решения

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найти это число.
   Ответ: 38.
2. Разность цифр двузначного натурального числа не превосходит 3, а сумма цифр данного числа равна 9. Найти это число.
   Ответ: 36, 45, 54, 63.
3. В четырехзначном числе сумма цифр тысяч и десятков равна 4, сумма цифр сотен и единиц равна 15, а цифра единиц больше цифры тысяч на 7. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найти такое, у которого сумма произведения цифры тысяч на цифру единиц и произведение цифры сотен на цифру десятков принимает наименьшее значение.
   Ответ: 1738.
4. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.
   Ответ: 285 714.
5. При умножении двух натуральных чисел, сумма которых равна 701, абитуриентом была допущена ошибка: цифра тысяч была увеличена на 2, а цифра единиц уменьшена на 2. При делении неверного произведения на меньшее из данных чисел получилось в частном 587, а в остатке 63. Какие числа перемножал абитуриент?
   Ответ: 129 и 572.
6. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это число.
   Ответ: 83.

7. В двузначном положительном числе сумма квадратов цифр в 2,5 раза больше суммы его цифр и на единицу больше утроенного произведения этих цифр. Найти наименьшее значение этого числа.
Ответ: 13.
8. Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное этими же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.
Ответ: 32.
9. Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится $\frac{1}{15}$. Найти данную дробь.
Ответ: $\frac{3}{5}$.
10. Некто родился в девятнадцатом веке. В 1901 году сумма цифр числа, выражающего год его рождения, равнялась сумме цифр числа, выражающего количество прожитых лет. Определить, в каком году родился этот человек.
Ответ: 1810.

Задачи на тему «Работа»

Задачи, в которых кто-то выполняет некоторую работу, или задачи, связанные с наполнением или опорожнением резервуаров, напоминают задачи на движение.

В задачах такого типа вся работа или полный объем резервуара аналогичны роли расстояния в задачах на движение, а производительности выполняющих работу объектов аналогичны скоростям движения.

Часто в этих задачах объем работы не указывается и не является искомым. В таких случаях объем всей работы удобно принимать за единицу.

Введем буквенные обозначения, единицы измерения и зависимость трех величин.

1. Работа A (м^3, га, л, машин, деталей и т.д.).
2. Производительность P — работа в единицу времени ($^{\text{м}^3}/_{\text{ч}}$, $^{\text{га}}/_{\text{смена}}$, $^{\text{дет}}/_{\text{дн}}$ и т.д.).
3. Время работы t (ч, мин, смена и т.д.).
4. Зависимость: $A = P \cdot t$.

Пример 1

Три каменщика разной квалификации выложили кирпичную стену, причем 1-й каменщик проработал 6 ч, 2-й — 4 ч, 3-й — 7 ч. Если бы 1-й каменщик работал 4 ч, 2-й — 2 ч, 3-й — 5 ч, то было бы выполнено 2/3 всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

Р е ш е н и е .

Примем объём всей работы за 1. Обозначим x, y и z производительность первого, второго и третьего каменщиков, т.е. ту часть работы, которую каждый из них выполняет за час.

	P (часть работы за 1 час)	t (ч)	A
I	x	6	$6x$
II	y	4	$4y$
III	z	7	$7z$

$6x + 4y + 7z = 1$

	P (часть работы за 1 час)	t (ч)	A
I	x	4	4x
II	y	2	$2y$
III	z	5	$5z$

$4x + 2y + 5z = \frac{2}{3}$

Таким образом, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} 6x+4y+7z=1, \\ 4x+2y+5z=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $2x + 2y + 2z = \frac{1}{3}$, $x + y + z = \frac{1}{6}$. В задаче нужно найти время, за которое каменщики закончат всю кладку стены, работая одновременно, т. е. величину $\dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ ч.

О т в е т : 6 ч.

Пример 2

Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа более установленной для нее нормы, то закончит работу ранее намеченного срока на 3 дня; если же будет печатать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

Р е ш е н и е.

Заполним таблицу, используя условие задачи.

	P (лист/дни)	t (дни)	A (листы)
Норма	x	y	xy
План 1	$x+2$	$y-3$	$(x+2)(y-3)$
План 2	$x+4$	$y-5$	$(x+4)(y-5)$

Составим два уравнения, исходя из того, что работа не изменилась:

$$\begin{cases}(x+2)(y-3)=xy,\\(x+4)(y-5)=xy.\end{cases}$$

Раскрыв в каждом уравнении скобки и приведя подобные, получим

$$\begin{cases}2y-3x=6,\\4y-5x=20,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=8,\\y=15.\end{cases}$$

Следовательно, машинистка должна была перепечатать за 15 дней 120 листов.

О т в е т: 120 листов, 15 дней.

Пример 3

Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала 1-й кран был открыт 1/3 того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один 2-й кран. Затем наоборот. После этого оказалось наполненным 13/18 бассейна. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 3 ч 36 мин?

Р е ш е н и е.

1)

	P (часть бассейна в 1 ч)	t (ч)	A
I кран	$\frac{1}{x}$	x	1
II кран	$\frac{1}{y}$	y	1

2)

	P (часть бассейна в 1 ч)	t (ч)	A
I кран	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}y$	$\frac{y}{3x}$
II кран	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{x}{3y}$

$$\frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18}.$$

3) 3 ч 36 мин = 3 ч $+\frac{3}{5}$ ч = $\frac{18}{5}$ ч.

	P (часть бассейна в 1 ч)	t (ч)	A
I кран	$\frac{1}{x}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{18}{5x}$
II кран	$\frac{1}{y}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{18}{5y}$

$$\frac{18}{5x}+\frac{18}{5y}=1.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18},\\ \frac{18}{5x}+\frac{18}{5y}=1.\end{cases}$$

Обозначив $\frac{y}{x}=t$, запишем 1-е уравнение системы в виде:

$\frac{1}{3}t+\frac{1}{3t}=\frac{13}{18}$, откуда $t=\frac{2}{3}$ или $t=\frac{3}{2}$.

Таким образом, $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ или $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$.

В первом случае $\begin{cases}y=\frac{2}{3}x,\\ \frac{18}{5x}+\frac{18}{\frac{10}{3}x}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}y=6,\\ x=9.\end{cases}$

Во втором случае $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x,\\ \frac{18}{5x}+\frac{18}{\frac{15}{2}x}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}y=9,\\ x=6.\end{cases}$

Ответ: 6 ч, 9 ч.

Пример 4

Бассейн наполняется четырьмя трубами за 4 часа. Первая, вторая и четвертая трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 6 часов; вторая, третья и четвертая — за 5 часов. За сколько времени наполнят бассейн первая и третья трубы?

Решение.

Пусть V — объем бассейна (л), x, y, z, u — производительность I, II, III, IV труб соответственно (л/ч). Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}(x+y+z+u)\cdot 4=V,\\(x+y+u)\cdot 6=V,\\(y+z+u)\cdot 5=V.\end{cases}$$

Система содержит три уравнения и пять неизвестных. Нет необходимости определять все пять неизвестных величин, нужно найти лишь искомую величину: $\dfrac{V}{x+z}$ ч.

Перепишем систему в вид: $\begin{cases}\dfrac{x}{V}+\dfrac{y}{V}+\dfrac{z}{V}+\dfrac{u}{V}=\dfrac{1}{4},\\\dfrac{x}{V}+\dfrac{y}{V}+\dfrac{u}{V}=\dfrac{1}{6},\\\dfrac{y}{V}+\dfrac{z}{V}+\dfrac{u}{V}=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе, получим $\dfrac{z}{V}=\dfrac{1}{12}$.

Вычтем из первого уравнения третье: $\dfrac{x}{V}=\dfrac{1}{20}$.

Тогда $\dfrac{x}{V}+\dfrac{z}{V}=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{15}$; $\qquad \dfrac{V}{x+z}=\dfrac{15}{2}$.

Ответ: 7,5 ч.

Задачи для самостоятельного решения

1. Двое рабочих, работая вместе, выполняют всю работу за 8 часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 часов скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?

   Ответ: 12 ч, 24 ч.

2. Для заполнения бассейна были открыты две трубы, по которым подавали воду $\dfrac{1}{4}$ часа, затем открыли третью трубу, и через 5 минут бассейн был заполнен, а все три трубы закрыты. Производительность второй трубы в 1,2 раза больше производительности первой. Через вторую и третью трубы, открытые одновременно, бассейн заполняется за $\dfrac{9}{10}$ того времени, которое требуется для заполнения его через первую и третью трубы при их совместной работе. За какое время заполнится бассейн, если одновременно открыть все три трубы?

   Ответ: за 16 мин.

3. На автомобильном заводе изготавливают легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 штук больше, чем в первый день, а грузовых машин на 50 штук больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?
Ответ: 450 и 550.
4. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то работа заняла бы у них 4 дня. За сколько времени выполнил бы всю работу первый рабочий, работая один?
Ответ: за 10 дней.
5. На грузовом автомобиле планировалось перевезти 60 т груза за несколько рейсов при полной загрузке машины. В связи с тем что машину каждый раз недогружали на 0,5 т, пришлось сделать на 4 рейса больше планируемого. Сколько рейсов было сделано?
Ответ: 24 рейса.
6. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 часа. Для наполнения бассейна наполовину с помощью одного первого насоса требуется времени на 4 часа больше, чем с помощью одного второго насоса для наполнения бассейна на три четверти. За какое время можно наполнить бассейн каждым из насосов в отдельности?
Ответ: 16 ч; 5 ч 20 мин.
7. Двое рабочих за смену изготовили вместе 72 детали. После того как первый рабочий увеличил производительность в 1,15 раза, а второй в 1,25 раза, они стали изготавливать за смену 86 деталей. Сколько деталей изготавливает первый рабочий за смену после повышения производительности труда?
Ответ: 46 деталей.
8. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 часа; первый, третий и пятый — за 5 часов; первый, третий и четвертый — за 6 часов; четвертый, второй и пятый — за 4 часа. За какой промежуток времени выполнят всю работу пять человек, работая вместе?
Ответ: 3 часа.

). Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая из них приступила к работе на 1 час позднее первой. Через 3 часа после того, как первая начала работу, им оставалось выполнить еще 9/20 всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. За сколько часов первая, работая отдельно, могла бы выполнить всю работу?

Ответ: за 10 ч.

§2. ЛОГАРИФМЫ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Краткое изложение теории

Определение. *Логарифмом* положительного числа b по основанию a ($a > 0$ и $a \neq 1$) называют такое число c, что $a^c = b$. Логарифм числа b по основанию a обозначают так: $\log_a b$.

Примеры:

1) $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$;
2) $\log_5 125 = 3$, так как $5^3 = 125$;
3) $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{100} = 2$, так как $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$;
4) $\log_{0,1} 0,00001 = 5$, так как $(0,1)^5 = 0,00001$;
5) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$, так как $2^{-6} = \frac{1}{64}$;
6) $\log_7 1 = 0$, так как $7^0 = 1$.

Свойства логарифмов

1) $a^{\log_a b} = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
2) $\log_a a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$;
3) $\log_a 1 = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4) Если число b и основание a лежат по одну сторону от единицы, то логарифм $\log_a b > 0$, если по разные стороны, то $\log_a b < 0$.

   Например, $\log_{0,1} 3 < 0$; $\log_{\sqrt{3}} 17 > 0$, $\log_{0,3} \frac{1}{2} > 0$, $\log_2 0,25 < 0$.
5) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$, $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
6) $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$, $a > 0$, $a \neq 1$, $bc > 0$;
7) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
8) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\frac{b}{c} > 0$;

9) $k\log_a b=\log_a b^k$, $a>0, a\neq 1, b>0$;

10) $\log_a b^k=k\log_a b$, k — нечетное число, $a>0, a\neq 1, b>0$;

11) $\log_a b^k=k\log_a |b|$, k — четное число, $a>0, a\neq 1, b\neq 0$;

12) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a>0, c>0, b>0, a\neq 1, c\neq 1$;

13) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1$;

14) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\cdot\log_a b$, n и m — нечетные числа, $a>0, a\neq 1, b>0$;

15) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\cdot\log_{|a|}|b|$, n и m — четные числа, $a\neq 1, a\neq 0, b\neq 1$; $b\neq 0$;

16) $\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\dfrac{\log_m b}{\log_m a}$, $b>0, a>0, a\neq 1, c>0, m>0, c\neq 1, m\neq 1$;

17) $\log_d a\cdot\log_c b=\log_d b\cdot\log_c a$, $a>0, b>0, d>0, c>0, d\neq 1, c\neq 1$;

Например, $\log_3 7\cdot\log_{\frac{1}{7}} 81=\log_{\frac{1}{7}} 7\cdot\log_3 81=-4$.

18) $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$, $a>0, b>0, c>0, c\neq 1$.

Например, $2^{\log_4 25}=25^{\log_4 2}=25^{\frac{1}{2}}=5$.

Основные свойства логарифмической функции

Дана функция $y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$.

1) $D(y)=(0;+\infty)$.
2) $E(y)=R$.
3) Если $a>1$, то функция возрастает на $(0;+\infty)$;
   если $0<a<1$, то функция убывает на $(0;+\infty)$.
4) Если $x=1$, то $y=0$;
   если $x>1$ и $a>1$, то $y>0$;
   если $x>1$ и $0<a<1$, то $y<0$;
   если $0<x<1$ и $a>1$, то $y<0$;
   если $0<x<1$ и $0<a<1$, то $y>0$.

График логарифмической функции

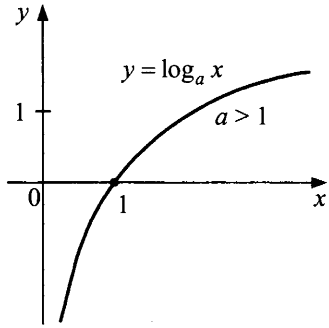


Рис. 17

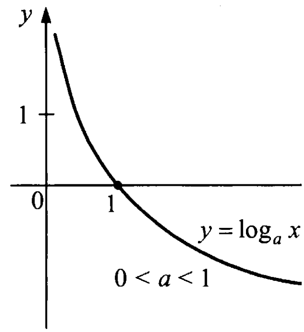


Рис. 18

Преобразование логарифмических выражений

Рассмотрим несколько характерных примеров.

1. Упростить выражение:

а) $$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}} = \sqrt{5^{\frac{2}{\log_6 5}} + 7^{\frac{2}{\log_8 7}}} = \sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}} =$$

$$= \sqrt{\left(5^{\log_5 6}\right)^2 + \left(7^{\log_7 8}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Ответ: 10.

б) $$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\frac{1}{\log_6 3}} + 9^{\frac{1}{\log_7 3}} = 3^{\frac{4}{\log_5 3}} + 3^{\frac{3}{\log_6 3}} + 3^{\frac{2}{\log_7 3}} =$$

$$= 3^{4\log_3 5} + 3^{3\log_3 6} + 3^{2\log_3 7} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4 + \left(3^{\log_3 6}\right)^3 + \left(3^{\log_3 7}\right)^2 =$$

$$= 5^4 + 6^3 + 7^2 = 625 + 216 + 49 = 890.$$

Ответ: 890.

в) $$-\log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right) = -\log_3\left(\log_3 \sqrt[9]{3}\right) =$$

$$= -\log_3\left(\log_3 3^{\frac{1}{9}}\right) = -\log_3\left(\frac{1}{9}\cdot\log_3 3\right) = -\log_3 \frac{1}{9} = 2.$$

Ответ: 2.

г) $$36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36} = 5^{\log_6 36} + \frac{10}{10^{\lg 2}} - 36^{\log_9 3} =$$

$$= 5^2 + \frac{10}{2} - 36^{\frac{1}{2}} = 25 + 5 - 6 = 24.$$ Ответ: 24.

д) $$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\frac{1}{\log_{49} 25}}\right)\cdot\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\frac{1}{\log_9 4}}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}}=$$

$$=\frac{\left(3^{3\log_3 2}+5^{\log_{25} 49}\right)\left(9^{2\log_9 4}-8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\log_{25} 16}\cdot 3}=$$

$$=\frac{\left(\left(3^{\log_3 2}\right)^3+5^{\log_5 7}\right)\left(\left(9^{\log_9 4}\right)^2-\left(2^{\log_2 3}\right)^3\right)}{3+5^{\log_5 4}\cdot 3}=$$

$$=\frac{\left(2^3+7\right)\left(4^2-3^3\right)}{3+4\cdot 3}=\frac{15\cdot(-11)}{15}=-11.$$ Ответ: -11.

е) $(\log_3 2+\log_2 81+4)\cdot(\log_3 2-2\log_{18} 2)\times\log_2 3-\log_3 2=$

$$=\left(\log_3 2+\frac{\log_3 81}{\log_3 2}+4\right)\cdot\left(\log_3 2-2\cdot\frac{\log_3 2}{\log_3 18}\right)\cdot\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=$$

$$=\left(\log_3 2+\frac{4}{\log_3 2}+4\right)\cdot\left(\log_3 2-\frac{2\log_3 2}{\log_3 9+\log_3 2}\right)\cdot\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2$$

Пусть $\log_3 2=a$, тогда:

$$\left(a+\frac{4}{a}+4\right)\cdot\left(a-\frac{2a}{2+a}\right)\cdot\frac{1}{a}-a=\frac{a^2+4a+4}{a}\times$$

$$\times\frac{2a+a^2-2a}{a(2+a)}-a=\frac{(a+2)^2a^2}{a^2(2+a)}-a=a+2-a=2.$$ Ответ: 2.

ж) $$\frac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{(\log_2(7\cdot 2))^2+\log_2(7\cdot 2)\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2(7\cdot 2)+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{(\log_2 7+1)^2+(\log_2 7+1)\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 7+1+2\log_2 7}.$$

Пусть $\log_2 7=b$, тогда: $\dfrac{(b+1)^2+(b+1)\cdot b-2b^2}{3b+1}=$

$$=\frac{\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b\right)-2b^2}{3b+1}=\frac{3b+1}{3b+1}=1.$$ Ответ: 1.

2. Вычислить $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} + \frac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a}$, если известно, что $\log_a b = 14$.

Решение.

Приведем логарифмы к основанию a:

1) $$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{\log_a\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}\right)}{\log_a\left(\frac{\sqrt{b}}{a^2}\right)} = \frac{\log_a \sqrt{a} - \log_a \sqrt[4]{b}}{\log_a \sqrt{b} - \log_a a^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a b - 2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 14}{\frac{1}{2}\cdot 14 - 2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{7-2} = -\frac{3}{5};$$

2) $$\frac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\log_a\left(b\sqrt{a}\right)}{\log_a\left(\frac{\sqrt{b}}{a^2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\log_a b + \log_a \sqrt{a}}{\log_a \sqrt{b} - \log_a a^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\log_a b + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\log_a b - 2} = \frac{14 + \frac{1}{2}}{4\left(\frac{1}{2}\cdot 14 - 2\right)} = \frac{14,5}{4\cdot(7-2)} = \frac{14,5}{20} = \frac{29}{40};$$

3) $$\frac{-3}{5} + \frac{29}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

3. Сравнить: $\log_2 3$ и $\log_3 4$.

Решение.

$1 < \log_2 3 < 2$, так как $2^1 < 3 < 2^2$.

Умножим неравенство на 2:

$2 < 2\log_2 3 < 4$; $2 < \log_2 9 < 4$.

Очевидно, левую границу можно заменить на 3:

$3 < \log_2 9 < 4$, так как $2^3 < 9 < 2^4$;

$1 < \log_3 4 < 2$, так как $3^1 < 4 < 3^2$.

Умножим неравенство на 2:

$2 < 2\log_3 4 < 4$;

$2 < \log_3 16 < 4$.

Очевидно, правую границу можно заменить на 3:

$2 < \log_3 16 < 3$, так как $3^2 < 16 < 3^3$.

Таким образом, $3 < \log_2 9 < 4$ и $2 < \log_3 16 < 3$.

Следовательно, $\log_2 9 > \log_3 16$,

$\log_2 3^2 > \log_3 4^2$, $2\log_2 3 > 2\log_3 4$,

$\log_2 3 > \log_3 4$.

Ответ: $\log_2 3 > \log_3 4$.

4. Сравнить $\log_{16}17$ и $\log_{17}18$.

Решение.

Вычтем по 1 от каждого из сравниваемых чисел:

$\log_{16}17 - 1$;	$\log_{17}18 - 1$;
$\log_{16}17 - \log_{16}16$;	$\log_{17}18 - \log_{17}17$;
$\log_{16}\frac{17}{16}$;	$\log_{17}\frac{18}{17}$.

Но $\log_{16}\frac{17}{16} > \log_{16}\frac{18}{17} > \log_{17}\frac{18}{17}$.

Таким образом, $\log_{16}\frac{17}{16} > \log_{17}\frac{18}{17}$, откуда $\log_{16}17 - 1 > \log_{17}18 - 1$, то есть $\log_{16}17 > \log_{17}18$.

Ответ: $\log_{16}17 > \log_{17}18$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Упростить:

1) $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$;

2) $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log^2_5 2} - 2^{\log_5 2} \cdot \log_2 16$;

3) $3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}$;

4) $(\log_5 2 + \log_2 5 + 2) \cdot (\log_5 2 - \lg 2) \cdot \log_2 5 - \log_5 2$;

5) $(\log_2 5 + 16\log_5 2 + 8) \cdot (\log_2 5 - 4\log_{80} 5) \cdot \log_5 2 - \log_2 5$;

6) $(\log_5 7 + 9\log_7 5 + 6) \cdot (\log_5 7 - 3\log_{875} 7) \cdot \log_7 5 - \log_5 7$;

7) $\dfrac{2\log^2_3 2 - \log^2_3 18 - (\log_3 2) \cdot (\log_3 18)}{2\log_3 2 + \log_3 18}$;

8) $\dfrac{\log_{35}^2 5-2(\log_{35}5)\cdot(\log_{35}7)-3\log_{35}^2 7}{2(\log_{35}5-3\log_{35}7)}$;

9) $\dfrac{3(\log_5 15)(\log_5 9)-2\log_5^2 15-\log_5^2 9}{\log_5 9-\log_5 15}$.

2. Вычислить:

1) $\log_{\sqrt[4]{ab}}\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\log_{\sqrt[4]{ab}}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$, если $\log_a b=3$;

2) $\log_{ab}\dfrac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}}b+\log_a\sqrt[3]{b}$, если $\log_a b=2$;

3) $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\dfrac{b}{a}\right)+\log_{\sqrt{b}}\left(a\sqrt[3]{b}\right)$, если $\log_b a=9$.

3. Сравнить:

1) $2^{\log_7 3}+0{,}1$ и $3^{\log_7 2}$;

2) $\log_2 7\cdot\log_7 9\cdot\log_9 16$ и π;

3) $5^{\log_3 4}+\cos 1$ и $4^{\log_3 5}+\cos 2$;

4) $7^{\log_5 2}+6^{\frac{1}{3}\log_6 15}$ и $2^{\log_5 7}+\sqrt{6}$;

5) $\log_3 4$ и $\log_4 5$;

6) $\log_{17}18$ и $\log_{18}19$.

Ответы: **1.** 1) 4; 2) 3; 3) 100; 4) 1; 5) 4; 6) 3; 7) –2; 8) $\frac{1}{2}$; 9) 2.

2. 1) 2; 2) 2; 3) 16.

Логарифмические уравнения

Рассмотрим часто встречающиеся типы логарифмических уравнений.

Уравнения, решаемые с помощью определения логарифма

$\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b,\ a>0, a\neq 1.$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3\left(x^2-1\right)=1$.

Решение.

Следуя определению логарифма, заменяем данное уравнение равносильным: $\log_3\left(x^2-1\right)=1;\ x^2-1=3^1;\ x^2=4;\ x=\pm 2.$

Ответ: ± 2.

Пример 2. Решить уравнение $\log_9\left(\cos^2 x+2{,}5\right)=0{,}5$.

Р е ш е н и е .

$\log_9\left(\cos^2 x+2{,}5\right)=0{,}5;\ \cos^2 x+2{,}5=9^{0{,}5};$

$\cos^2 x=3-2{,}5;\ \cos^2 x=\frac{1}{2};\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}};$

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\ x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$

Оба ответа можно объединить:

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}l,\ l\in Z.$

О т в е т : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}l,\ l\in Z.$

Пример 3. Решить уравнение $\log_7\log_3\log_2\log_2 x=0$.

Р е ш е н и е . Пусть $\log_3\log_2\log_2 x=t$, тогда $\log_7 t=0$, откуда $t=7^0$, $t=1$, то есть

$\log_3\log_2\log_2 x=1.$

Пусть $\log_2\log_2 x=u$, тогда $\log_3 u=1$, откуда $u=3$, то есть $\log_2\log_2 x=3$.

Пусть $\log_2 x=v$, тогда $\log_2 v=3$, $v=2^3$, $v=8$.

Имеем: $\log_2 x=8$, $x=2^8=256$.

О т в е т : 256.

Пример 4.

Решить уравнение $\log_{\sqrt[4]{1331}} x=\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{9}{16}\sqrt{\frac{3}{4}}+\ldots\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}.$

Р е ш е н и е . Упростим правую часть.

$\sqrt{\frac{4}{3}};\ \sqrt{\frac{3}{4}};\ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}};\ \frac{9}{16}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}};\ \ldots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, у которой $b_1=\sqrt{\frac{4}{3}},\ q=\frac{3}{4}.$

Найдем ее сумму: $S=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{4}}=4\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}},$ воспользовавшись формулой $S=\frac{b_1}{1-q}.$

Уравнение примет вид:

$$\log_{\sqrt[4]{1331}} x = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6};\ \log_{\sqrt[4]{1331}} x = \frac{4}{3};$$

$$x = \left(\sqrt[4]{1331}\right)^{\frac{4}{3}};\ x = \sqrt[3]{1331};\ x = 11.$$

Ответ: 11.

Пример 5. Решить уравнение $\lg(\arcsin x) = 0$.

Решение. $\lg(\arcsin x) = 0;\ \arcsin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_4\left(\sqrt{x} - 3\right) = 2;$

2. $\log_7\left(x^{-3} + 1\right) = 1;$

3. $\log_{16}\left(\sin^2 2x + 3{,}5\right) = 0{,}5;$

4. $\log_8 \log_2 \log_2 \log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 0;$

5. $\log_4\left(2\log_3\left(1 + \log_2\left(1 + 3\log_2 x\right)\right)\right) = \frac{1}{2};$

6. $\log_{\sin x}(\cos x) = 1;$

7. $\log_2 x = 4\left(2 - \sqrt{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \ldots\right);$

8. $\arccos(\pi \log_3 \operatorname{tg} x) = 0;$

9. $\log_5\left(5^{x+1} - 20\right) = x;$

10. $\log_3 9^{2x-3} = 3^{\log_9 4}.$

Ответы: 1) 361; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n,\ n \in Z$; 4) $-\frac{1}{16}$; 5) 2; 6) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; 7) 256; $\operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}} + \pi n,\ n \in Z$; 8) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in Z$; 9) 1; 10) 2.

Уравнения, решаемые потенцированием

Потенцированием называют переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0,\ a > 0,\ a \neq 1. \end{cases}$$

При этом сначала нужно решить уравнение системы $f(x) = \varphi(x)$, затем по неравенству системы произвести отбор корней.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2(3^x - x - 1) = \log_2(3^x + x - 7)$.

Решение.

$$\begin{cases} 3^x - x - 1 = 3^x + x - 7, \\ 3^x - x - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ 3^3 - 3 - 1 > 0. \end{cases}$$

Ответ: 3.

Пример 2. Решить уравнение $\log_2(3^x - 4) = \log_2(2 - 9^x)$.

Решение.

$$\begin{cases} 3^x - 4 = 2 - 9^x, \\ 3^x - 4 > 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы

$9^x + 3^x - 6 = 0$; $3^x = t$, тогда $t^2 + t - 6 = 0$; $D = 25$;

$t = -3$ или $t = 2$.

Получим $3^x = -3$ (корней нет) или $3^x = 2$, откуда $x = \log_3 2$.

Проверим найденный корень по условию

$3^x - 4 > 0$: $3^{\log_3 2} - 4 = 2 - 4 < 0$.

Следовательно, $x = \log_3 2$ — посторонний корень.

Ответ: корней нет.

Иногда проще сделать проверку найденного корня подстановкой в первоначальное уравнение.

Пример 3. Решить уравнение $2\lg(x - 1) = \lg(1{,}5x + 1)$.

Решение.

$2\lg(x-1) = \lg(1{,}5x+1)$; $\lg(x-1)^2 = \lg(1{,}5x+1)$;

$(x - 1)^2 = 1{,}5x + 1$; $x^2 - 2x + 1 - 1{,}5x - 1 = 0$; $x(x - 3{,}5) = 0$; $x = 0$ или $x = 3{,}5$.

Проверка.

Если $x = 0$, то $2\lg(0 - 1) = 2\lg(-1)$ — не имеет смысла, следовательно, $x = 0$ — посторонний корень.

Если $x = 3{,}5$, то $2\lg(3{,}5 - 1) = \lg(1{,}5 \cdot 3{,}5 + 1)$; $\lg 6{,}25 = \lg 6{,}25$ (верно).

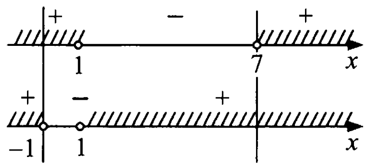
Ответ: 3,5.

Пример 4. Решить уравнение $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$.

Решение.

Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} \frac{x-7}{x-1} > 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > 0. \end{cases}$$



ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

Преобразуем исходное уравнение:

$\log_2 \frac{(x-7)^2}{(x-1)^2} = \log_2 \frac{2(x+1)}{x-1}$; $\frac{(x-7)^2}{(x-1)^2} = \frac{2(x+1)}{x-1}$; $x \neq 1$ по условию.

$(x-7)^2 = 2(x^2 - 1)$; $x^2 - 14x + 49 = 2x^2 - 2$;

$x^2 + 14x - 51 = 0$; $D = 400$, $x = 3$ или $x = -17$.

Корень $x = 3$ не удовлетворяет ОДЗ.

Корень $x = -17$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: -17.

Пример 5.

Решить уравнение $\log_2(-\sin x) - \log_4 \cos x + \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{3}$.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду

$2\log_2(-\sin x) - \log_2 \cos x = 2\log_2 \sqrt{3} - 1$.

Упростим правую часть: $2\log_2 \sqrt{3} - 1 = \log_2 3 - \log_2 2 = \log_2 \frac{3}{2}$.

Далее решим уравнение $\frac{(-\sin x)^2}{\cos x} = \frac{3}{2}$ и выберем множество значений x, для которых выполняются условия $\sin x < 0$, $\cos x > 0$.

$2\sin^2 x = 3\cos x$; $2 - 2\cos^2 x = 3\cos x$; $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$. Пусть $\cos x = t$, тогда $2t^2 + 3t - 2 = 0$;

$D = 9 + 16 = 25$; $t = \frac{-3 \pm 5}{4}$; $t = -2$ или $t = \frac{1}{2}$.

Вернемся к переменной x: $\cos x = -2$ (уравнение не имеет решений) или $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} > 0, \\ \sin x < 0; \end{cases}$

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ (рис. 19).

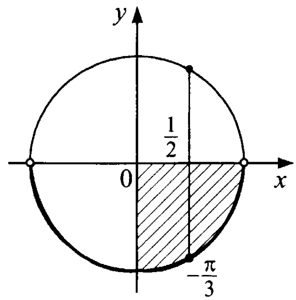


Рис. 19

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) = 1$;

2. $\log_{0,5}(x+2) + \log_{0,5}(x+3) = \log_{0,5} 3 - 1$;

3. $\log_3(-\cos x) - \log_9 \sin x + \frac{1}{4} = -\log_9 2$;

4. $\lg \sin x = \lg \cos x$;

5. $\log_7(\sin 3x + \sin x) = \log_7(-\sin 2x)$;

6. $\lg 5 - \lg(x-3) = 1 - \frac{1}{2}\lg(3x+1)$;

7. $\lg\sqrt{2x-4} - \lg\sqrt{x+1} - \lg\sqrt{x+5} - \lg 2 = 0$;

8. $0,(3) \cdot \lg\left(36 + 2^{\sqrt{x}}\right) - \lg 2 = \lg\sqrt[3]{12,5}$;

9. $\lg|2x-3| - \lg|3x-2| = 1$;

10. $\lg\left(0,2 \cdot \sqrt{3^{x+2}} - 50\right) - \lg\left(3^{\frac{x}{2}} + 715\right) = -1$.

Ответы: 1) 5; 2) 0; 3) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; 5) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 6) 5; 7) нет корней; 8) 36; 9) $\frac{27}{28}; \frac{23}{32}$; 10) 10.

Уравнения, решаемые подстановкой

При решении уравнений этого типа нужно обратить внимание на примеры подобных стандартных преобразований:

1. $\lg^2 x^3 = \left(\lg x^3\right)^2 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x$;
2. $\lg^3 x^4 = \left(\lg x^4\right)^3 = (4\lg|x|)^3 = 64\lg^3|x|$;
3. $\lg^n x^k = k^n \lg^n|x|$, k — четное;
4. $\lg^3 \sqrt{x} = \left(\lg\sqrt{x}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\lg x\right)^3 = \frac{1}{8}\lg^3 x$;
5. $\lg^4 \sqrt[3]{x} = \left(\frac{1}{3}\lg x\right)^4 = \frac{1}{81}\lg^4 x$.

Рассмотрим ряд уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 3 = 0$.

Решение.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда $2t^2 - 5t + 3 = 0$; $t = 1$ или $t = \frac{3}{2}$. Имеем: $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = \frac{3}{2}$, откуда $x = 3$ или $x = 3\sqrt{3}$.

Ответ: 3; $3\sqrt{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $3\log_3^2 x^2 - 8\log_3(-x) - 4 = 0$.

Решение.

$\log_3^2 x^2 = 4\log_3^2|x|$, но так как по условию $x < 0$, то $|x| = -x$.

Таким образом, $12\log_3^2(-x) - 8\log_3(-x) - 4 = 0$.

Пусть $\log_3(-x) = t$, тогда уравнение примет вид $12t^2 - 8t - 4 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = -\frac{1}{3}$.

Имеем: $\log_3(-x) = 1$ или $\log_3(-x) = -\frac{1}{3}$,

$-x = 3^1$ или $-x = 3^{-\frac{1}{3}}$, $x = -3$ или $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Ответ: -3; $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

Р е ш е н и е.

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $t^2 + (x-1)t - (6-2x) = 0$.

Решим это уравнение как квадратное относительно t:

$D = (x-1)^2 + 4(6-2x) = x^2 - 2x + 1 + 24 - 8x = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$,

$$t = \frac{1 - x \pm (x-5)}{2}.$$

Отсюда $t = -2$ или $t = -x + 3$.

Имеем: $\log_2 x = -2$ или $\log_2 x = -x + 3$.

Решим первое уравнение: $x = 2^{-2}$; $x = \frac{1}{4}$.

В левой части второго уравнения находится возрастающая функция; в правой части — убывающая. Следовательно, если это уравнение имеет корень, то он будет единственным. Этот корень равен 2.

О т в е т: $\frac{1}{4}$; 2.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} = 2\log_2 \sqrt{x} - 1 + \log_2^2 x$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 x - 1 + \log_2^2 x.$$

Значение $x = 2$ не является корнем уравнения, так как знаменатель дроби исходного уравнения при $x = 2$ обращается в ноль. При $\log_2 x = t$ уравнение примет вид:

$t^2 + t - 2 = 0$,

$t = -2$ или $t = 1$ (посторонний корень).

Из уравнения $\log_2 x = -2$ находим $x = 2^{-2}$, $x = \frac{1}{4}$.

О т в е т: $\frac{1}{4}$.

Пример 5. Решить уравнение $\log_4 x^2 + \log_{x^6} 64 = 2$.

Р е ш е н и е.

Данное уравнение равносильно уравнению $\log_2 |x| + \log_{|x|} 2 = 2$.

Пусть $\log_2 |x| = t$, тогда $\log_{|x|} 2 = \frac{1}{t}$; $t + \frac{1}{t} = 2$; $t^2 - 2t + 1 = 0$; $t = 1$;

$\log_{|x|} 2 = 1$; $|x| = 2$; $x = \pm 2$.

О т в е т: ± 2.

Пример 6.

Решить уравнение $\sqrt{\log_2\left(x^2-14x+49\right)^8}+6\log_4\sqrt{14-2x}=7.$

Решение.

В данном уравнении $x<7$, так как $14-2x>0$. Преобразуем подкоренное выражение следующим образом:

$$\log_2\left(x^2-14x+49\right)^8=16\log_2|x-7|=16\log_2(7-x).$$

Следовательно, уравнение примет вид:

$$4\sqrt{\log_2(7-x)}+6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\log_2 2+\log_2(7-x)\right)=7;$$

$$8\sqrt{\log_2(7-x)}+3\log_2(7-x)-11=0.$$

Обозначив $\sqrt{\log_2(7-x)}$ через y, получим $3y^2+8y-11=0$, откуда $y=1$. Далее имеем $\sqrt{\log_2(7-x)}=1$, $x=5$.

Ответ: 5.

Рассмотренные примеры показали, что применение равенств

$$\log_a\left(f(x)\right)^{2k}=2k\log_a\left|f(x)\right|\left(k\in Z,\ k\neq 0\right)$$

и $\log_{(\varphi(x))^{2k}}f(x)=\frac{1}{2k}\log_{|\varphi(x)|}f(x)$ приводит к равносильному уравнению, так как левая и правая части равенств определены при одних и тех же значениях x.

Пример 7. Решить уравнение $\log_{2x}x=\log_{\frac{8}{x}}x.$

Решение. При переходе к новому основанию логарифма, содержащему переменную, могут быть как приобретены посторонние корни, так и потеряны.

Если при решении уравнения применяется формула $\log_{g(x)}f(x)=\dfrac{\log_{h(x)}f(x)}{\log_{h(x)}g(x)}$, то могут быть потеряны корни, при которых $h(x)\le 0$ или $h(x)=1$.

По этой причине если мы в исходном уравнении перейдем к основанию x, то получим уравнение $\dfrac{1}{\log_x(2x)}=\dfrac{1}{\log_x\frac{8}{x}}$, для которого $x=1$ — посторонний корень. Произошла потеря корня исходного уравнения.

Перейдем к основанию 2 и получим уравнение

$$\frac{\log_2 x}{\log_2(2x)}=\frac{\log_2 x}{\log_2\left(\frac{8}{x}\right)},\quad \frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}=\frac{\log_2 x}{3-\log_2 x}.$$

Пусть $\log_2 x=y$, тогда $y\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{3-y}\right)=0$; откуда $y=0$ или

$\frac{1}{1+y}=\frac{1}{3-y}$, $3-y=1+y, y\neq 3, y\neq -1; y=1$.

При $y=0$ $\log_2 x=0$, $x=1$. При $y=1$ $\log_2 x=1$, то есть $x=2$.

Ответ: 1; 2.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_x 5\sqrt{5}-1{,}25=\log_x^2\sqrt{5}$;

2. $\frac{1-\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x}=\lg x^4+5$;

3. $\frac{\lg(6-x)}{2}=\frac{1}{3\lg(6-x)-1}$;

4. $(\lg x)^2-\lg x^3+2=0$;

5. $\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=-1$;

6. $\lg^2 x-\lg x^4=\lg^2 5-4$;

7. $\lg^2 x+\lg x+1=\frac{7}{\lg\frac{x}{10}}$;

8. $\lg^2 x^3-10\lg x+1=0$;

9. $27\lg^3\sqrt[3]{5x}=\lg(5x)$;

10. $\lg^3 36x^2=8\lg(6x)$.

Ответы: **1)** 5; $\sqrt[5]{5}$. **2)** $\sqrt[4]{10}$. **3)** $6-\sqrt[3]{0{,}01}$; 4. **4)** 10 и 100. **5)** 1010. **6)** 20 и 500. **7)** 100. **8)** $\sqrt[9]{10}$ и 10. **9)** $\frac{1}{5}$; 2; $\frac{1}{50}$. **10)** $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{1}{60}$.

Уравнения, решаемые логарифмированием

Уравнения вида $x^{\lg x}=100$; $x^{\log_3 x-1}=9$; $x^{\sqrt[3]{x}}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^x$ и т.п. решаются, как правило, логарифмированием обеих частей. Если в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения логарифмируются по тому основанию, которое содержится в основании логарифма, находящемся в показателе степени.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}$.

Р е ш е н и е .

Область допустимых значений неизвестного определяется неравенством $x > 0$. Считая, что x принадлежит этой области, можно обе части логарифмировать, например, по основанию 10: $\left(2\lg^3 x - 1{,}5\lg x\right)\cdot\lg x = \frac{1}{2}$.

Обозначив $\lg x = t$, получим: $4t^4 - 3t^2 - 1 = 0$. Решив биквадратное уравнение, найдем значения t: $t = \pm 1$. Таким образом, $\lg x = 1$ или $\lg x = -1$; $x = 10$ или $x = 0{,}1$.

О т в е т : 10; 0,1.

Пример 2. Решить уравнение $0{,}1^{-\lg(20-2x)} = 2$.

Р е ш е н и е .

Область допустимых значений неизвестного x определяется неравенством $x < 10$.

$$\lg\left(0{,}1^{-\lg(20-2x)}\right) = \lg 2;$$

$$-\lg(20-2x)\cdot\lg 0{,}1 = \lg 2;$$

$$\lg(20-2x) = \lg 2;\ 20 - 2x = 2;\ x = 9.$$

Проверка подтверждает, что значение 9 есть корень данного уравнения.

О т в е т : 9.

Пример 3. Решить уравнение $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} = x^{-1}$.

Р е ш е н и е .

Область допустимых значений неизвестного x определяется неравенством $x > 0$. Считая, что x принадлежит этой области, выполним следующие преобразования:

$$\log_2\left(x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3}\right) = \log_2 x^{-1};$$

$$\left(3\log_2 x - \log_2^2 x + 3\right)\cdot\log_2 x = -\log_2 x.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $t^3 - 3t^2 - 4t = 0$; откуда $t = 0$, или $t = -1$, или $t = 4$.

Получим

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = 0,\\ \log_2 x = -1,\\ \log_2 x = 4;\end{array}\right. \qquad \text{или} \qquad \left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = \frac{1}{2},\\ x = 16.\end{array}\right.$$

Проверка подтверждает, что 1, $\frac{1}{2}$ и 16 есть корни данного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 1; 16.

Пример 4. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Решение.

Область допустимых значений определяется неравенством $x > 0$. Считая, что x принадлежит этой области, можно обе части прологарифмировать:

$$\sqrt{x}\lg x = \frac{1}{2}x\lg x;\ \frac{1}{2}\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)\lg x = 0.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l}\lg x = 0,\\ \sqrt{x} = 0,\\ 2-\sqrt{x} = 0;\end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = 0,\\ x = 4.\end{array}\right.$$

Значение неизвестного $x = 0$ не удовлетворяет уравнению, так как 0^0 не имеет смысла. Проверка подтверждает, что значения неизвестного 1 и 4 являются корнями уравнения.

Ответ: 1 и 4.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-3)} = 4;$

2. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9;$

3. $4^{\log_2^3 x} = x^{1+\log_2 x};$

4. $x^{\lg(25x)} = 16;$

5. $x^{\log_6 x} = 3\cdot 2^{3\log_6 x-2};$

6. $\left(\sqrt{x}\right)^{\lg x} = \sqrt{100x};$

7. $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} = 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x};$

8. $\left(\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{\log_2 x}} = x,$ указать меньший корень;

9. $(x+1)^{\log_2^3(x+1)} = 2,$ указать меньший корень;

10. $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}.$

О т в е т ы : **1)** 5. **2)** 5. **3)** 1; 2; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4)** 0,01; 4. **5)** $\frac{4}{3}$; 6. **6)** 0,1; 100. **7)** $4^{-\sqrt{2}}$; $4^{\sqrt{2}}$. **8)** 1. **9)** –0,5. **10)** 1000; 0,00001.

Уравнения вида $\log_{f(x)} a = b$

Это уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^{\frac{1}{b}}$ при $a \neq 1$.

Пример 1. Решить уравнение $\log_x \sqrt[3]{4} = 0{,}1(6)$.

Р е ш е н и е . Область допустимых значений определяется системой $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Преобразуем правую часть уравнения: 0,1666… = α. Умножим обе части этого равенства на 100 и на 10:

$$16{,}666\ldots = 100\alpha; \qquad (1)$$

$$1{,}666\ldots = 10\alpha. \qquad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2):

$15 = 90\alpha$, откуда $\alpha = \frac{1}{6}$.

Таким образом, $\log_x \sqrt[3]{4} = \frac{1}{6}$, $x = \left(\sqrt[3]{4}\right)^6$; $x = 16$ — удовлетворяет ОДЗ.

О т в е т : 16.

Пример 2. Решить уравнение $\log_x 8\sqrt[5]{0{,}25} = \frac{13}{5}$.

Р е ш е н и е . Область допустимых значений определяется системой $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$x = \left(8 \cdot \sqrt[5]{0{,}25}\right)^{\frac{5}{13}}$, $x = \left(2^3 \cdot 2^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{13}}$; $x = 2$ — удовлетворяет ОДЗ.

О т в е т : 2.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x^2+6x} 1 = 3$.

Р е ш е н и е . Уравнение не имеет корней, так как логарифм единицы должен быть равен нулю.

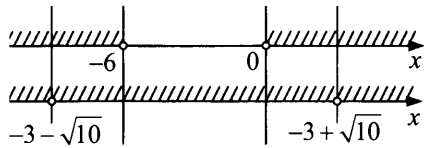
О т в е т : корней нет.

Пример 4. Решить уравнение $\log_{x^2+6x} 1 = 0.$

Решение.

Решением данного уравнения будет любое значение x из ОДЗ уравнения.

$\begin{cases} x^2+6x>0, \\ x^2+6x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0, \\ x^2+6x-1 \neq 0. \end{cases}$



$x^2+6x-1 \neq 0,$

$x \neq -3 \pm \sqrt{10}.$

Ответ:

$\left(-\infty; -3-\sqrt{10}\right) \cup \left(-3-\sqrt{10}; -6\right) \cup \left(0; -3+\sqrt{10}\right) \cup \left(-3+\sqrt{10}; +\infty\right).$

Упражнения для самостоятельного решения

1. $2\log_{2x} 2 = 1;$
2. $\log_x 36\sqrt[3]{36} = 2,(6);$
3. $\log_x 2401 = 4;$
4. $\log_x 225 = \frac{2}{3};$
5. $\log_x 0{,}125 = 1{,}25;$
6. $\log_x \left(\sqrt[4]{500}\right)^3 = \frac{3}{4};$
7. $\log_x 256 = 4 \cdot \left(2-\sqrt{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\ldots\right);$
8. $\log_{x+5} 5 = 3;$
9. $\log_{x^2+6x+5} 1 = 0;$
10. $\log_{x-2} 1 = 0.$

Ответы: 1) 2; 2. 2) 6. 3) 7. 4) 3375. 5) 16. 6) 500. 7) 2. 8) решений нет. 9) $\left(-\infty; -3-\sqrt{5}\right) \cup \left(-3-\sqrt{5}; -5\right) \cup \left(-1; -3+\sqrt{5}\right) \cup (-3+\sqrt{5}; +\infty).$ 10) $(2; 3) \cup (3; +\infty).$

Уравнения, решаемые с использованием различных свойств логарифмов

Пример 1. Решить уравнение $9^{\log_3 \lg x} = \lg x - 2\lg^2 x + 4.$

Решение. Применим формулу

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}\ (a>0, b>0, c>0, c \neq 1).$ Получим

$(\lg x)^{\log_3 9} = \lg x - 2\lg^2 x + 4;$

$\lg^2 x = \lg x - 2\lg^2 x + 4;$ $3\lg^2 x - \lg x - 4 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=-1,\\ \lg x=\dfrac{4}{3},\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=0{,}1;\\ x=10\sqrt[3]{10}.\end{array}\right.$$

Подставив эти значения x в исходное уравнение, увидим, что $10\sqrt[3]{10}$ — корень уравнения, а 0,1 — нет.

О т в е т: $10\sqrt[3]{10}$.

Пример 2. Решить уравнение $3\log_{3x} x=2\log_{9x} x^2$.

Р е ш е н и е. Используя формулу

$\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}\left(a>0,\ b>0,\ c>0,\ b\neq 1,\ c\neq 1\right)$, приведем логарифмы к основанию 3:

$$3\cdot\frac{\log_3 x}{1+\log_3 x}=2\cdot\frac{2\log_3 x}{2+\log_3 x}.$$

Пусть $\log_3 x=y$, тогда $\dfrac{3y}{1+y}=\dfrac{4y}{2+y}$;

$6y+3y^2=4y+4y^2;\ y^2-2y=0;$

$$\left[\begin{array}{l}y=0,\\ y=2,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\log_3 x=0,\\ \log_3 x=2,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=9.\end{array}\right.$$

Проверка подтверждает, что значения $x_1=1$ и $x_2=9$ — корни данного уравнения.

О т в е т: 1; 9.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{49}\left(2x^2+x-5\right)+\log_{\frac{1}{7}}(1+x)=0$.

Р е ш е н и е. Используя формулу

$\log_{b^n} a=\dfrac{1}{n}\log_b a\left(a>0,\ b>0,\ b\neq 1\right)$, получим

$$\frac{1}{2}\log_7\left(2x^2+x-5\right)-\log_7(1+x)=0;$$

$$\log_7\left(2x^2+x-5\right)=2\log_7(1+x);$$

$$\log_7\left(2x^2+x-5\right)=\log_7(1+x)^2;$$

$2x^2+x-5=1+2x+x^2;\ x^2-x-6=0;$

$\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-2.\end{array}\right.$ $x=-2$ — посторонний корень, так как выражение $\log_{\frac{1}{7}}(1+x)$ теряет смысл при $x=-2$.

Проверка подтверждает, что число 3 — корень уравнения.

О т в е т: 3.

Пример 4. Решить уравнение $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

Р е ш е н и е . Область допустимых значений определяется неравенством $x > 0$.

Считая, что x принадлежит этой области, выполним следующие преобразования:

$$\left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12;\ \ x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12;\ \ x^{\log_6 x} = 6;$$

$\log_6^2 x = \log_6 6$; $\log_6^2 x = 1$; откуда

$$\left[\begin{array}{l} \log_6 x = 1, \\ \log_6 x = -1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 6; \\ x = \dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Оба значения входят в область определения.

Проверка подтверждает, что 6 и $\frac{1}{6}$ корни данного уравнения.

О т в е т : $\frac{1}{6}$; 6.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_x \sqrt[3]{9} + 2\log_x\left(x\sqrt[3]{3}\right) + \left(\log_x \sqrt[3]{81}\right)^2 = 22$;

2. $\log_3 x^2 + \log_{x^4} 27 = 2{,}5$;

3. $\log_{|x|}\left(x^2 - 2x\right) - \log_{|x|} \dfrac{x-2}{x} = 2$;

4. $\log_6\left(x^2 + 9\right) - \log_6 x = 6x - x^2 - 8$;

5. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;

6. $\log_6\left(2^{\sqrt{x}+1} - 3\right) = \log_6 \log_{\sqrt[3]{3}} 9^{\frac{1}{3}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\log_6 4$;

7. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x + \log_2^2 x = \dfrac{1}{2}\log_x x$;

8. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x - 2 = 0$;

9. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$;

10. $\log_2 (x+2)^2 + \log_2 (x+10)^2 = 4\log_2 3$.

О т в е т ы : 1) $3^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{4}{15}}$. 2) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt[4]{27}$.

3) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$. 4) 3. 5) $2^{\sqrt{2}}; 2^{-\sqrt{2}}$. 6) 1. 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 1.

8) $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. 9) $\frac{1}{2};\frac{1}{8}$. 10) $-11; -1; -6\pm\sqrt{7}$.

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Решение таких неравенств сводится к решению одной из систем, равносильной данному неравенству в области допустимых значений неизвестного:

$$\begin{cases} a>1, \\ f(x)>g(x), \\ g(x)>0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<a<1, \\ f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{0,4}(2x-5)>\log_{0,4}(x+1)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0<0,4<1, \\ 2x-5<x+1, \\ 2x-5>0. \end{cases} \quad \begin{cases} x<6, \\ x>2,5, \end{cases} \text{ или } 2,5<x<6.$$

Ответ: (2,5; 6).

Пример 2. Решить неравенство $\log_5(3x-1)>\log_5(2x+3)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5>1, \\ 3x-1>2x+3, \\ 2x+3>0. \end{cases} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>-1,5; \end{cases} \text{ откуда } x>4.$$

Ответ: $(4;+\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_{0,4}(2x-5)>\log_{0,4}(x+1)$.

2. $\log_4(3x-1)>\log_4(2x+3)$.

3. $\lg(2x-3)>\lg(x+1)$.

4. $\log_{0,3}(2x-4)>\log_{0,3}(x+1)$.

5. $\log_{0,5} x>\log_2(3-2x)$.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(4x-7)>\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

Ответы: 1) (2,5; 6); 2) (4; $+\infty$); 3) (4; $+\infty$); 4) (2; 5); 5) (0; 1); 6) $(1\frac{3}{4}; 3)$.

Неравенства вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

Эти неравенства равносильны одной из систем:

$$\begin{cases} a > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

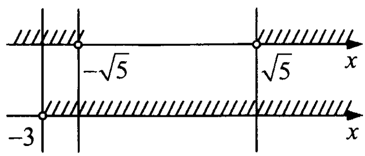
Решим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{0,1}\left(x^2 + x - 2\right) < \log_{0,1}(x+3)$.

Р е ш е н и е.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < 0,1 < 1, \\ x^2 + x - 2 > x + 3, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 > 5, \\ x > -3, \end{cases} \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} -3 < x < -\sqrt{5}, \\ x > \sqrt{5}. \end{array}\right.$$



О т в е т : $\left(-3; -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\log_{\sqrt{10}}(x+4) < \log_{\sqrt{10}}\left(x^2 - x - 20\right)$.

Р е ш е н и е.

Данное неравенство равносильно системе

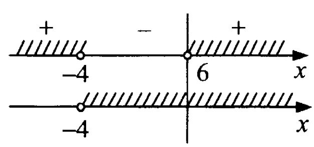
$$\begin{cases} \sqrt{10} > 1, \\ x^2 - x - 20 > x + 4, \\ x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 24 > 0, \\ x > -4. \end{cases}$$

Решим уравнение

$x^2 - 2x - 24 = 0$;

$x = 1 \pm 5$.

Поэтому $\begin{cases} (x+4)(x-6) > 0, \\ x > -4. \end{cases}$



О т в е т : $(6; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$.
2. $\log_{0,5}(x+4) < \log_{0,5}(x^2-x-20)$.
3. $\log_{0,4}(x+1) < \log_{0,4}(2x-5)$.
4. $\lg(3x-7) \le \lg(x+1)$.
5. $\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \le \log_2 x$.

Ответы: 1) $(\frac{1}{3};4)$; 2) $(5; 6)$; 3) $(2,5; 6)$; 4) $(2\frac{1}{3};4]$; 5) $\left(\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right]$.

Неравенства вида $\log_{g(x)}f(x) > a$ или $\log_{g(x)}f(x) < a$

Решение каждого из неравенств сводится к решению двух систем, равносильных данному неравенству в области допустимых значений неизвестного.

Для неравенства $\log_{g(x)} f(x) > a$ имеем:

$$\begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > (g(x))^a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ 0 < f(x) < (g(x))^a. \end{cases}$$

Для неравенства $\log_{g(x)} f(x) < a$ имеем:

$$\begin{cases} g(x) > 1, \\ 0 < f(x) < (g(x))^a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > (g(x))^a. \end{cases}$$

Решим далее несколько неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{x-3}\left(x^2-4x+3\right) < 0$.

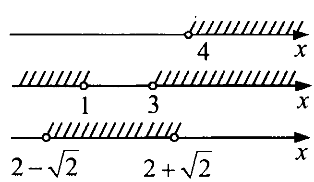
Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x-3 > 1, \\ x^2-4x+3 > 0, \\ x^2-4x+3 < 1; \end{cases} \text{ или б) } \begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ x^2-4x+3 > 1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x > 4, \\ x^2-4x+3 > 0, \\ x^2-4x+2 < 0. \end{cases}$$



$x^2 - 4x + 3 = 0;$

$x_1 = 1$ или $x_2 = 3.$

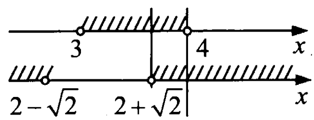
$x^2 - 4x + 2 = 0;$

$x_{1,\,2} = 2 \pm \sqrt{2}.$

Система решений не имеет.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x^2 - 4x + 2 > 0. \end{cases}$$



Откуда $2 + \sqrt{2} < x < 4.$

О т в е т : $(2 + \sqrt{2}; 4).$

Пример 2. Решить неравенство $\log_{x^2-x-5}(x+2) > 0.$

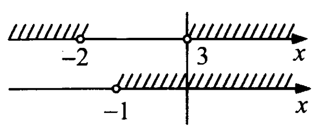
Р е ш е н и е .

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - x - 5 > 1, \\ x + 2 > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < x^2 - x - 5 < 1, \\ 0 < x + 2 < 1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x > -1; \end{cases}$$



$x^2 - x - 6 = 0;$

$D = 25;$

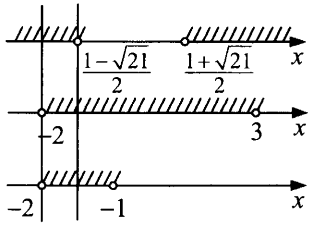
$x = 3$ или $x = -2.$

Следовательно, $x > 3.$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 0 < x^2 - x - 5 < 1, \\ 0 < x + 2 < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 5 > 0, \\ x^2 - x - 5 < 1, \\ -2 < x < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 5 > 0, \\ x^2 - x - 6 < 0, \\ -2 < x < -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) > 0, \\ (x-3)(x+2) < 0, \\ -2 < x < -1. \end{cases}$$



Следовательно, $-2 < x < \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\left(-2; \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_{x^2}(2+x) < 1$.

2. $\log_x \dfrac{2x+0,4}{5(1-x)} > 0$.

3. $\log_{x-1}(1+2x^4-x^6) > 0$.

4. $\log_{0,2x}(x^2-8x+16) \geq 0$.

5. $\log_x \dfrac{8-12x}{x-6} \geq 5$.

Ответы: 1. $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$; 2. $(0; \frac{23}{25})$; 3. $(1; \sqrt{2})$; 4. $[3;\ 4)\cup(4;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$; 5. $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup [2; 6)$.

Неравенства, решаемые с помощью введения новой переменной

Пример 1. Решить неравенство $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$.

Решение.

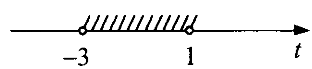
$\lg^2(-x) + 2\lg|x| - 3 < 0$. Так как по условию $x < 0$, то $|x| = -x$.

Следовательно, $\lg^2(-x) + 2\lg(-x) - 3 < 0$.

Пусть $\lg(-x) = t$, тогда неравенство примет вид:

$t^2 + 2t - 3 < 0$, $t^2 + 2t - 3 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -3, \end{array}\right.$ $-3 < t < 1$.



Вернемся к переменной x:

$-3 < \lg(-x) < 1$,

$10^{-3} < -x < 10^1$, $0{,}001 < -x < 10$.

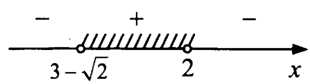
Ответ: $(-10; -0{,}001)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_2 \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > -1$.

Решение. Пусть $\log_2 \dfrac{x-1}{2-x} = y$, тогда неравенство примет вид: $\log_2 y > -1$, откуда $y > 2^{-1}$, $y > \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, $\log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > \dfrac{1}{2}$, откуда $\dfrac{x-1}{2-x} > 2^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{x-1}{2-x} > \sqrt{2},\ \frac{x-1}{2-x} - \sqrt{2} > 0,\ \frac{x\left(1+\sqrt{2}\right)-1-2\sqrt{2}}{2-x} > 0.$$



Решениями этого неравенства будут все значения x из промежутка $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} < x < 2$.

Упростим выражение

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4}{1-2} = 3-\sqrt{2}.$$

Ответ: $(3-\sqrt{2}; 2)$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{\lg^2 x - \lg x - 4}{\lg x - 1} > 1$.

Решение.

Пусть $\lg x = a$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{a^2-a-4}{a-1} > 1,\ \frac{a^2-a-4}{a-1} - 1 > 0,\ \frac{a^2-2a-3}{a-1} > 0,\ \frac{(a+1)(a-3)}{a-1} > 0.$$

Таким образом, $-1 < a < 1$ или $a > 3$.

Возвращаясь к переменной x, получим:

$-1 < \lg x < 1$ или $\lg x > 3$;

$0{,}1 < x < 10$ или $x > 1000$.

Решением данного неравенства будут все значения x из промежутка $(0{,}1; 10)$ и все значения x из промежутка $(1000; +\infty)$.

Ответ: $(0{,}1; 10) \cup (1000; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\lg^2(-x)+\lg x^2-3<0$.

2. $\log_2 x-2\log_x 2+1\ge 0$.

3. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$.

4. $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-\dfrac{5}{2}$.

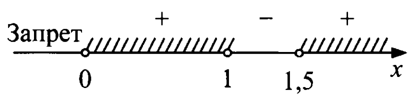
5. $\log_{\frac{x}{2}} 8+\log_{\frac{x}{4}} 8<\dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$.

Ответы: 1) $(-10;\,-0{,}001)$; 2) $[0{,}25;\,1)\cup[2;\,+\infty)$; 3) $(0;\,0{,}5)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$; 4) $(0;\,1)\cup(\sqrt{3};9)$; 5) $(0;\,2)\cup(4;\,+\infty)$.

Неравенства, решаемые методом интервалов

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{2x-3}{\log_2 x}>0$.

Решение. Решим данное неравенство на области допустимых значений: $\begin{cases}x>0,\\ x\ne 1.\end{cases}$



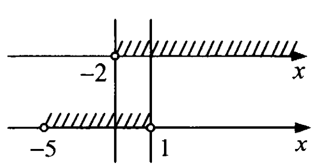
Ответ: $(0;1)\cup(1{,}5;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{\log_{0,1}(x+2)}{\sqrt{5-4x-x^2}}\le 0$.

Решение. Найдем область допустимых значений:

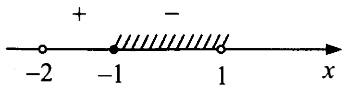
$\begin{cases}x+2>0,\\ 5-4x-x^2>0;\end{cases}$

$\begin{cases}x>-2,\\ x^2+4x-5<0;\end{cases}$



Областью допустимых значений являются все значения x из интервала $(-2;\,1)$.

Числитель дроби обращается в ноль при $x=-1$, так как $\log_{0,1}(-1+2)=\log_{0,1}1=0$.



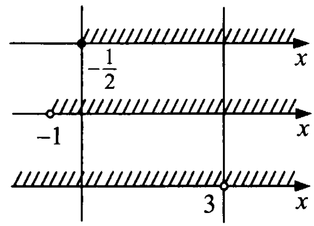
Если $x = 0$, то $\frac{\log_{0,1} 2}{\sqrt{5}} < 0$.

О т в е т : $[-1;\, 1)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2x+1}}{2+\log_{0,5}(x+1)} \ge 0$.

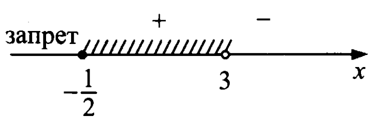
Решение. Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0, \\ x+1 > 0, \\ 2+\log_{0,5}(x+1) \ne 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2}, \\ x > -1, \\ x \ne 3. \end{cases}$$



ОДЗ: $\left[-\frac{1}{2};\, 3\right) \cup (3;\, +\infty)$.

Решим неравенство методом интервалов на ОДЗ.



Если $x = 7$, то $\log_{0,5} 8 = -3$.

О т в е т : $\left[-\frac{1}{2};\, 3\right)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\frac{\sqrt{x+3}}{\log_4 x^2} \ge 0$.

2. $\frac{2x-3}{\log_2 x} > 0$.

3. $\frac{3x-2}{\log_{0,5} x} < 0$.

4. $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \le 0$.

5. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \ge 0$.

О т в е т ы : 1) $[-3;\, -1) \cup (1;\, +\infty)$; 2) $(0;\, 1) \cup (1,5;\, +\infty)$; 3) $(0; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$; 4) $[\log_3 0,9;\, 2)$; 5) $(4+\sqrt{2};\, +\infty) \cup \{5\}$.

Контрольные работы

Вариант № 1

1. Решить уравнение:

а) $2\log_2\frac{x-7}{x-1}+\log_2\frac{x-1}{x+1}=1;$

б) $2\log_8(2x)+\log_8\left(x^2+1-2x\right)=\frac{4}{3};$

в) $\log_{3-4x^2}\left(9-16x^4\right)=2+\frac{1}{\log_2\left(3-4x^2\right)};$

г) $2+\lg\left(4+x^2+4x\right)-\lg\left(36+x^2\right)=2\lg(2+x);$

д) $\sqrt{4+2\log_2\left(1-\frac{8x}{(1+2x)^2}\right)}=\log_2\frac{2x+1}{2x-1}+2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}};$

е) $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4;$

ж) $x^{2\lg x}=10x^2;$

з) $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x-1}=5.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{(x-3)}\left(2\left(x^2-10x+24\right)\right)\geq\log_{(x-3)}\left(x^2-9\right);$

б) $\frac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{(x+1)}3}<\log_3(2x-3);$

в) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-1;$

г) $\log_{x^2+2x-3}\frac{|x+4|-|x|}{x-1}>0.$

Вариант № 2

1. Решить уравнение:

а) $\lg(x+1{,}5)=-\lg x;$

б) $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=\frac{\log_8 x-1}{\lg_8^2 x+\log_8\frac{x}{8}-\frac{1}{\log_x^2 8}};$

в) $\log_{x+2} 3 = 2;$

г) $\log_2(3x-1) - \log_2(2x-1) = \log_2(5x+3) - \log_2(3x+1);$

д) $4\log_4^2(-x) + 2\log_4(x^2) = -1;$

е) $x^{2\lg^2 x} = 10x^3;$

ж) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{0,5}(x+3) < \log_{0,25}(x+15);$

б) $\log_x\left(-x^2 + x + 2\right) + 1 < \dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}};$

в) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0;$

г) $(x-2)\log_{\sqrt{6}}\left(x^2 - 5x\right) > 2x - 4.$

Вариант № 3

1. Решить уравнение:

а) $\log_x\left(2x^2 - 4x + 3\right) = 2;$

б) $\lg\left(\sqrt{6+x} + 6\right) = \dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10};$

в) $\lg 8 - \lg\sqrt{x+6} = \lg 16 - \lg(x-2);$

г) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11;$

д) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{\lg x + 1};$

е) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1;$

ж) $\log_2\left(4^x + 4\right) = x + \log_2\left(2^{x+1} - 3\right);$

з) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{0,5}^{\ 2} x + \log_{0,5} x - 2 \le 0;$

б) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0;$

в) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1);$

г) $\log_3\left(4^x + 1\right) + \log_{4^x+1} 3 > 2,5.$

Вариант № 4

1. Решить уравнение:

а) $2\log_2 x + \log_2(3-x) = 1;$

б) $\log_{2x}(6x-8) = 1;$

в) $\log_x \sqrt[3]{9} + 2\log_x\left(x\sqrt[3]{3}\right) + \left(\log_x \sqrt[3]{81}\right)^2 = 22;$

г) $2^{|\log_2 x|} = 3;$

д) $(2x-3)^{\sqrt{2x-3}} = \left(\sqrt{2x-3}\right)^{2x-3};$

е) $\log_{x^2+6x} 1 = 3;$

ж) $\log_3 x \log_4 x \log_5 x = \log_3 x \log_4 x + \log_4 x \log_5 x + \log_5 x \log_3 x;$

з) $\left(x^2 \log_2 27\right) \cdot \log_9 x = x + 4.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(|x-2|-3\right) > 0;$

в) $\log_{x-3}\left(x^2-4x+3\right) < 0;$

б) $\log_2 \dfrac{(x-3)^2}{3x-1} < 1;$

г) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 \ge 0.$

Вариант № 5

1. Решить уравнение:

а) $\log_3\left(\sqrt{x-2}+1\right) + \left(x + \sqrt{x^2 - \log_3(\sqrt{x-2}+1)}\right) \times$

$\times\left(x^2 - 9x + 7 + \sqrt{x^2 - \log_3\left(\sqrt{x-2}+1\right)}\right) = 0;$

б) $\sqrt{\log_2\left(2x^2\right) \cdot \log_4(16x)} = \log_4 x^3;$

в) $\left(1 + \log_x \dfrac{4-x}{10}\right) \cdot \lg x = \lg\lg 10^3 - 1;$

г) $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$

д) $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2-2x-3} - x\log_{\frac{1}{6}}\left(5x^2-2x-3\right) = x^2 + 2x;$

е) $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100;$

ж) $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3 \dfrac{x}{3}}-2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3;$

з) $0{,}1^{-\lg(20-2x)}=2.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_3\log_2\log_2\dfrac{x-1}{x+5}>0;$

б) $\left|2^x-2\right|-\left|\log_3 x-1\right|<2^x+\log_3 x-2;$

в) $\log_{2-\sin\pi x}\left(x^3+2x^2\right)\le 2\log_{0,(6)}2^{5x}-\log_{\frac{2}{3}}2^{10x};$

г) $\log_x\left(x^3+1\right)\log_{x+1}x>2.$

Вариант № 6

1. Решить уравнение:

а) $\log_{3x^2+2}\left(x^2-4\right)=\log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right);$

б) $\log_3\left(\log_{0,5}{}^2 x-3\log_{0,5}x+5\right)=2;$

в) $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10};$

г) $\log_2^2 x^2-2\log_2 x-4^{\log_8 2\sqrt{2}}=0;$

д) $\log_{2x-1}5=3;$

е) $\log_3(3-x)-2\log_3 2=1-\log_3(4-x);$

ж) $\log_x 2+\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2;$

з) $\log_a\left(1+\log_b\left(1+\log_c\left(1+\log_p x\right)\right)\right)=0,$

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0,\ a\ne 1,\ b\ne 1,\ c\ne 1,\ p\ne 1.$

2. Решить неравенство:

а) $x+3>\log_3\left(26+3^{-x}\right);$

б) $\log_2 x-2\log_x 2+1\ge 0;$

в) $\log_{x-3}\left(x^2-4x+3\right)<\log_{x-3}1;$

г) $\log_{x+1}(5-x)>1.$

Вариант № 7

1. Решить уравнение:

а) $\log_{11}\log_3\log_2\left(\frac{2}{1-x}\right)=0;$

б) $\log_{\left(\log_2\sqrt{3x}\right)}3=1;$

в) $\log_{x-2}\sqrt[3]{4}=0{,}1(6);$

г) $\lg\left(x^2-6x+9\right)-2\lg(x-2)=2\lg 3;$

д) $\left(\log_x 3+1\right)\cdot\log_3^2 x=2;$

е) $5\log_3\left(\log_2 x^2-1\right)^2=5^{1+\frac{1}{2}\log_5 4};$

ж) $x^{2\lg^2 x}=10x^3;$

з) $3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9.$

2. Решить неравенство:

а) $(x-3)\cdot\log_{\frac{1}{7}}(x+5)\ge 0;$

б) $\log_2\frac{3x-1}{2-x}<1;$

в) $4x\cdot\log_5 x>\left(x^2+3\right)\log_5 x;$

г) $\log_{x^2}(4x+5)\le 1.$

Вариант № 8

1. Решить уравнение:

а) $\log_{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{3};$

б) $\frac{1}{\sqrt{2-\log_{0,04}x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3-\log_5 x}}=\frac{3}{2};$

в) $x^{2+\log_3 x}=27;$

г) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8;$

д) $\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0;$

е) $\log_2\left(4^{x+1}+4\right)\cdot\log_2\left(4^x+1\right)=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{8}};$

ж) $\log_{x-1}3=2;$

з) $x^{2\lg x}=10x^2.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{2-x}\left(5x^2-4x\right)>0;$

б) $\log_{\left(x^2-3x+2\right)}\left(x^2-7x+12\right)>1;$

в) $\frac{\lg^2 x-\lg x-4}{\lg x-1}>1;$

г) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x).$

Вариант № 9

1. Решить уравнение:

а) $\log_7\left(x^2-7x-11\right)=\log_7\left(x^2-8x+7\right)$;

б) $\lg(x-3)-\lg(x+7)=\lg(x-9)-\lg(x+10)$;

в) $\log_2\left(25^{x+3}-1\right)=2+\log_2\left(5^{x+3}+1\right)$;

г) $\log_{5-x}\left(x^2-2x+65\right)=2$; д) $x^{\lg x\cdot\lg 7x}=1$;

е) $3\cdot4^{\log_x 2}-46\cdot2^{\log_x 2-1}=8$;

ж) $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot5^{\lg x-1}-13\cdot7^{\lg x-1}$;

з) $3\log_2^2 x-71\log_2 x-19=0$.

2. Решить неравенство:

а) $\log_7(2x-8)>1$;

б) $\log_{x-7}\left(x^2-7x+6\right)<0$;

в) $\log_{3x+5}\left(9x^2+8x+8\right)>2$;

г) $|3-\log_2 x|<2$.

Вариант № 10

1. Решить уравнение:

а) $\log_2\frac{x}{2}=1-\log_2(x+3)$;

б) $\log_8\left(2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)\right)=\frac{1}{3}$;

в) $\log_2(x-1)-\log_2\left(\frac{5}{2}x-2\right)=-\log_2(x+1)$;

г) $2\log_x^2\sqrt{5}-3\log_x\sqrt{5}+1=0$;

д) $\log_2(x-1)=\log_{(x-1)}4$;

е) $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$;

ж) $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1$;

з) $\log_{\frac{1}{5}}x+\log_4 x=1$.

2. Решить неравенство:

а) $\log_2\frac{x+1}{x}>1$;

б) $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1$;

в) $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4x+6}{x}\right)\geq0$;

г) $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}x-2\leq0$.

Вариант № 11

1. Решить уравнение:

а) $\lg(2x)=\frac{1}{4}\lg(x-15)^4$;

б) $\log_3(2-x)-\log_3(2+x)-\log_3 x=-1$;

в) $\log_3 x=1+\log_x 9$;

г) $4^{\log_3(1-x)}=\left(2x^2+2x-5\right)^{\log_3 2}$;

д) $x^{\log_a x}=a^2x,\ a>0,\ a\neq 1$;

е) $\log_{x^2+3x-4} 1=0$;

ж) $\log_{x^2+3x-4} 1=5$;

з) $\log_{x^2+5x} 36=2$.

2. Решить неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{5-x}>\log_{\frac{1}{2}}(x+7)-\frac{1}{2}$;

б) $\log_2\left(x-5\sqrt{x}+4\right)>2$;

в) $x\log_{\frac{1}{2}}(x+3)<0$;

г) $1+\frac{\log_3^2 x+2}{\log_3 x}>\log_3 x$.

Вариант № 12

1. Решить уравнение:

а) $\log_4\left(8^x-2x-4\right)=\log_4\left(8^x+3x-9\right)$;

б) $\log_6\left(6^{x+2}+10\right)=x$;

в) $\log_4(2x-1)-\log_4(x-3)=\log_4(6x+4)-\log_4(2x+1)$;

г) $x^{\lg x-3\lg x}=100$;

д) $\left(\sqrt{x}\right)^{4x}=(x)^{2\sqrt{x}}$;

е) $\log_4^2 x-7\log_4 x+10=0$;

ж) $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4$;

з) $\frac{1}{\sqrt{3x-5}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$.

2. Решить неравенство:

а) $\log_3(x^2-4x-5)<2$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)>-1$;

в) $\log_{x-5}(x^2-4)>0$;

г) $\log_{x-3}(x+5)<0$.

Вариант № 13

1. Решить уравнение:

а) $\log_7\frac{x+3}{21}=\log_7\frac{2}{3x-6}$;

б) $3\log_3 x-\log_9 x=5$;

в) $\log_9(x^2-5x+6)^2=2^{-1}\cdot\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$;

г) $\frac{4}{3}\left(\log_3(5x-6)^3\right)^2-\left(\log_3(5x-6)^3\right)\log_3 x^6=-6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2$;

д) $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$;

е) $4^{\log_9 x}-6\cdot2^{\log_9 x}+2^{\log_3 27}=0$;

ж) $x^{\log_5 x}=625$;

з) $\log_2^2 x-9\log_2 x+8=0$.

2. Решить неравенство:

а) $\log_x\frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right)\le0$;

в) $\log_2\frac{x}{x-1}\le-1$;

г) $\log_{x-4}(x^2-4x+3)<0$.

Вариант № 14

1. Решить уравнение:

а) $2\lg2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\cdot\lg3-\lg(3^{\frac{1}{x}}+27)=0$;

б) $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$;

в) $\dfrac{\lg\left(35-x^3\right)}{\lg(5-x)}=3;$

г) $\sqrt{\log_\alpha \sqrt[4]{\alpha x}+\log_x \sqrt[4]{\alpha x}}+\sqrt{\log_\alpha \sqrt[4]{\dfrac{x}{\alpha}}+\log_x \sqrt[4]{\dfrac{\alpha}{x}}}=\alpha;\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1;$

д) $\lg\left(x-\dfrac{8}{9}\right)=2\lg\dfrac{1}{6};$

е) $3\log_{27} x+2\log_9 x-3\log_3 x=0;$

ж) $\log_x \sqrt[3]{4}x=\dfrac{7}{6};$

з) $\log_3^2 x+\log_3 x+1=\dfrac{7}{\log_3 \dfrac{x}{3}}.$

2. Решить неравенство:

а) $\log_2 \log_{0,5}\left(2^x-\dfrac{15}{16}\right)\leq 2;$

б) $\log_{\frac{1}{x}} \dfrac{2x-1}{x-1}\leq -1;$

в) $\log_{\frac{3}{2}}\left(3+\dfrac{x}{2}\right)-\log_{\frac{3}{2}} 4<0;$

г) $\lg 2^{3x-1}-\lg 2^{x+2}<\lg 4.$

ОТВЕТЫ

Вариант № 1

1. а) -17; б) 2; в) $\pm\dfrac{1}{2}$; г) 8; д) 1,5; е) $-\dfrac{1}{4}$; ж) $10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ и $10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$; з) $\dfrac{1}{5}$ и 25.

2. а) $\left[10-\sqrt{43};\ 4\right)\cup\left[10+\sqrt{43};\ +\infty\right)$; б) (3; 4); в) $(-2;-1)$;
г) $\left(-1-\sqrt{5};-3\right)\cup\left(\sqrt{5}-1;\ 5\right)$.

Вариант № 2

1. а) 0,5; б) $4-\sqrt{11}$; в) $-2+\sqrt{3}$; г) 1; д) $-\dfrac{1}{2}$; е) $\dfrac{1}{10}$; $10^{\left(1\pm\sqrt{3}\right)/2}$; ж) 1; 4.

2. а) $(1;+\infty)$; б) $(0;1)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right]$; в) (3; 9); г) $(-1;\ 0)\cup(6;+\infty)$.

Вариант № 3

1. а) 3; б) 10; в) 10; г) 64; д) 10 и 0,001; е) 9 и $\frac{1}{27}$; ж) 2; з) 9 и $\frac{1}{9}$.

2. а) $[0{,}5;\ 4]$; б) $(1;\ +\infty)$; в) $(-1;\ 2)$;

г) $\left(-\infty;\ \log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right)\cup\left(1{,}5;\ +\infty\right)$.

Вариант № 4

1. а) 1; $1+\sqrt{3}$; б) 2; в) $3^{\frac{1}{3}};\ 3^{-\frac{4}{15}}$; г) $\frac{1}{3}; 3$; д) 2; 3,5; е) решений нет;

ж) 1; 60; з) 2.

2. а) $(-2;\ -1)\cup(5;\ 6)$; б) $(1;\ 3)\cup(3;\ 11)$;

в) $\left(2+\sqrt{2};\ 4\right)$; г) $\left(0;\ 10^{-4}\right]\cup\left[10;\ +\infty\right)$.

Вариант № 5

1. а) 7; б) 16; в) 3; г) 7; д) –2; 3; –2,6; е) 2; $\log_5 0{,}1$; ж) $\frac{1}{3}$; 9; з) 9.

2. а) $(-7;\ -5)$; б) $\left(\log_2\frac{3}{2};\ +\infty\right)$;

в) $\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-1;\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$;

г) $(2;\ +\infty)$.

Вариант № 6

1. а) $\pm\sqrt{5};\ \pm 2\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{16}$; 2; в) 0,1; 10; г) 2; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{\sqrt[3]{5}+1}{2}$; е) 0;

ж) $4^{3\pm\sqrt{3}}$; з) 1.

2. а) $(0;\ +\infty)$; б) $\left[\frac{1}{4};\ 1\right)\cup\left[2;\ +\infty\right)$; в) $\left(2+\sqrt{2};\ 4\right)$; г) $(0;\ 2)$.

Вариант № 7

1. а) $\frac{3}{4}$; б) $21\frac{1}{3}$; в) $\pm\frac{1}{4}$; г) 2,25; д) $\frac{1}{9}; 3$; е) $\pm\frac{1}{2}; \pm 4$; ж) 0,1;

$10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$; з) $\frac{1}{9}; 3$.

2. а) [–4; 3]; б) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; в) (0; 1) ∪(1; 3);

г) $\left(-\frac{5}{4}; 1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (5; +\infty)$.

Вариант № 8

1. а) $10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$; б) $\frac{1}{5}; 25$; в) $\frac{1}{27}; 3$ г) 5; д) $2; \frac{1}{4}$; е) 0; ж) $1+\sqrt{3}$;

з) $10^{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$.

2. а) $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2,5; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

в) $\left(\frac{1}{10}; 10\right) \cup (1000; +\infty)$; г) $\left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

Вариант № 9

1. а) 18; б) решений нет; в) –2; г) –5; д) $\frac{1}{7}; 1$; е) $\sqrt[3]{2}$; ж) 100;

з) $2^{\frac{71\pm\sqrt{5269}}{6}}$.

2. а) (7,5; +∞); б) (7; 8); в) $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{17}{22}\right)$; г) (2; 32).

Вариант № 10

1. а) 1; б) 2; в) 2; г) $\sqrt{5}; 5$; д) $1+2^{\pm\sqrt{2}}$; е) –1000; ж) $4-\sqrt{11}$;

з) $(0,2)^{\log_{0,8} 4}$.

2. а) (0; 1); б) (1; 2) ∪ (3; 6) ∪ (0; 0,5); в) [–2; –1,5); г) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

Вариант № 11

1. а) 5; б) 1; в) $\frac{1}{3}; 9$; г) $-2-\sqrt{10}$; д) $a^2; \frac{1}{a}$;

е) $(-\infty; \frac{-3-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; -4) \cup (1; \frac{-3+\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$;

ж) решений нет; з) –6; 1.

2. а) (1; 3); б) (25; +∞); в) (–3; –2) ∪ (0; +∞);
г) $(0; \frac{1}{9});\cup(1; +\infty)$.

Вариант № 12

1. а) 1; б) решений нет; в) $\frac{7+\sqrt{71}}{2}$; г) $10^{\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}}$; д) 1; е) 16; 1024;
ж) $-\frac{1}{4}$; з) 2; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

2. а) $(2-3\sqrt{2};\ -1)\cup(5;\ 2+3\sqrt{2})$; б) (1,5; 2,5); в) (6; +∞);
г) (3; 4).

Вариант № 13

1. а) 4; б) 9; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{3}{2}; \frac{36}{25}$; д) $1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$; е) 9; 81; ж) 25; $\frac{1}{25}$;
з) 2; 256.

2. а) $\left(0; \frac{23}{35}\right)$; б) $[2; +\infty)$; в) [–1; 0); г) (4; 5).

Вариант № 14

1. а) 0,25 и 0,5; б) 1; 0,1; 0,01; в) 2; 3; г) $\alpha^{\alpha^2}; \alpha^{\frac{1}{\alpha^2}}$; д) $\frac{11}{12}$; е) 1;
ж) 16; з) 9.

2. а) $[0; \log_2 31-4)$; б) $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right)\cup\left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$; в) (–6; 2);
г) $\left(-\infty; \frac{5}{2}.\right)$

§3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Показательные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени, называется показательным.

Рассмотрим простейшие виды показательных уравнений.

I вид. Простейшие.

$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Так как функция $y = a^t$ монотонна, то из равенства $a^{t_1} = a^{t_2}$ следует, что $t_1 = t_2$.

Значит, уравнение $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Пример.

Решить уравнения:

а) $3^x = 9$; б) $7^x = \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$; в) $6^x = -\frac{1}{6}$; г) $(\cos 10°)^x = \sin 80°$; д) $5^{x^2+3x} = 25^x$; е) $5^x = 4$; ж) $2^x = 3$.

Решение.

а) $3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$;

б) $7^x = \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$; $7^x = 7^{-1\frac{2}{3}}$; $x = -1\frac{2}{3}$;

в) $6^x = -\frac{1}{6}$ — корней нет;

г) $(\cos 10°)^x = \sin 80°$; так как $\cos 10° = \sin 80°$, то $(\sin 80°)^x = \sin 80°$; $x = 1$;

д) $5^{x^2+3x} = 25^x$; $5^{x^2+3x} = 5^{2x}$; $x^2 + 3x = 2x$; $x(x + 1) = 0$; $x = 0$ или $x = -1$;

е) $5^x = 4$; $x = \log_5 4$;

ж) $2^x = 3$; $x = \log_2 3$.

Ответ: а) 2; б) $-1\frac{2}{3}$; в) корней нет; г) 1; д) 0; –1; е) $\log_5 4$; ж) $\log_2 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{3^x}=9^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;

4) $4^x\cdot5^{x-1}=0{,}2\cdot20^{3-2x}$;

5) $4^{|x-1|}=8$;

6) $4\cdot2^{\cos x}=\sqrt{8}$.

Ответ: 1) –4; 2) –6; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1; 5) 2,5; –0,5; 6) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

II вид. Уравнения, сводящиеся к простейшим вынесением за скобку основания с наименьшим показателем. Такие уравнения содержат одно и то же основание, и коэффициенты при x одинаковы.

Пример.

Решить уравнения:

1) $3^x+3^{x+2}=30$; 2) $3^{2x}+3^{2x-1}+7\cdot3^{2x-3}=11$.

Решение.

1) $3^x+3^{x+2}=30$. В левой части уравнения вынесем за скобки 3^x:
$3^x(1+3^2)=30$,
$3^x\cdot10=30$; $3^x=3$; $x=1$.

2) $3^{2x}+3^{2x-1}+7\cdot3^{2x-3}=11$. В левой части уравнения вынесем за скобки 3^{2x-3}.
$3^{2x-3}\left(3^3+3^2+7\right)=11$, $3^{2x-3}\cdot43=11$; $3^{2x-3}=\frac{11}{43}$;
$2x-3=\log_3\frac{11}{43}$; $x=1{,}5+\frac{1}{2}\log_3\frac{11}{43}$.

Ответ: 1) 1; 2) $1{,}5+\frac{1}{2}\log_3\frac{11}{43}$.

В таких уравнениях лучше выносить за скобки степень с **меньшим** показателем: тогда в скобках не будет степеней с отрицательным показателем.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122$;
2) $4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$;
3) $4^{x} - 3 \cdot 4^{x-2} = 13$;
4) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-2} = 104$;
5) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 69$;
6) $5^{x+1} + 5^{x-2} = 630$.

Ответ: 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 5; 5) 3; 6) 3.

III вид. Уравнения, решаемые составлением пропорций. Такие уравнения содержат два разных основания. Коэффициенты при x одинаковы. При решении нужно степени с одинаковыми основаниями собрать в одной части уравнения и вынести за скобки в обеих частях уравнения степень с показателем — наименьшим во всем уравнении.

Пример.

Решить уравнения:

а) $2^{x^2-1} - 3^{x^2-1} = 3^{x^2} - 2^{x^2+2}$,

б) $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x} - 2^{x-1} = 3^{x} + 3^{x+1}$.

Решение.

а) $2^{x^2-1} - 3^{x^2-1} = 3^{x^2} - 2^{x^2+2}$.

Перенесем степени с основанием 2 в левую часть уравнения, а с основанием 3 — в правую.

$2^{x^2-1} + 2^{x^2+2} = 3^{x^2} + 3^{x^2-1}$. Самый маленький показатель степени во всем уравнении — $x^2 - 1$.

$2^{x^2-1} \cdot \left(1 + 2^3\right) = 3^{x^2-1} \cdot (3+1)$,

$2^{x^2-1} \cdot 9 = 3^{x^2-1} \cdot 4$.

Составим пропорцию: $\dfrac{2^{x^2-1}}{3^{x^2-1}} = \dfrac{4}{9}$;

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$; $\quad x^2 - 1 = 2$; $\quad x = \pm\sqrt{3}$.

б) $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x} - 2^{x-2} = 3^{x} + 3^{x+1}$. Наименьший показатель степени — $x - 2$.

$$2^{x-2}\left(2+3\cdot 2^2-1\right)=3^{x-2}\cdot\left(3^2+3^3\right);$$

$$2^{x-2}\cdot 13=3^{x-2}\cdot 36;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}=\frac{36}{13};\qquad x-2=\log_{\frac{2}{3}}\frac{36}{13};\qquad x=2+\log_{\frac{2}{3}}\frac{36}{13}.$$

Ответы: а) $\pm\sqrt{3}$; б) $2+\log_{\frac{2}{3}}\frac{36}{13}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$;

2) $5^{x^2}-3^{x^2+1}=2\left(5^{x^2-1}-3^{x^2-2}\right)$;

3) $7^{x-1}-5^{x-2}-5^{x-3}+7^{x-2}+7^{x-3}=5^{x-1}$;

4) $3^x-2^{x+2}=3^{x-1}-2^{x-1}-2^{x-3}$;

5) $\left(\frac{1}{121}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{169}\right)^{1-x}+11^{2x-3}+13^{2x-3}=0$;

6) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

Ответы: 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) ± 3; 3) $3+\frac{\lg 31-\lg 57}{\lg 1{,}4}$; 4) 4; 5) 1,5; 6) 1,5.

IV вид. Уравнения, решаемые подстановкой $a^{f(x)}=t$.

Пример 1.

Решить уравнения:

а) $4^x-3\cdot 2^x+1=0$;

б) $\frac{3^{7x^2-x}-2}{3^{7x^2-x}-8}+3^{7x^2-x}=16$.

Решение.

а) Пусть $2^x=t$. Тогда уравнение примет вид $t^2-3t+1=0$, $t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x=\log_2\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

б) Пусть $3^{7x^2-x}=t$. Тогда уравнение примет вид $\frac{t-2}{t-8}+t=16$. После преобразований получим квадратное уравнение $t^2-23t+126=0$,

$t \neq 8$, корни которого $t = 14$ или $t = 9$. Если $t = 14$, то $3^{7x^2-x} = 14$, то есть $7x^2 - x = \log_3 14$.

Решив это квадратное уравнение, получим

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 28\log_3 14}}{14}$. Если $t = 9$, то $3^{7x^2-x} = 9$ и $7x^2 - x = 2$.

Последнее уравнение даст еще два корня: $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{14}$.

Ответ: а) $\log_2 \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 28\log_3 14}}{14}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{14}$.

Пример 2.

Решить уравнения:

а) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$;

б) $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

Решение.

а) Перепишем уравнение в виде $\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right)^2 \cdot 4 + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

Пусть $2^{\sqrt{3x^2-2x}} = t$. Относительно t уравнение примет вид $4t^2 - 9t + 2 = 0$, откуда находим $t_1 = 2$; $t_2 = \dfrac{1}{4}$. Если $t = 2$, то $2^{\sqrt{3x^2-2x}} = 2$, $\sqrt{3x^2 - 2x} = 1$, $3x^2 - 2x - 1 = 0$ и $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Если $t = \dfrac{1}{4}$, то $2^{\sqrt{3x^2-2x}} = \dfrac{1}{4}$; $\sqrt{3x^2 - 2x} \neq -2$.

Следовательно, уравнение $2^{\sqrt{3x^2-2x}} = \dfrac{1}{4}$ не имеет корней.

б) Перепишем уравнение в виде $\left(2^{3x^2+x}\right)^2 - 8 = 2 \cdot 2^{3x^2+x}$. Пусть $2^{3x^2+x} = t$, тогда получим квадратное уравнение относительно t: $t^2 - 2t - 8 = 0$ с корнями $t_1 = 4$, $t_2 = -2$.

Если $t = 4$, то $2^{3x^2+x} = 4$, $3x^2 + x = 2$, $3x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

$t = -2$ не удовлетворяет условию задачи, так как $2^{3x^2+x} = t > 0$.

Ответ: а) $-\dfrac{1}{3}$; 1; б) -1; $\dfrac{2}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1) $4^{\sqrt{x+3}}-32=4\cdot 2^{\sqrt{x+3}}$;
2) $3\cdot 4^{|x|}-7\cdot 2^{1+|x|}+8=0$;
3) $4^{\sin x}-2^{2+\sin x}+3=0$;
4) $4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4=0$;
5) $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{\sqrt{4x}}+3=0$;
6) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

Ответ: 1) 6; 2) ± 2; 3) $\pi n,\ n\in Z$; 4) -2; 5) 0; $\frac{1}{4}$; 6) 1,5.

V вид. Уравнения с завуалированным обратным числом.

Пример 1.

Решить уравнения:

а) $\left(\frac{5}{11}\right)^x+4\left(\frac{11}{5}\right)^x=5$;

б) $(3{,}2)^x+2\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^x=3$.

Решение.

а) Заметим, что $\frac{5}{11}\cdot\frac{11}{5}=1$.

Пусть $\left(\frac{5}{11}\right)^x=t>0$, тогда $\left(\frac{11}{5}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Исходное уравнение примет вид: $t+\frac{4}{t}=5$, $t^2-5t+4=0$, $t_1=1$; $t_2=4$.

Если $t=1$, то $\left(\frac{5}{11}\right)^x=1$, $x=0$.

Если $t=4$, то $\left(\frac{5}{11}\right)^x=4$, $x=\log_{\frac{5}{11}}4$.

б) Найдем произведение $3{,}2\cdot\frac{5}{16}=3{,}2\cdot\frac{5}{16}=\frac{16}{5}\cdot\frac{5}{16}=1$.

Пусть $(3{,}2)^x=t>0$, тогда $\left(\frac{5}{16}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $t+\frac{2}{t}=3$, то есть

$t^2-3t+2=0.$

Отсюда находим $t_1 = 1$; $t_2 = 2$.

Если $t = 1$, то $(3{,}2)^x = 1$ и $x = 0$.

Если $t = 2$, то $(3{,}2)^x = 2$ и $x = \log_{3,2}2$.

Ответ: 1) 0; $\log_{\frac{5}{11}} 4$; 2) 0; $\log_{3,2}2$.

Пример 2.

Решить уравнения:

а) $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^x=12;$

б) $8^x + 8^{-x} - 5 \cdot (2^x + 2^{-x}) + 8 = 0.$

Решение.

а) Так как

$\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}=\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)}=\sqrt[3]{36-35}=1,$ то, введя новую переменную, $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x=t>0,$ получим уравнение $t+\frac{1}{t}=12,$ которое имеет два положительных корня $t_{1,2}=6\pm\sqrt{35}.$

Если $t=6+\sqrt{35}$, то $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x=6+\sqrt{35}$ и $x = 3$.

Если $t=6-\sqrt{35}$, то $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x=6-\sqrt{35}$ и $x = -3$.

Действительно,

$$\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^3}=\frac{1}{6+\sqrt{35}}=\frac{6-\sqrt{35}}{\left(6-\sqrt{35}\right)\left(6+\sqrt{35}\right)}=$$

$$=\frac{6-\sqrt{35}}{1}=6-\sqrt{35}.$$

б) Пусть $2^x + 2^{-x} = t$.

Возведем обе части последнего равенства в куб:

$$\left(2^x\right)^3+3\cdot\left(2^x\right)^2\cdot\left(2^{-x}\right)+3\cdot2^x\cdot\left(2^{-x}\right)^2+\left(2^{-x}\right)^3=t^3;$$

$$8^x+3\cdot2^{2x}\cdot2^{-x}+3\cdot2^x\cdot2^{-2x}+8^{-x}=t^3;$$

$$8^x + 3\cdot 2^x + 3\cdot 2^{-x} + 8^{-x} = t^3;$$
$$\left(8^x + 8^{-x}\right) + 3\cdot\left(2^x + 2^{-x}\right) = t^3;$$
$$8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t.$$

Исходное уравнение примет вид:

$t^3 - 3t - 5t + 8 = 0;$ $\qquad$ $t^3 - 4t - 4t + 8 = 0;$

$t(t^2 - 4) - 4(t - 2) = 0;$ $\qquad$ $(t - 2)\,(t^2 + 2t - 4) = 0;$

откуда $t_1 = 2$ или $t_{2,3} = -1 \pm \sqrt{5}$.

Так как 2^x и 2^{-x} — взаимообратные и положительные величины, то $2^x + 2^{-x} \ge 2$.

Следовательно, $t_{2,\,3}$ не удовлетворяют этому требованию. Имеем $2^x + 2^{-x} = 2$, откуда $x = 0$.

Ответ: 1) –3; 3; 2) 0.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 4;$

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10;$

3) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{10}{3};$

4) $4^{x+1} + 4^{1-x} - 10 = 0;$

5) $7^{\operatorname{tg} x} + 7^{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \dfrac{50}{7};$

6) $5^{\sin \pi x} + 5^{1-\sin \pi x} = 6.$

Ответ: 1) –2; 2; 2) –2; 2; 3) $\pm\arcsin\left(\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} 3\right) + \pi n,\ n \in Z;$ 4) –0,5; 0,5; 5) $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$ 6) $2n + \dfrac{1}{2},\ n \in Z;\ k,\ k \in Z.$

VI вид. Уравнения, содержащие три различных основания в одной и той же степени и решающиеся как однородные.

Пример.

Решить уравнения:

а) $4^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0;$

б) $4^{x+1} - 6^x = 2 \cdot 3^{2x+2}.$

Р е ш е н и е.

а) Приведем уравнение к виду $\left(2^x\right)^2 - 3 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot \left(3^x\right)^2 = 0.$

Разделив обе части уравнения на $\left(3^x\right)^2 \neq 0$, получим уравнение, равносильное исходному: $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0.$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$, тогда из уравнения $t^2 - 3t + 2 = 0$ находим $t_1 = 1, t_2 = 2.$

Таким образом, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2.$

Отсюда находим: $x_1 = 0;\ x_2 = \log_{\frac{2}{3}} 2.$

б) Приведем уравнение к виду: $4 \cdot \left(2^x\right)^2 - 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 9 \cdot \left(3^x\right)^2 = 0.$

Разделив обе части уравнения на $\left(3^x\right)^2 \neq 0$, получим уравнение, равносильное данному: $4\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 = 0.$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$, тогда из уравнения $4t^2 - t - 18 = 0$ получим корни: $t_1 = -2;\ t_2 = \frac{9}{4}.$ $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $t > 0.$

Если $t = \frac{9}{4}$, то $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4};\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2};\ x = -2.$

О т в е т: 1) 0; $\log_{\frac{2}{3}} 2$; 2) –2.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $4^{x+1} - 6^x = 2 \cdot 3^{2x+2};$
2) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x;$
3) $\sqrt[x]{9} + \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{4};$
4) $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0;$

5) $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$;

6) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$.

Ответ: 1) –2; 2) 0; 1; 3) корней нет; 4) $\log_{0,4}2$; $\log_{2,5}2$; 5) 1; 2; 6) –2.

VII вид. Уравнения, решаемые с учетом монотонности.

Справедливы утверждения, которые можно использовать при решении уравнений (и неравенств).

а) Если функция f возрастает (убывает) на множестве X, то уравнение $f(x)=b$ не может иметь на этом множестве более одного корня.

б) Если на множестве X функция f возрастает, а функция φ убывает, то уравнение $f(x)=\varphi(x)$ не может иметь на множестве X более одного корня.

Пример.

Решить уравнения:

а) $3^x+4^x=7$;

б) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=\left(2\sqrt{2}\right)^x$;

Решение.

а) При $a>1$ функция $y=a^x$ является возрастающей. Легко угадать и проверить, что $x=1$ — корень данного уравнения. Покажем, что других корней уравнение иметь не может. При $x>1$ имеем: $3^x+4^x>7$, а при $x<1$ имеем: $3^x+4^x<7$, то есть уравнение имеет единственный корень $x=1$.

б) Разделив обе части уравнения на $\left(2\sqrt{2}\right)^x\neq 0$, получим уравнение, равносильное данному: $\left(\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^x=1$.

$\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{15}}{8}}<1$, так как $\sqrt{15}<4$;

$\dfrac{\sqrt{14-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{15}}{8}}<1$. Следовательно, левая часть уравнения — убывающая функция как сумма двух убывающих функций.

Таким образом, уравнение не может иметь более одного корня. Несложно угадать и проверить, что $x = 2$ — корень данного уравнения.

Ответ: а) 1; б) 2.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $3^x + 4^x = 25$;

2) $6^x + 5^x = 11$;

3) $6^x \cdot 5^x = 11$;

4) $3^{x^2+\frac{81}{x^2}-17} = -6 - 6x - x^2$;

5) $3^x + 4^x = 5^x$;

6) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$;

7) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$;

8) $3{,}7^x + \left(\frac{10}{37}\right)^x = 2\sin x$.

Ответ: 1) 2; 2) 1; 3) $\log_{30} 11$; 4) –3; 5) 2; 6) 2; 7) 2; 8) корней нет.

Показательные неравенства

I вид. Простейшие.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности степенной функции:

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$$

если $a > 1$, то $f(x) > \varphi(x)$, если $0 < a < 1$, то $f(x) < \varphi(x)$.

Учитывая это свойство, многие простейшие показательные неравенства решаются методом приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

Пример.

Решить неравенства:

а) $25^x > 125^{3x-2}$;

б) $(0{,}3)^{4x^2-2x-2} \le (0{,}3)^{2x-3}$;

в) $\sqrt{2^{x^2+5x-10}} \cdot \sqrt{3^{x^2+5x-10}} \ge 36$.

Р е ш е н и е.

а) Поскольку $25^x = \left(5^2\right)^x = 5^{2x}$, $125^{3x-2} = \left(5^3\right)^{3x-2} = 5^{9x-6}$, то данное неравенство равносильно неравенству $5^{2x} > 5^{9x-6}$, решая которое мы получим

$2x > 9x - 6$, то есть $x < \frac{6}{7}$.

Следовательно, промежуток $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right)$ есть множество всех решений искомого неравенства.

б) Исходное неравенство равносильно неравенствам

$4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3;$

$4x^2 - 4x + 1 \geq 0;$

$(2x - 1)^2 \geq 0.$

Исходному неравенству удовлетворяют все действительные числа.

в) Так как $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, то данное неравенство равносильно неравенствам

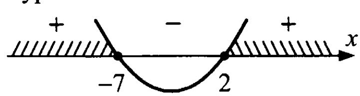
$$2^{\frac{x^2+5x-10}{2}} \cdot 3^{\frac{x^2+5x-10}{2}} \geq 36,$$

$$6^{\frac{x^2+5x-10}{2}} \geq 6^2, \quad \frac{x^2+5x-10}{2} \geq 2,$$

$$x^2 + 5x - 14 \geq 0.$$

Для решения последнего неравенства найдем корни соответствующего ему квадратного уравнения:

$x_1 = -7$, $x_2 = 2$.



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty; -7] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: а) $(-\infty; \frac{6}{7})$; б) x — любое действительное число; в) $(-\infty; -7] \cup [2; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $2^{3-5x} > 4;$

2) $5^{x^2-3x+2} \leq 1;$

3) $2^{\sqrt{x}} \leq 4;$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x} > \sqrt{3};$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} > 2;$ 7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \le 2;$

6) $3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1;$ 8) $\sqrt{2^{x-1} \cdot \sqrt[3]{4^{x} \cdot (0{,}125)^{\frac{1}{x}}}} > 4\sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$

Ответ: 1) $\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right)$; 2) $[1;\ 2]$; 3) $[0;\ 4]$;

4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 5) $(-1;\ 0)$; 6) $[0;\ 64)$;

7) $(-\infty;\ -1] \cup (0;\ +\infty)$; 8) $\left(-\frac{1}{5};\ 0\right) \cup (3;\ +\infty)$.

II вид. Неравенства, решаемые подстановкой $a^{f(x)} = t$.

Пример.

Решить неравенства:

а) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$;

б) $\frac{1}{2^x - 1} \ge \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$;

в) $10^{7x-1} + 6 \cdot 10^{1-7x} - 5 \le 0$.

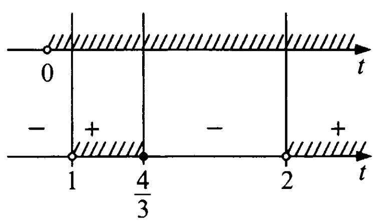
Решение.

а) Так как $4^x = \left(2^x\right)^2$, то, обозначив $2^x = t$, получим неравенство $t^2 - 3t + 2 < 0$, $1 < t < 2$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $1 < 2^x < 2$, $0 < x < 1$.

б) Обозначив $2^x = t$, получим

$$\begin{cases} t > 0, \\ \frac{1}{t-1} \ge \frac{1}{1-0{,}5t}; \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0 \\ \frac{2-1{,}5t}{(t-1)(2-t)} \ge 0 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} 1 < t \le \frac{4}{3}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}1<2^x\le\dfrac{4}{3},\\ 2^x>2;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}0<x\le\log_2\dfrac{4}{3},\\ x>1.\end{array}\right.$$

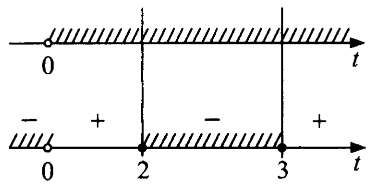
Следовательно, множество всех решений исходного неравенства есть множество $\left(0;\ \log_2\dfrac{4}{3}\right]\cup(1;\ +\infty)$.

в) Используя свойства степени, запишем данное неравенство в виде

$$10^{7x-1}+\frac{6}{10^{7x-1}}-5\le 0.$$

Обозначив $10^{7x-1}=t$, получим

$$\begin{cases}t>0,\\ t+\dfrac{6}{t}-5\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}t>0,\\ \dfrac{t^2-5t+6}{t}\le 0;\end{cases}$$



$2\le t\le 3,\qquad 2\le 10^{7x-1}\le 3,$

отсюда находим $\lg 2\le 7x-1\le \lg 3$,

$$\frac{1}{7}(1+\lg 2)\le x\le\frac{1}{7}(1+\lg 3),\quad \frac{1}{7}\lg 20\le x\le\frac{1}{7}\lg 30.$$

Отрезок $\left[\dfrac{1}{7}\lg 20;\ \dfrac{1}{7}\lg 30\right]$ есть множество решений данного неравенства.

О т в е т : а) $(0;\ 1)$; б) $\left(0;\ \log_2\dfrac{4}{3}\right]\cup(1;\ +\infty)$;

в) $\left[\dfrac{1}{7}\lg 20;\ \dfrac{1}{7}\lg 30\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}>3$;

2) $2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{0,5\sqrt{x}}<24$;

3) $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}<\left(12^{\log_{144}4+\log_{12}2}\right)\cdot\left(7^{\log_7 3+\log_{49}4}\right)$;

4) $2^{4x}-50\cdot 4^x-896>0$;

5) $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}\le 10$;

6) $\dfrac{4^x+5}{2^{x+1}-1}\ge 3;$

7) $4^x-9\cdot 2^x+8^{\log_5 7\cdot\log_7 5}<0;$

8) $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1};$

9) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}\ge 6.$

Ответ:

1) $(2;+\infty];$

2) $[0;36);$

3) $(-1;1);$

4) $(3;+\infty);$

5) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;$

6) $(-1;1]\cup[2;+\infty);$

7) $(0;3);$

8) $\left(-\sqrt{7};-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};\sqrt{7}\right)$; 9) $[1{,}5;+\infty)$.

III вид. Неравенства, решаемые методом интервалов.

Метод интервалов основан на следующем утверждении.

Если функция f на интервале $(a;\ b)$ непрерывна и не обращается в ноль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пример.

Решить неравенства:

а) $(2^x-3)(3^x-9)<0;$

б) $(4^x-6\cdot 2^x+9)(3^x-9)\ge 0;$

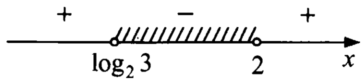
в) $\dfrac{x^2-2}{2^x-3}<0;$

г) $\dfrac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1.$

Решение.

а) Область определения неравенства — все действительные числа.

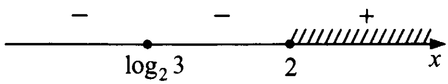
Рассмотрим функцию $f(x)=\left(2^x-3\right)\left(3^x-9\right)$. Решив уравнение $f(x)=0$, находим нули функции: $\log_2 3$; 2. На каждом из промежутков $(-\infty;\log_2 3)$; $(\log_2 3;2)$, $(2;+\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в ноль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак.



Множество решений исходного неравенства есть множество $(\log_2 3; 2)$.

б) Область определения неравенства — все действительные числа. Найдем нули функции $f(x)=\left(4^x-6\cdot 2^x+9\right)\left(3^x-9\right)$, решив уравнение $\left(2^x-3\right)^2\cdot\left(3^x-9\right)=0$: $x_{1,2}=\log_2 3$; $x_3=2$.

Отметим нули функции на области определения неравенства и определим знаки функции на каждом из получившихся интервалов.



Множество решений исходного неравенства: $\{\log_2 3\}\cup[2; +\infty)$.

в) Область определения неравенства: $2^x-3\neq 0$, $x\neq\log_2 3$.

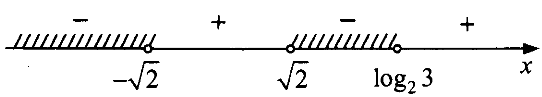
Нули функции $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2^x-3}$: $x=\pm\sqrt{2}$.

Сравним $\sqrt{2}$ и $\log_2 3$.

$\sqrt{2}<1{,}5$; $\log_2 3>1{,}5$, так как $3>2\sqrt{2}$.

Следовательно, $\sqrt{2}<\log_2 3$.

Отметив нули функции на области определения неравенства и определив знаки функции на каждом из получившихся интервалов, получим множество решений неравенства.

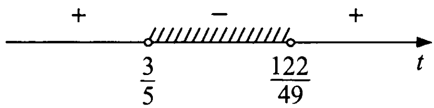


$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}; \log_2 3\right)$.

г) Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{2\cdot 3^3\cdot 3^x-5^3\cdot 5^x}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1;\quad \frac{5^x\left(54\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-125\right)}{5^x\left(5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-3\right)}<1;\quad \frac{54\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-125}{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-3}<1.$$

Пусть $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$. Получим $\frac{54t-125}{5t-3} < 1$, $\quad \frac{49t-122}{5t-3} < 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов. Функция $f(t) = \frac{49t-122}{5t-3}$ определена для всех t, кроме $t = \frac{3}{5}$, непрерывна на области определения и равна нулю в точке $t = \frac{122}{49}$. Точки $\frac{3}{5}$ и $\frac{122}{49}$ разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых функция сохраняет знак:



Таким образом, $\frac{3}{5} < t < \frac{122}{49}$, то есть $\frac{3}{5} < \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{122}{49}$ и

$\log_{\frac{3}{5}} \frac{122}{49} < x < 1$.

Значит, все $x \in \left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{122}{49}\right); 1\right)$ являются решениями исходного неравенства.

Ответ: а) $(\log_2 3; 2)$; б) $\{\log_2 3\} \cup [2; +\infty)$;

в) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \log_2 3\right)$; г) $\left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{122}{49}\right); 1\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\frac{x^2-3}{3^x-5} > 0$;

2) $(x^2-2x-3)(2^x-8) \le 0$;

3) $\frac{3^x-27}{x^2-4x+4} \le 0$;

4) $\frac{64-4^x}{4x^2+12x+9} \ge 0$;

5) $\frac{2-3^x}{3^x-4} \le 3^{x-1}$;

6) $\left(2^x-3\right)\left(2\log_2 x - 1\right)\log_2^2 x < 0$.

О т в е т : 1) $\left(-\sqrt{3}; \log_3 5\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; -1\right] \cup \{3\}$; 3) $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$; 4) $(-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 3]$; 5) $(-\infty; 1] \cup (\log_3 4; +\infty)$; 6) $\left[\sqrt{2}; \log_2 3\right]$.

IV вид. Неравенства $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ и $(f(x))^{\varphi(x)} < 1$.

Неравенство $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

Неравенство $(f(x))^{\varphi(x)} < 1$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Пример.

Решить неравенства:

а) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$;

б) $\left(x^2 - 8x + 15\right)^{x-6} < 1$.

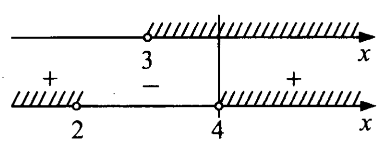
Р е ш е н и е .

а) Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x-2 > 1, \\ x^2 - 6x + 8 > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ x^2 - 6x + 8 < 0. \end{cases}$$

Решим первую систему:

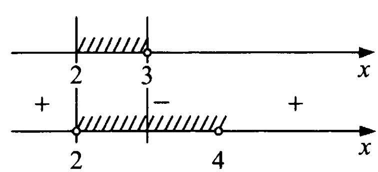
$$\begin{cases} x > 3, \\ (x-2)(x-4) > 0; \end{cases}$$



$x > 4$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 2 < x < 3, \\ (x-2)(x-4) < 0; \end{cases}$$



$2 < x < 3$.

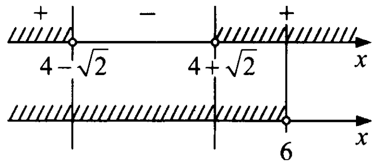
Множество решений неравенства: $(2; 3) \cup (4; +\infty)$.

б) Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x^2-8x+15>1, \\ x-6<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0<x^2-8x+15<1, \\ x-6>0. \end{cases}$

Решим первую систему:

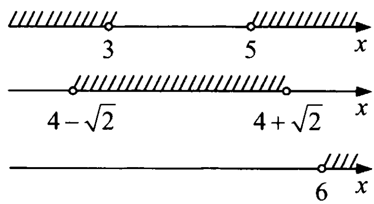
$$\begin{cases} x^2-8x+14>0, \\ x<6; \end{cases}$$



$x<4-\sqrt{2}$ или $4+\sqrt{2}<x<6$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x^2-8x+15>0, \\ x^2-8x+14<0, \\ x>6; \end{cases}$$



решений нет.

Множество решений исходного неравенства:

$\left(-\infty;\, 4-\sqrt{2}\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\, 6\right)$.

Ответ: 1) $(2;\,3)\cup(4;\,+\infty)$; 2) $\left(-\infty;\, 4-\sqrt{2}\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\, 6\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\left(x^2-6x+8\right)^{x-3}<1$;

2) $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1$;

3) $(x^2+x+1)^x<1$;

4) $\left(x^2+1\right)^{3x-1}\geq\left(x^2+1\right)^2$,

5) $|x|^{x^2-2x-3}<1$;

6) $\left(2\cdot 3^{x-2}+3^{-x}\right)^{2-x}>1$.

Ответ: 1) $\left(-\infty;\, 3-\sqrt{2}\right)\cup\left(4;\, 3+\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(-\infty;\, 1\frac{2}{3}\right)\cup(2;\,3)$; 3) $(-\infty\, -1)$; 4) $\{0\}\cup[1;\,+\infty)$; 5) $(1;\,3)$; 6) $(-\infty;\,\log_3 1{,}5)\cup(1;\,2)$.

§4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ

Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла

Координатной окружностью называют окружность единичного радиуса, на которой выбраны начало отсчета и направление обхода (обычно в качестве положительного выбирают направление обхода против часовой стрелки).

Запись $M(t)$ показывает положение точки на координатной окружности.

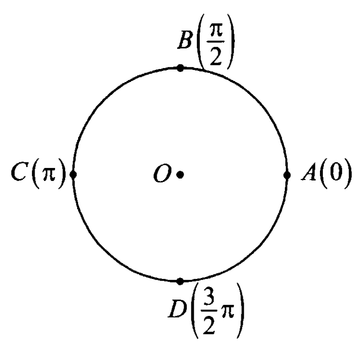


Рис. 20

Положение точки на координатной окружности можно задавать ее декартовыми координатами на плоскости так, чтобы начало этой системы координат находилось в центре O координатной окружности, положительный луч оси абсцисс проходил через начало отсчета A (0) на этой окружности, а положительный луч оси ординат — через точку $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ той же окружности (см. рис. 20 а). Радиус окружности принимаем за 1.

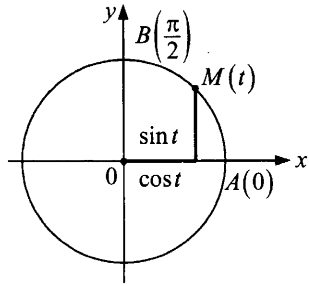


Рис. 20 а

В этом случае координатная окружность называется единичной окружностью.

Декартовы координаты точки $M(t)$ координатной окружности называют косинусом и синусом числа t.

$$M(t) = M(\cos t; \sin t)$$

Запись $M(t)$ показывает положение точки M на координатной окружности, а запись $M(\cos t; \sin t)$ — положение той же точки на координатной плоскости.

Число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют синусом угла α и обозначают $\sin \alpha$.

Число, равное абсциссе точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют косинусом угла α и обозначают $\cos \alpha$.

Пример. Вычислить $\sin 0$ и $\cos 0$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ и $\cos\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Углу 0 радиан соответствует точка $A(1; 0)$, следовательно, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, углу $\frac{3\pi}{2}$ радиан соответствует точка $B(0; -1)$, следовательно, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ (см. рис. 20б).

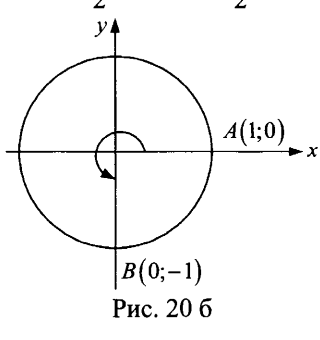


Рис. 20 б

Тангенсом угла α называется число, равное отношению синуса угла α к косинусу этого угла (рис. 21).

Котангенсом угла α называется число, равное отношению косинуса угла α к синусу этого угла (рис. 22).

$$\cos\alpha = x_0; \quad \sin\alpha = y_0; \quad \text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

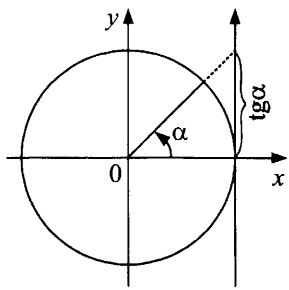


Рис. 21

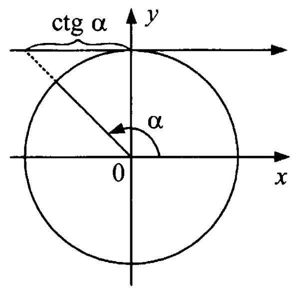


Рис. 22

Некоторые значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\text{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Основные тригонометрические формулы

Основные тригонометрические формулы, имеющие место при всех допустимых значениях аргументов α и β.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \tag{1.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{1.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{1.6}$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{2.1}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{2.2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{2.3}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{2.4}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \tag{2.5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \tag{2.6}$$

Формулы кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \tag{3.1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{3.2}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \tag{3.3}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \tag{3.4}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \tag{3.5}$$

Формулы преобразования сумм или разностей в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4.1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (4.2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4.3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (4.4)$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \qquad (4.5)$$

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \qquad (4.6)$$

Преобразование произведений в сумму или разность

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (5.1)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (5.2)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right] \qquad (5.3)$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (6.1)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad (6.2)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha - 3\cos\alpha}{4} \qquad (6.3)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \qquad (6.4)$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{7.1}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{7.2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{7.3}$$

Формулы приведения

Если тригонометрическая функция от аргумента $\frac{\pi k}{2} \pm t$ заменяется функцией от аргумента t, то:

а) перед получаемым результатом ставится тот знак, который имело бы заданное выражение при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) при замене $\pi \pm t$ или $2\pi \pm t$ на t название функции сохраняют;

в) при замене $\frac{\pi}{2} \pm t$ или $\frac{3\pi}{2} \pm t$ на t название синус меняют на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс.

β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Тригонометрические уравнения

Не существует единого метода, следуя которому можно было бы решить любое тригонометрическое уравнение. Успех обеспечивается хорошим знанием формул и умением преобразовывать входящее в тригонометрическое уравнение выражение к такому виду, чтобы корни находились из так называемых простейших уравнений.

В процессе решения надо следить за тем, чтобы не допустить потери корней (например, при сокращении на общий множитель) или приобретения посторонних корней (например, при возведении обеих частей в квадрат). Нужно также контролировать, принадлежат ли получающиеся корни к области допустимых значений рассматриваемого уравнения, или делать проверку.

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a$ — имеет решение при $-1 \le a \le 1$.

При $a = \pm 1$ и $a = 0$ это уравнение решают по частным формулам.

$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z.$

В остальных случаях уравнение $\sin x = a$ решается по *общей формуле*

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

Значения arc sin *a*, которые необходимо знать:

$\arcsin\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{6} = \pm 30°;$

$\arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{3} = \pm 60°;$

$\arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{4} = \pm 45°;$

$\arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2} = \pm 90°;$

$\arcsin 0 = 0 = 0°.$

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\sin 3x = 1;$

б) $\sin(x-2) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\sin\left(8x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{3}$.

Решение.

а) Уравнение решается по частной формуле.

$\sin 3x = 1;\ 3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$

б) Уравнение решается по общей формуле.

$\sin(x-2)=\frac{\sqrt{2}}{2};$

$x-2=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;$

$x-2=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z;$

$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+2+\pi n,\ \ n\in Z.$

Ответ: $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+2+\pi n,\ \ n\in Z.$

в) $\sin\left(8x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{3};$

$8x+\frac{\pi}{7}=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ \ n\in Z;$

$8x=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{7}+\pi n,\ \ n\in Z;$

$x=(-1)^n\cdot\frac{1}{8}\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{56}+\frac{\pi n}{8},\ \ n\in Z.$

Ответ: $(-1)^n\cdot\frac{1}{8}\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{56}+\frac{\pi n}{8},\ \ n\in Z.$

2. $\boldsymbol{\cos x = a}$ — имеет решение при $-1\le a\le 1$.

$\boldsymbol{\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n\in Z.}$

$\boldsymbol{\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n\in Z.}$

$\boldsymbol{\cos x = 0;\ \ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z.}$

$\boldsymbol{x=\pm\arccos a+2\pi n,\ \ n\in Z}$ — ***общая формула***

Значения arc cos *a*, которые необходимо знать:

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}=60°;$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}=30°;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}=120°;$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}=150°;$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}=45°;$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}=135°;$$

$$\arccos 1=0=0°;$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}=90°;$$

$$\arccos(-1)=\pi=180°.$$

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\cos 2x=1;$

б) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{13}\right)=0,2;$

в) $\cos\frac{7}{x}=0.$

Р е ш е н и е.

а) Уравнение решается по частной формуле:

$2x=2\pi n,\ n\in Z;$ $\qquad$ $x=\pi n,\ n\in Z.$

О т в е т: $\pi n,\ n\in Z.$

б) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{13}\right)=0,2.$

Решаем уравнение по общей формуле.

$$3x-\frac{\pi}{13}=\pm\arccos 0,2+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$3x=\pm\arccos 0,2+\frac{\pi}{13}+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{1}{3}\arccos 0,2+\frac{\pi}{39}+\frac{2\pi}{3}\cdot n,\ \ n\in Z.$$

О т в е т : $\pm\frac{1}{3}\arccos 0,2+\frac{\pi}{39}+\frac{2\pi}{3}\cdot n,\ n\in Z.$

в) $\cos\frac{7}{x}=0;\qquad \frac{7}{x}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$x=\frac{14}{\pi+2\pi n},\ n\in Z.$

О т в е т : $\frac{14}{\pi+2\pi n},\ n\in Z.$

3. tg x = a — всегда имеет решение и решается по формуле **$x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in Z$.**

Значения arc tg a, которые необходимо знать:

$\operatorname{arctg}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{\pi}{6}=\pm30°;$

$\operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\frac{\pi}{3}=\pm60°;$

$\operatorname{arctg}(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}=\pm45°;$

$\operatorname{arctg}(0)=0=0°.$

Пример 3. Решить уравнение:

а) $\operatorname{tg}2x=100;$

б) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3};$

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{\pi}=1.$

Р е ш е н и е .

а) $\operatorname{tg}2x=100;$

$2x=\operatorname{arctg}100+\pi n,\ n\in Z;$

$x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}100+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$

О т в е т : $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}100+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$

б) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3};\quad x+\frac{\pi}{5}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z;$

$x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$

$x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}+\pi n,\ n\in Z;$

$x = \frac{2\pi}{15} + \pi n,\ n \in Z.$

О т в е т : $\frac{2\pi}{15} + \pi n,\ n \in Z.$

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{\pi} = 1;$ $\frac{x}{\pi} = \operatorname{arc\,tg} 1 + \pi n,\ n \in Z;$

$\frac{x}{\pi} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$ $x = \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 n,\ n \in Z.$

О т в е т : $\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 n,\ n \in Z.$

4. ctg *x* = *a* — всегда имеет решение и решается по формуле **$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$.**

Значения arc ctg *a*, которые необходимо знать:

$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} = 30°;$ $\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} = 60°$

$\operatorname{arc\,ctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 45°;$ $\operatorname{arc\,ctg} 0 = \frac{\pi}{2} = 90°;$

$\operatorname{arc\,ctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6} = 150°;$

$\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120°;$

$\operatorname{arc\,ctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} = 135°.$

Пример 4. Решить уравнение:

а) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{x} = -\sqrt{3};$

б) ctg $2x = 0{,}7$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Р е ш е н и е .

а) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{x} = -\sqrt{3};$ $\frac{5\pi}{x} = \operatorname{arc\,ctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in Z;$

$\frac{5\pi}{x} = \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

$\frac{5}{x} = \frac{5}{6} + n,\ n \in Z;$

$$x=\frac{5}{\frac{5}{6}+n},\ n\in Z;\ \ x=\frac{30}{5+6n},\ n\in Z.$$

О т в е т : $\frac{30}{5+6n},\ n\in Z.$

б) $\operatorname{ctg}2x=0{,}7;$

$2x=\operatorname{arcctg}0{,}7+\pi n,\ n\in Z;$

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}0{,}7+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$$

О т в е т : $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}0{,}7+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$

в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$

$$\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n;$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n=0,1,2,3,\ldots;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{3}+n,\ n=0,1,2,\ldots;$$

(так как левая часть положительна, то $n=0,1,2,\ldots$).

$$\sqrt{x}=\frac{1}{\frac{2}{3}+n},\ n=0,1,2,\ldots;$$

$$\sqrt{x}=\frac{3}{2+3n},\ n=0,1,2,\ldots;$$

$$x=\left(\frac{3}{2+3n}\right)^2,\ n=0,1,2,\ldots.$$

О т в е т : $\left(\frac{3}{2+3n}\right)^2,\ n=0,1,2,\ldots.$

Уравнения для самостоятельного решени

1) $\sin\frac{14}{5}x=\frac{\sqrt{3}}{2};$

2) $\sin\frac{3\pi}{x+1}=\frac{1}{2};$

3) $\sin\frac{5\pi}{x^2}=-1;$

4) $\sin\frac{8\pi}{\sqrt{x}}=1;$

5) $\sin\sqrt{\frac{\pi}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$

6) $\sin(7-3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$

7) $\sin 3x = \frac{\pi}{3}$;

8) $\sin x = \frac{\pi}{2}$;

9) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;

10) $\cos\frac{3}{5}x = -\frac{1}{2}$;

11) $\cos\frac{3\pi}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

12) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;

13) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \sqrt{3}$;

14) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

Ответы:

1) $\frac{5\pi}{42} + \frac{5\pi n}{7}$; $\frac{5\pi}{21} + \frac{5\pi n}{7}$, $n \in Z$;

2) $\frac{17-12n}{1+12n}$, $n \in Z$; $\frac{13-12n}{5+12n}$, $n \in Z$;

3) $\pm\sqrt{\frac{10}{4n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

4) $\frac{256}{1+8n+16n^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

5) $\frac{16}{\pi(1+8n)^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\frac{16}{\pi(3+8n)^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

6) $7 + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $7 + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

7) корней нет;

8) корней нет;

9) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

10) $\pm\frac{10\pi}{9} + \frac{10\pi}{3} \cdot n$, $n \in Z$;

11) $\pm\sqrt{\frac{18}{1+12n}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\pm\sqrt{\frac{18}{-1+12n}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

12) корней нет;

13) $\pi + 3\pi n$, $n \in Z$;

14) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным

Уравнения, сводящиеся к квадратным, — уравнения, которые после замены некоторого выражения новой переменной являются квадратными.

Пример 1. Решить уравнение $3\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$.

Р е ш е н и е .

Сделав замену $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$, приходим к квадратному уравнению относительно новой переменной: $3t^2 - t - 2 = 0$, корни которого $t = 1$ или $t = -\frac{2}{3}$.

Имеем: $\cos x = 1$ или $\cos x = -\frac{2}{3}$, откуда $x = 2\pi n$, $n \in Z$,

$x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

О т в е т : $2\pi n$, $n \in Z$; $\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$.

Р е ш е н и е .

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством (1.1) получаем уравнение

$2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0,$

$2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0.$

Сделав замену $\sin x = t$, $-1 \le t \le 1$, приходим к квадратному уравнению относительно новой переменной: $2t^2 + t - 3 = 0$, корни которого $t = 1$ или $t = -\frac{3}{2}$. Второй корень не удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

О т в е т : $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение $3\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 8$.

Р е ш е н и е .

Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение примет вид: $3\operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} x} = 8,$ откуда $3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 5 = 0$, $\operatorname{tg} x \ne 0$.

Пусть $\operatorname{tg} x = u$, тогда $3u^2 - 8u + 5 = 0$.

$D = 64 - 60 = 4$; $u = \frac{8 \pm 2}{6}$; $u = 1$ или $u = \frac{5}{3}$.

Вернемся к переменной x.

$\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = \frac{5}{3}$;

$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

$x = \mathrm{arctg}\frac{5}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ \mathrm{arctg}\frac{5}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Упражнения для самостоятельного решения

1) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0;$
2) $6\sin^2 x - \cos x + 6 = 0;$
3) $5\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x = 4$
4) $\cos 2x - 7\cos x + 1 = 0;$
5) $\cos 4x + \cos^2 x = \frac{1}{4};$
6) $3\cos 2x + 5\cos x + a = 0$, если известно, что $x = \frac{\pi}{3}$ — одно из решений;
7) $\cos 4x + \cos^2 x = a$, если $\frac{\pi}{6}$ — одно из решений.

Ответы:

1) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in Z;$
2) корней нет;
3) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \pi k,\ k \in Z;$
4) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$
5) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{9}{16} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{11}{16}\right) + 2\pi k,\ k \in Z;$
6) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$
7) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z.$

Однородные тригонометрические уравнения и сводящиеся к ним

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0;$
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0;$
$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$
и т.п. называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения

одинакова, а свободный член равен нулю. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Делением обеих частей на $\cos^k x \neq 0$, где k — степень однородного уравнения, уравнение сводится к алгебраическому относительно функции $\operatorname{tg} x$.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Решение.

Это однородное уравнение I степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Разделив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то из уравнения получим, что $\sin x = 0$, что противоречит тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), получим уравнение

$$2\operatorname{tg} x - 3 = 0;\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{2};\ x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$.

Решение.

Это однородное уравнение II степени. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим

$1 - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg}^2 x = 0$; $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$.

Обозначив $\operatorname{tg} x = u$, получим $2u^2 + u - 1 = 0$.

Корни последнего уравнения: $u = -1$ или $u = \frac{1}{2}$.

Отсюда $\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,\ n \in Z$;

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \text{ или } x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$.

Решение.

Это неполное однородное уравнение II степени (отсутствует член, содержащий $\sin^2 x$). В этом случае, во избежание потери корней, рекомендуется левую часть разложить на множители, а не делить на $\cos^2 x$, так как для этого уравнения $\cos x$ может быть равным нулю.

$\cos x(\cos x + \sin x) = 0$.

Отсюда $\cos x = 0$ или $\cos x + \sin x = 0$.

Первое из этих уравнений — простейшее. Оно решается по частной формуле: $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Второе — однородное I степени: $\cos x + \sin x = 0$. Разделив обе части на $\cos x \neq 0$, получим $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

О т в е т: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 4. Решить уравнение $2 \sin^2 2x + 3 \cos^2 2x = 2{,}5 \sin 4x$.

Р е ш е н и е.

Данное уравнение можно преобразовать к однородному уравнению II степени, разложив $\sin 4x$ по формуле (3.1).

$2 \sin^2 2x + 3 \cos^2 2x - 5 \sin 2x \cos 2x = 0$.

Разделив обе части на $\cos^2 2x \neq 0$, получим

$2 \operatorname{tg}^2 2x - 5 \operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.

Сделаем замену $\operatorname{tg} 2x = k$:

$2k^2 - 5k + 3 = 0$; $k = 1$ или $k = \frac{3}{2}$.

Получим:

$\operatorname{tg} 2x = 1$ или $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{2}$; $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$ или $2x = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

$x = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

О т в е т: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $3 \sin 2x + 8 \sin^2 x = 7$.

Р е ш е н и е.

Это уравнение не однородное, но оно легко к нему сводится с помощью формул (3.1) и (1.1):

$6 \sin x \cos x + 8 \sin^2 x = 7 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$;

$7 \cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x = 0$ — однородное уравнение II степени. Делим обе части на $\cos^2 x \neq 0$:

$\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x - 7 = 0$.

Сделав замену $\operatorname{tg} x = k$, получим $k^2 + 6k - 7 = 0$, откуда $k = 1$ или $k = -7$. Следовательно, $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -7$.

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ или $x = \operatorname{arc\,tg}(-7) + \pi l,\ l \in Z$;

$x = -\operatorname{arc\,tg} 7 + \pi l,\ l \in Z$.

О т в е т: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $-\operatorname{arc\,tg} 7 + \pi l,\ l \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $3\cos^2 x - 5\sin^2 x - \sin 2x = 0$;
2) $6\sin^2 2x - \frac{3}{2}\sin 4x - 5\cos^2 2x = 2$;
3) $\sin x - \cos x = 0$;
4) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$;
5) $\sin^2 x + 14\sin x\cos x = 15\cos^2 x$;
6) $13\sin^2 x + 12\sin x\cos x = \cos^2 x$;
7) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;
8) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 0$.

Ответы:

1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi k,\ k \in Z$;
2) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\cdot n,\ n \in Z;\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{7}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot n,\ n \in Z$;
3) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;
4) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z$;
5) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\operatorname{arctg}15 + \pi k,\ k \in Z$;
6) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \pi k,\ k \in Z$;
7) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;
8) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}\cdot n,\ n \in Z$.

Решение уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$ с помощью введения вспомогательного угла

Уравнения вида $a\cos x + b\sin x = c$ решаются делением обеих частей на $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\gamma, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\gamma \end{cases}$ (угол γ существует, так как

$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2} = 1$),

тогда $\cos\gamma \cdot \cos x + \sin\gamma \cdot \sin x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразовав левую часть по формуле (2.4), получим простейшее уравнение

$$\cos(x-\gamma) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 1. Решить уравнение $3\cos x - 4\sin x = 2{,}5$ (здесь $a = 3$; $b = 4$).

Р е ш е н и е .

Разделим обе части на $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

$\dfrac{3}{5}\cos x - \dfrac{4}{5}\sin x = \dfrac{1}{2}$, откуда $\begin{cases} \cos\gamma = \dfrac{3}{5}, \\ \sin\gamma = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

$\cos\gamma \cdot \cos x - \sin\gamma \cdot \sin x = \dfrac{1}{2}$,

$\cos(x+\gamma) = \dfrac{1}{2}$, $x+\gamma = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; из системы получим $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{4}{3}$, откуда $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

Подставим значение γ и найдем x: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

О т в е т : $\pm\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2} = 1$.

Р е ш е н и е .

$a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{2}$; $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4} = 2$; $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$.

О т в е т : $\pm\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $2\sin 5x + 2\cos 5x = \sqrt{2}$;
2) $2\sqrt{3}\ \cos 7x + 6\sin 7x = \sqrt{12}$;
3) $9\cos(3 - 2x) - \sqrt{27}\ \sin(2x - 3) = -6\sqrt{3}$;
4) $3\sin\frac{x}{5} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{5} = 3$;
5) $3\sin x - 4\cos x = 5$;
6) $5\sin 2x + 12\cos 2x = -13$;
7) $3\cos 3x + 5\sin 3x = \frac{\sqrt{34}}{2}$;
8) При каких значениях a уравнение $5\sin 2x - 6\cos 2x = a$ имеет решение?
9) При каких значениях a уравнение $a\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{7\pi}{8}\right) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{8} - \frac{x}{3}\right) = 6$ имеет решение?

Ответы:

1) $-\frac{\pi}{60} + \frac{2\pi}{5}\cdot n,\ n \in Z;\ \frac{7\pi}{60} + \frac{2\pi}{5}\cdot k,\ k \in Z;$
2) $\frac{2\pi}{7}\cdot n;\ \frac{2\pi}{21} + \frac{2\pi}{7}\cdot k,\ k \in Z;$
3) $\frac{3}{2} + \frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z;$
4) $\frac{10\pi}{3} + 10\pi n,\ n \in Z;\ 5\pi + 10\pi k,\ k \in Z;$
5) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;
6) $-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{12}{5} + 2\pi n,\ n \in Z;$
7) $\frac{\pi}{18} - \frac{1}{3}\ \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \frac{2\pi}{3}\cdot n,\ n \in Z;\ \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3}\ \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \frac{2\pi}{3}k,\ k \in Z;$
8) $\left[-\sqrt{61};\ \sqrt{61}\right]$;
9) $|a| \geq \sqrt{11}$.

Тригонометрические уравнения, решаемые методом разложения на множители

При решении уравнений этого типа нужно пользоваться всеми способами разложения на множители. Это формулы сокращенного умножения, вынесение за скобки общего множителя, группировка, формулы (4.1) – (4.4) и искусственные приемы.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x + \cos x + 1 + \cos x \cdot \sin x = 0$.

Решение.

Выполним группировку:

$(\cos x + 1) + (\sin x + \cos x \cdot \sin x) = 0$;

$(\cos x + 1) + \sin x \cdot (1 + \cos x) = 0$;

$(\cos x + 1) \cdot (\sin x + 1) = 0$,

отсюда $\cos x = -1$ или $\sin x = -1$;

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$; $\quad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Решение.

Выполним группировку:

$(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$,

выражение в скобке преобразуем по формуле (4.3):

$2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0$;

$\cos 2x\,(2 \cos x + 1) = 0$;

$\cos 2x = 0$ или $2 \cos x + 1 = 0$.

$2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$; $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin 3x - \sin x + 2\cos^2 x = 1$.

Решение.

Выполним группировку:

$(\sin 3x - \sin x) + (2 \cos^2 x - 1) = 0$,

выражение в скобках преобразуем по формулам (4.2) и (3.2):

$2\sin x \cdot \cos 2x + \cos 2x = 0;$

$\cos 2x \cdot (2\sin x + 1) = 0;$

$\cos 2x = 0;$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$

или $2\sin x + 1 = 0;\ \sin x = -\frac{1}{2};$

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \sin 5x + \cos x + \cos 5x = 0.$

Решение.

Сгруппируем $(\sin x + \sin 5x) + (\cos x + \cos 5x) = 0,$

по формулам (4.1) и (4.3) левую часть приведем к виду:

$2\sin 3x \cdot \cos 2x + 2\cos 3x \cdot \cos 2x = 0;$

$\cos 2x\,(\sin 3x + \cos 3x) = 0,$

отсюда

$\cos 2x = 0;\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$

или $\sin 3x + \cos 3x = 0$ — однородное уравнение I степени; делим обе части на $\cos 3x \neq 0$, $\operatorname{tg} 3x = -1;$

$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z;\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{3},\ l \in Z;$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{3},\ l \in Z.$

Упражнения для самостоятельного решения

1) $1 + \sin 3x \cos x = \sin 3x + \cos x;$
2) $\cos 7x + \cos x + \sin 7x + \sin x = 0;$
3) $(1 + \cos 6x) \cdot \sin 5x = \sqrt{3}\,\cos^2 3x;$
4) $(1 - \cos 8x) \cdot \cos 3x = \sin^2 4x;$
5) $\cos x - \sin x = 1 - \sin 2x;$
6) $\cos x + \sin x = \cos 2x;$
7) $2\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 3 = 0;$
8) $\cos 2x = \sin^3 x - \cos^3 x.$

О т в е т ы :

1) $2\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot k,\ k\in Z;$

2) $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\cdot n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot n,\ n\in Z;$

3) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\cdot n,\ n\in Z;\ \frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\cdot k,\ k\in Z;$

4) $\frac{\pi}{4}\cdot n,\ n\in Z;\ \pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\cdot n,\ n\in Z;$

5) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi m,\ m\in Z;\ \frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z;$

6) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi m,\ m\in Z;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z;$

7) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$

8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi m,\ m\in Z;\ \frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z.$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Этот метод предполагает использовать формулы

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z.$$

Выбрав указанный способ решения, нужно проверять, не являются ли числа из множества $\pi+2\pi n,\ n\in Z$ решениями уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $10\cos 2x+8=\operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е .

Проверим, будут ли числа $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ решениями данного уравнения:

$10\cos(\pi+2\pi n)+8=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ — правая часть равенства не имеет смысла. Следовательно, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. Сделав подстановку $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, получим уравнение:

$$10\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}+8=\mathrm{tg}\,x;$$

$10-10\,\mathrm{tg}^2\,x+8+8\,\mathrm{tg}^2\,x=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^3\,x.$

Пусть $\mathrm{tg}\,x=t$, тогда $t^3+2t^2+t-18=0$;

$(t^3-8)+(2t^2+t-10)=0;$

$$(t-2)\left(t^2+2t+4\right)+2(t-2)\left(t+\frac{5}{2}\right)=0;$$

$(t-2)\,(t^2+2t+4+2t+5)=0;$

$(t-2)\,(t^2+4t+9)=0;$

$t=2$ или $t^2+4t+9=0$; $D=16-36<0$, корней нет.

Имеем: $\mathrm{tg}\,x=2$, $x=\mathrm{arc\,tg}\,2+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $\mathrm{arc\,tg}\,2+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x+5\cos x+5=0$.

Решение.

Применим универсальную подстановку:

$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{5\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+5=0,\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+5\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)+5+5\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=0;$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=-5,\ x=-2\,\mathrm{arc\,tg}\,5+2\pi k,\ k\in Z.$$

Теперь необходимо проверить, являются ли числа из множества $\pi+2\pi n$, $n\in Z$ корнями исходного уравнения:

$\sin(\pi+2\pi n)+5\cos(\pi+2\pi n)+5=0$, $n\in Z$;

$\sin\pi+5\cos\pi+5=0$; $0-5+5=0$; $0=0$.

Следовательно, все числа вида $\pi+2\pi n$, $n\in Z$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\pi+2\pi n$, $n\in Z$; $-2\,\mathrm{arc\,tg}\,5+2\pi k$, $k\in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $3\sin 2x+\cos 2x=2+\mathrm{tg}\,x$;
2) $2\sin^2 x+\cos x-3\sin x+1=0$;
3) $6\cos x+12\sin x+25\sin x\cdot\cos x+6=0$;

4) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=1-\sin 2x$;

5) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$;

6) $2(1-\cos 2x) = \operatorname{tg} x$;

7) $2 + \sin x = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

8) $1 + \cos x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0$;

9) $15\operatorname{ctg} x + 130\sin 2x = \dfrac{53}{5}\operatorname{tg} x$.

Ответы:

1) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ \operatorname{arctg}\left(-2\pm\sqrt{3}\right)+\pi k,\ k\in Z;$

2) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ \pi+2\pi k,\ k\in Z;$

3) $\pi+2\pi n,\ n\in Z;\ 2\operatorname{arctg}2+2\pi m,\ m\in Z;\ 2\operatorname{arctg}\dfrac{-10\pm\sqrt{61}}{13}+2\pi l,\ l\in Z;$

4) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi k,\ n\in Z;\ k\in Z;$

5) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$

6) $\pi n,\ n\in Z;\ \operatorname{arctg}\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\pi m,\ m\in Z;$

7) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

Уравнения, решаемые подстановками $\sin x \pm \cos x = t$ и $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x = t$

Эти уравнения обычно содержат $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$; $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Пример 1. Решить уравнение $6\sin x - \sin x\cos x = 6\cdot(1+\cos x)$.

Решение.

$6\sin x - 6\cos x = 6 + \sin x\cdot\cos x$ (*)

$6(\sin x - \cos x) = 6 + \sin x\cdot\cos x$

Пусть $\sin x - \cos x = t$, тогда $(\sin x - \cos x)^2 = t^2$.

$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = t^2$, откуда $\sin x\cdot\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$.

Уравнение (*) примет вид:

$6t = 6 + \frac{1-t^2}{2}$; $t^2 + 12t - 13 = 0$;

$t = 1$ или $t = -13$.

Получим:

$\sin x - \cos x = 1$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

или

$\sin x - \cos x = -13$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-13}{\sqrt{2}}$;

нет решения.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\mathrm{tg}^2\, x - 3\ \mathrm{tg}\, x + 4 = 3\ \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}^2\, x$.

Решение.

$(\mathrm{tg}^2 + \mathrm{ctg}^2\, x) - 3(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x) + 4 = 0$ (**)

Пусть $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = u$, тогда $(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x)^2 = u^2$,

$\mathrm{tg}^2\, x + 2\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x + \mathrm{ctg}^2\, x = u^2$.

$\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x = u^2 - 2$.

Уравнение (**) примет вид:

$u^2 - 2 - 3u + 4 = 0$ или $u^2 - 3u + 2 = 0$,

откуда $u = 1$ или $u = 2$.

Получим $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = 1$

или

$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = 2$.

Первое из этих уравнений не имеет решений, так как сумма двух взаимообратных чисел не может равняться единице.

Второе уравнение имеет решение $\mathrm{tg}\ x = 1$, так как сумма двух взаимообратных чисел равна двум тогда, когда они одновременно равны единице.

Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sin 2x = 2\,(1 + \sin x + \cos x)$;
2) $2\cos x - \sin 2x = 2 + 2\sin x$;
3) $\sin 2x + 3\sqrt{2}\,(\sin x - \cos x) = 5$;
4) $4\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 6\,\mathrm{tg}\, x - 3\,\mathrm{ctg}\, x - 8 = 0$;
5) $7 + \sin 2x = 7\sin x + 7\cos x$;
6) $\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 4 = 3\,\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}^2 x$;
7) $\mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{ctg}\, x = 4 - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x$;
8) $\sin 2x - 4\sin x = 4 + 4\cos x$;
9) $2\,(\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x) = \sqrt{3}\,(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x) - 2\sqrt{3}$.

Ответы:

1) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ -\pi + 2\pi k,\ k \in Z;$

2) $2\pi n,\ n \in Z;\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

3) $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$

4) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k;\ \mathrm{arctg}\dfrac{-2 \pm \sqrt{6}}{2} + \pi l,\ l \in Z;$

5) $2\pi n,\ n \in Z;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

6) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

7) $\mathrm{arctg}\left(1 \pm \sqrt{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z;$

8) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ -\pi + 2\pi k,\ k \in Z;$

9) $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z;\ -\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций

Условия равенства одноименных тригонометрических функций $\sin f(x) = \sin \gamma(x)$, если

$$\left[\begin{array}{l} f(x) - \gamma(x) = 2\pi n,\ n \in Z; \\ f(x) + \gamma(x) = \pi + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

$\cos f(x) = \cos\gamma(x)$, если $\left[\begin{array}{l} f(x)-\gamma(x)=2\pi n,\ n\in Z, \\ f(x)+\gamma(x)=2\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$

$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg}\gamma(x)$, если $\left\{\begin{array}{l} f(x)-\gamma(x)=\pi n,\ n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z, \\ \gamma(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 8x = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 8x-3x-\dfrac{\pi}{6}=2\pi n,\ n\in Z, \\ 8x+3x+\dfrac{\pi}{6}=\pi+2\pi k,\ k\in Z. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2\pi}{5}n,\ n\in Z, \\ x=\dfrac{5\pi}{66}+\dfrac{2\pi}{11}k,\ k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi}{5}n,\ n\in Z;\ \frac{5\pi}{66}+\frac{2\pi}{11}k,\ k\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 7x$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 7x-3x+\dfrac{\pi}{4}=2\pi n,\ n\in Z, \\ 7x+3x-\dfrac{\pi}{4}=2\pi k,\ k\in Z. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{40}+\dfrac{\pi k}{5},\ k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ \frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z.$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} x$.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-x=\pi n,\ n\in Z, \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z, \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z. \end{array}\right.$$

Среди чисел $\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$ не содержится чисел вида $\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\cos 5x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$;

2) $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{5} - 4x\right)$;

3) $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{11}\right)$;

4) $3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 5x$;

5) $\cos 6x = 1 - 2 \sin^2 x$;

6) $\cos x = \sin 5x$;

7) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}(\pi \sin x)$;

8) $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$;

9) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x)$.

Ответы:

1) $\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi}{3} \cdot n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{49} + \frac{2\pi}{7} \cdot k,\ k \in Z$;

2) $\frac{\pi}{35} + \frac{2\pi}{7} \cdot n,\ n \in Z;\ -\frac{4\pi}{5} + 2\pi k,\ k \in Z$;

3) $\frac{\pi}{11} + \pi n,\ n \in Z$;

4) $\pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \cdot k,\ k \in Z$;

5) $\frac{\pi}{4} \cdot n,\ n \in Z$;

6) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \cdot n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k,\ k \in Z$;

7) $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n,\ n \in Z$;

8) $\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in Z;\ -\frac{7\pi}{48} + \frac{\pi}{4} \cdot k,\ k \in Z$;

9) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнения, при решении которых используется ограниченность синуса и косинуса

Пример 1. Решить уравнение $\sin x + \cos 4x = 2$.

Р е ш е н и е.

Левая часть равна правой тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z, \\ \cos\left(4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z, \\ \cos(2\pi + 8\pi n) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

О т в е т: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 3x \cdot \cos x = 1$.

Р е ш е н и е.

Данное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos x = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \ n \in Z \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right) = 1. \end{cases}$$

На рисунке 23 отмечены точки, которые соответствуют углам вида $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \ n \in Z$. Ни для одного из них косинус не равен 1. Следовательно, первая система не имеет решения.

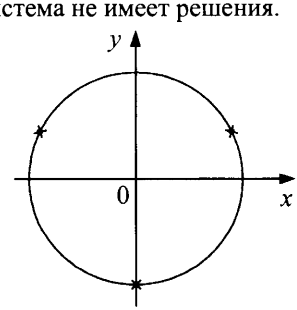


Рис. 23

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \ k \in Z, \\ \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right) = -1. \end{cases}$$

На рисунке 24 отмечены точки, которые соответствуют углам вида $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $k \in Z$. Ни для одного из них косинус не равен -1. Следовательно, вторая система не имеет решений.

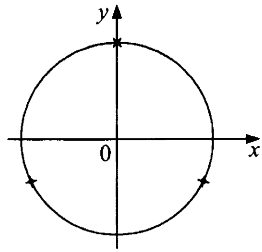


Рис. 24

О т в е т : решений нет.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sin x + \cos 4x = 2$;
2) $\sin x \cdot \cos 3x = 1$;
3) $\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2$;
4) $\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2$;
5) $\sin 2x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$;
6) $\sin 3x + \cos 2x = -2$;
7) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = 1$;
8) $\sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;
9) $\sqrt{\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 2} - \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т ы : 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) корней нет;

3) $\frac{3\pi}{2} + 6\pi n$;

4) $2\pi + 8\pi n$, $n \in Z$;

5) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

6) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

7) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

8) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

9) $\frac{7\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении тригонометрических неравенств используются свойства тригонометрических функций, в первую очередь их периодичность и монотонность на соответствующих промежутках, а также промежутки их знакопостоянства.

Для решения неравенства, содержащего только $\sin x$ или только $\cos x$, достаточно решить это неравенство на каком-либо отрезке длины 2π. Множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида $2\pi n$, $n \in Z$.

Для неравенств, содержащих $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, решения находятся на промежутке длиной π, а множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида πn, $n \in Z$.

Простейшие неравенства

Будем решать простейшие неравенства, пользуясь окружностью единичного радиуса с центром в начале системы координат.

Пример 1. Решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$.

Решение.

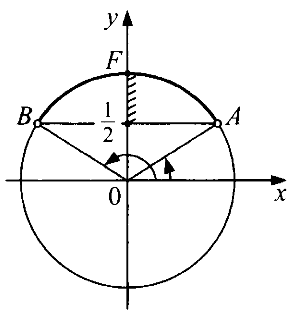


Рис. 25

Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то точки окружности, ордината которых больше $\frac{1}{2}$, лежат на дуге AFB, где $A = A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ и $B = B\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$, точки A и B исключаются.

Иными словами, на отрезке $[0;\ 2\pi]$ решением неравенства $\sin t > \frac{1}{2}$ служит интервал $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. Учитывая периодичность $\sin t$, получаем ответ в виде $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

О т в е т : $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

Пример 2. Решить неравенство $\sin 3x \le \frac{1}{5}$.

Р е ш е н и е .

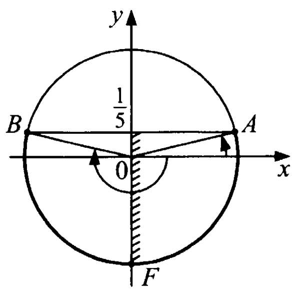


Рис. 26

При $3x = t$ неравенство примет вид $\sin t \le \frac{1}{5}$.

Это неравенство означает, что все точки окружности при значениях t, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, меньшую или равную $\frac{1}{5}$. Множество всех таких точек — дуга AFB, выделенная на рисунке 26.

Чтобы найти условие, при котором точка $P(t)$ принадлежит указанному множеству, найдем t_1 и t_2, соответствующие точкам $A = A(t_1)$ и $B = B(t_1)$.

Возьмем $t_1 = \arcsin\frac{1}{5}$.

Рассмотрим обход дуги от точки A к точке B в направлении по часовой стрелке: $t_2 < t_1$ и $t_2 = -\pi - \arcsin\frac{1}{5}$.

Все решения неравенства из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ длиной 2π таковы: $-\pi - \arcsin\frac{1}{5} \le t \le \arcsin\frac{1}{5}$. Учитывая периодичность синуса, получаем все решения неравенства:

$$-\pi - \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n \le t \le \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n, \ n \in Z$$

$$-\pi - \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n \le 3x \le \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{5} + \frac{2\pi}{3}\cdot n; \ \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{5} + \frac{2\pi}{3}\cdot n\right]$, $n \in Z$.

Пример 3. Решить неравенство $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

На рисунке 27 выделена соответствующая дуга AFB, где $A = A(t_1)$ и $B = B(t_2)$.

Находим $t_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$,

$t_2 = -\frac{2\pi}{3}$, откуда

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

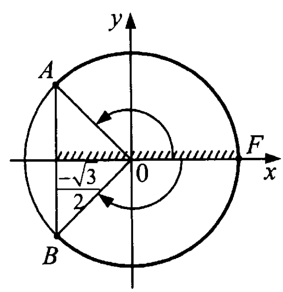


Рис. 27

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 4. Решить неравенство $\cos 3x \le -\frac{1}{4}$.

Р е ш е н и е.

Обозначив $3x$ через t, получим $\cos t \le -\frac{1}{4}$. На рисунке 28 выделена соответствующая дуга AFB, где $A = A(t_1)$ и $B = B(t_2)$.

Находим $t_1 = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; $t_2 = \pi + \arccos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$, откуда

$$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n \le t \le \pi + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Переходя к переменной x, получаем:

$$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n \le 3x \le \pi + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\quad n \in Z;$$

$$\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}\cdot n \le x \le \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi}{3}\cdot n,\quad n \in Z.$$

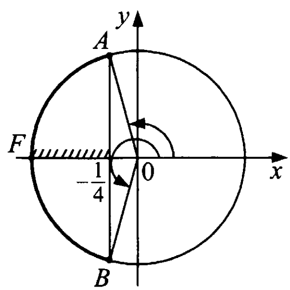


Рис. 28

О т в е т: $\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}\cdot n;\ \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi}{3}\cdot n\right]$, $n \in Z$.

Пример 5. Решить неравенство $\operatorname{tg} t \le \sqrt{3}$.

Р е ш е н и е.

Период тангенса равен π. Поэтому найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а затем воспользуемся периодичностью тангенса. Для выделения всех точек $P(t)$ правой полуокружности, значения t которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии тангенсов. Если t является решением неравенства, то ордината точки T, равная $\operatorname{tg} t$, должна быть меньше или равна $\sqrt{3}$.

Множество таких точек T — луч FT (рис. 29). Множество точек $P(t)$, соответствующих точкам этого луча, — дуга BC, выделенная на рисунке (обратите внимание: точка $B(t_1)$ принадлежат, а $C\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не принадлежат рассматриваемому множеству).

Находим условие, при котором $P(t)$ принадлежит дуге BC. $t_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} t_1 = \sqrt{3}$, следовательно, $t_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Значит, t должно удовлетворять условию $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{3}$.

Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, таковы: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$. Учитывая периодичность тангенса, получаем ответ:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \le \frac{\pi}{3} + \pi n, \; n \in Z.$$

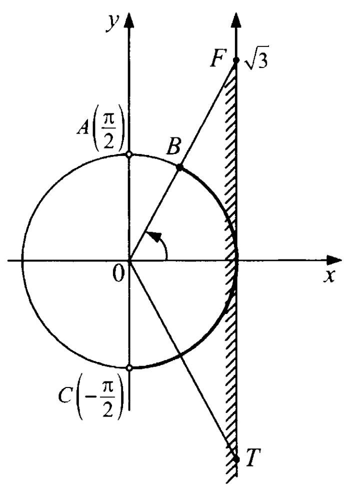


Рис. 29

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 6. Решить неравенство $\operatorname{ctg} t \geq -1$.

Решение.

Период котангенса равен π. Поэтому найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $(0;\ \pi)$, а затем воспользуемся периодичностью котангенса. Для выделения всех точек $P(t)$ верхней полуокружности, значения t которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии котангенсов. Если t является решением неравенства, то абсцисса точки T, равная $\operatorname{ctg} t$, должна быть больше или равна -1. Множество таких точек T — луч DT (рис. 30). Множество точек $P(t)$, соответствующих точкам этого луча, — дуга BC, выделенная на рисунке.

Находим условие, при котором точка $P(t_1)$ принадлежит дуге BC. $C = C(t_1)$; $t_1 \in (0;\ \pi)$ и $\operatorname{ctg} t_1 = -1$, следовательно, $t_1 = \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

Значит, t должно удовлетворять условию: $0 < t \leq \frac{3\pi}{4}$. Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $(0;\ \pi)$, таковы: $\left(0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$. Учитывая периодичность котангенса, получаем ответ:

$$\pi n < t \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left(\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in Z.$

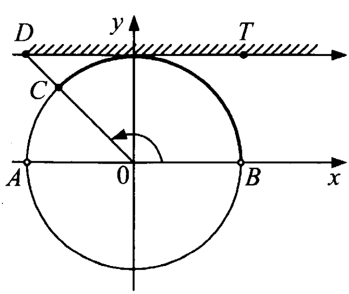


Рис. 30

Пример 7. Решить неравенство $|\cos 2x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е.

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos 2x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. Дуги AB и CD симметричны относительно осей координат (рис. 31), поэтому достаточно найти ответ на одной из дуг, например на дуге AB, уменьшив период в два раза:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \le 2x \le \frac{5\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z;$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot n \le x \le \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot n, \ n \in Z.$$

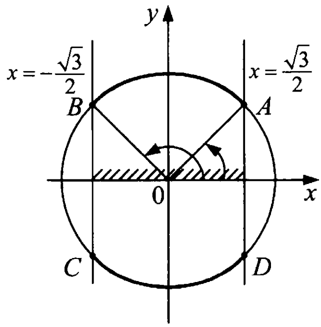


Рис. 31

О т в е т: $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot n; \ \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot n\right], \ n \in Z.$

Пример 8. Решить неравенство $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е.

Из условия следует, что $\sin x < -\frac{1}{2}$ или $\sin x > \frac{1}{2}$.

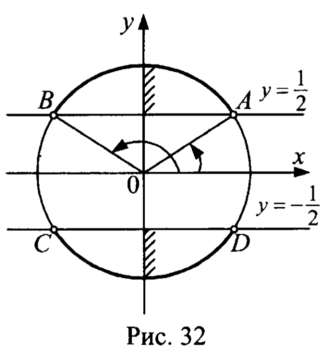


Рис. 32

Дуги симметричны относительно осей координат (рис. 32), следовательно, достаточно найти ответ на одной из дуг, например на дуге AB: $A = A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $B = B\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right), \; n \in Z.$

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sin(5x - 8) \geq \frac{1}{2}$;
2) $\sin 5x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos 3x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos 2x \geq -\frac{1}{4}$;
5) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$;
6) $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \leq -1$;
7) $|\sin 3x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;
8) $\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right)\right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответы:

1) $\left[\frac{\pi}{30} + \frac{8}{5} + \frac{2\pi}{5} \cdot n; \; \frac{\pi}{6} + \frac{8}{5} + \frac{2\pi}{5} \cdot n\right], \; n \in Z$;

2) $\left[-\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} \cdot n; \; -\frac{\pi}{15} + 2\pi \cdot n\right], \; n \in Z$;

3) $\left[\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot n; \; \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot n\right], \; n \in Z$;

4) $\left[-\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n; \; \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n\right], \; n \in Z$;

5) $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \; n \in Z$;

6) $[3\pi + 4\pi n; \; 4\pi + 4\pi n), \; n \in Z$;

7) $\left[-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \cdot n; \; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \cdot n\right], \; n \in Z$;

8) $\left[-\frac{13\pi}{42} + \pi n; \; \frac{\pi}{42} + \pi n\right], \; n \in Z$.

Тригонометрические неравенства, сводящиеся к квадратным

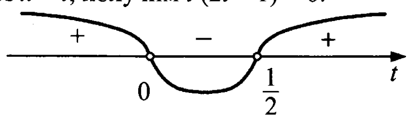
Пример. Решить неравенство $-\cos x < -1 - \cos 2x$.

Р е ш е н и е .

$-\cos x + \cos 2x + 1 < 0$;

$-\cos x + 2\cos^2 x - 1 + 1 < 0$; $\cos x\,(2\cos x - 1) < 0$.

Обозначив $\cos x = t$, получим $t\,(2t - 1) < 0$.



Следовательно, $0 < t < \frac{1}{2}$, то есть $0 < \cos x < \frac{1}{2}$.

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ или $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

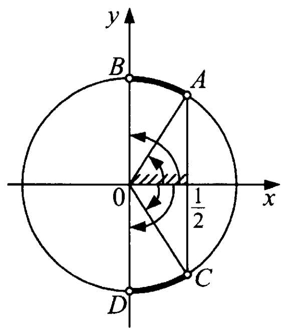


Рис. 33

$A = A\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad B = B\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad C = C\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad D = D\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

О т в е т : $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) k,\ n \in Z.$

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sin x + \cos 2x > 1$;
2) $\cos 2x + 5\cos x + 3 \ge 0$;
3) $\sin^2 x + \sqrt{3}\ \sin x - 3 > 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;
5) $3\cos^2 x - \cos x - 2 \le 0$;
6) $2\cos^2 x - \sin x + 1 > 0$;
7) $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$
8) $\cos 4x + \cos^2 x \ge -1$;
9) $3\operatorname{tg}^2 3x - 2 < 0$.

Ответы:

1) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$;

2) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

3) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

4) $\left(-\operatorname{arctg}2+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$;

5) $\left[-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n; \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

6) $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

7) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$;

8) $x\in R$;

9) $\left(-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi n}{3}; \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$.

Тригонометрические неравенства, решаемые методом интервалов

Пример. Решить неравенство $\cos 2x - \cos 8x > 0$.

Решение.

Пусть $f(x) = \cos 2x - \cos 8x$.

Функция $f(x)$ — четная, ее период равен π, так как

$\cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2(x + \pi)$, $T_1 = \pi$ (T — период);

$\cos 8x = \cos(8x + 2\pi) = \cos 8\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $T_2 = \frac{\pi}{4}$.

$T_{общ} = \pi$ (общий период).

Достаточно найти решения неравенства $f(x) > 0$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Находим корни уравнения $f(x) = 0$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $0; \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{5}$.

$0 < x < \frac{\pi}{5}$ или $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{5}$.

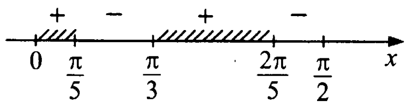


Рис. 34

Так как $f(x)$ — четная, то решения неравенства $f(x) > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ будут: $-\frac{2\pi}{5} < x < -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{5} < x < 0.$

Ответ:

$\left(-\frac{2\pi}{5}+\pi n; -\frac{\pi}{3}+\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{5}+\pi n; \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{5}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{2\pi}{5}+\pi n\right),$ $n \in Z.$

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sin 2x - \sin 3x > 0;$

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3} > 0;$

3) $\cos 3x - \cos 2x \le 0;$

4) $\sin 2x + \cos 4x \ge 0.$

Ответы:

1) $\left(\frac{\pi}{5}+2\pi n; \frac{3\pi}{5}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{7\pi}{5}+2\pi n\right) \cup$ $\cup \left(\frac{9\pi}{5}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right),\ n \in Z;$

2) $(6\pi n; \pi+6\pi n) \cup \left(\frac{3}{2}\pi+6\pi n; 3\pi+6\pi n\right) \cup$ $\cup \left(\frac{9}{2}\pi+6\pi n; 5\pi+6\pi n\right),\ n \in Z;$

3) $-\frac{2\pi}{5}+2\pi n \le x \le \frac{2\pi}{5}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{5}+2\pi n \le x \le \frac{6\pi}{5}+2\pi n,\ n \in Z;$

4) $\pi n \le x \le \frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z.$

Решение тригонометрических неравенств, связанных с иррациональностью

Пример. Решить неравенство $\sqrt{14\cos x - 2} \ge -\sqrt{3}\sin x.$

Решение.

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} 14\cdot\cos x - 2 \ge \left(-\sqrt{3}\sin x\right)^2, \\ \sin x \le 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x > 0, \\ 14\cos x - 2 \ge 0. \end{cases}$

Решим систему а):

а) $\begin{cases} 14\cdot\cos x-2\ge\left(-\sqrt{3}\sin x\right)^2, \\ \sin x\le 0. \end{cases}$

Решим первое неравенство:

$14\cos x-2\ge 3\sin^2 x$; $14\cos x-2\ge 3(1-\cos^2 x)$;

$3\cos^2 x+14\cos x-5\ge 0$.

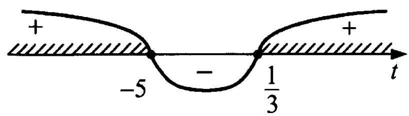
Пусть $\cos x=t$, тогда $3t^2+14t-5\ge 0$;

$3t^2+14t-5=0$;

$D=196+60=256=16^2$;

$t=\dfrac{-14\pm16}{6}$; $t=\dfrac{1}{3}$ или $t=-5$.

Итак, $\left[\begin{array}{l} \cos x\le -5; \\ \cos\ge\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$



Учитывая это, разобьем систему (а) на совокупность двух систем:

$\begin{cases} \cos x\le -5, \\ \sin x\le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x\ge\dfrac{1}{3}; \\ \sin x\le 0. \end{cases}$

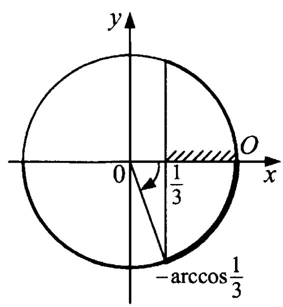


Рис. 35

Первая из этих систем не имеет решений, так как $-1\le\cos x\le 1$.

Вторую систему неравенств решим с помощью тригонометрической окружности:

$$-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\le x\le 2\pi n,\ n\in Z.$$

б) Решим систему (б): $\begin{cases} \sin x>0, \\ \cos x\ge\dfrac{1}{7}. \end{cases}$

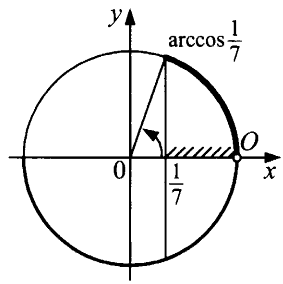


Рис. 36

$2\pi n < x \le \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n,\ n \in Z$. Объединяя решения совокупности систем (а) и (б), получим $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n \le x \le \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n;\ n \in Z$.

Ответ: $\left[-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \arccos\frac{1}{7} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sqrt{1+3\cos x} \ge \sin x$;
2) $\sqrt{1-2\sin x} \ge \cos x$;
3) $\sqrt{1-\sin 2x} \ge -\cos x$;
4) $\sqrt{1+\sin 2x} < -\sin x$.

Ответы: 1) $\left[-\pi + \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;
2) $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ 2\pi n\right],\ n \in Z$; 3) $\left[-\pi + \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right],\ n \in Z$;
4) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

Контрольные работы

Вариант № 1

1) $2\sin x + 3\cos x = 4$;
2) $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
3) $2\sin^2 x + \cos x - 3\sin x + 1 = 0$;
4) $\sin x + \cos 4x = 2$;
5) $15(\sin^2 2x + \sin x + \cos^2 2x)^2 = 17 + 31\sin x$;
6) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 4 = 3\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x$;
7) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8}$.

Вариант № 2

1) $5 \sin x + \cos 2x - 4 \cos^2 x = 0$;
2) $\sqrt{2\cos x \cdot \sin 2x} = \sqrt{5\sin x + 4\sin 2x}$;
3) $2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 4 \cos^2 3x$;
4) $\sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x$;
5) $4 \sin^2 x - 2 \sin 2x - \cos 2x = 4$;
6) $\cos (8\pi (6x - 5)^2) + \sin (2\pi (6x - 5)^2) = 2$;
7) $2 \sin x - \sin 2x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$.

Вариант № 3

1) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3} \cdot (\sin 6x + \cos 8x)$;
2) $\cos x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 3x$;
3) $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2\operatorname{tg} x = 0$;
4) $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$;
5) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$;
6) $\sin x + \sin 2x = \cos x$;
7) $\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \cdot \sin^2 2x$.

Вариант № 4

1) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$;
2) $6 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$;
3) $5 \sin^4 2x - 4 \sin^2 2x \cos^2 2x - \cos^4 2x + 4 \cos 4x = 0$;
4) $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$;
5) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{2}$;
6) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$;
7) $4 \sin^2 2x - 2 \cos^2 2x = \cos 8x$.

Вариант № 5

1) $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 6 \cos^2 x = 5$;
2) $5 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0$;
3) $2 \cos^2 (80° - x) + \cos 2x = 1 + \sin 20°$;
4) $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos 2x = 1$;

5) $2\cos^2 x + 14\cos x = 3\sin^2 x$;

6) $\sin 3x = \cos 2x$;

7) $15 - 15\cos 2x + 2\sin 2x \cdot \cos 2x - 15\sin 2x = 0$.

Вариант № 6

1) $3\sin x = 2(1 - \sin^2 x)$;

2) $\sin x - 5\cos x = 0$;

3) $\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$;

4) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$;

5) $\sin 5x = \sin 3x$;

6) $2\cos x \operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 3x = 0$;

7) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}(\pi \cdot \sin x)$.

Вариант № 7

1) $\sqrt{5\operatorname{tg} x + 10} = \frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x}$;

2) $3\sin^4 x - 10\sin^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = 0$;

3) $\cos 3x \sin 9x = \cos 5x \sin 7x$;

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

5) $3\sin 7x + 4\cos 7x = 1$;

6) $1 + \sin 2x = 2\sin x + 2\cos x$;

7) $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

Вариант № 8

1) $2\sin^3 x - \cos^3 x = 1$;

2) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 3 - 3\sin^2 x$;

3) $4\cos^3 x - 3\cos x - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 0$;

4) $8\cos x + 15\sin x = 17$;

5) $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

6) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$;

7) $\sin x + \cos 10x = 2$.

Вариант № 9

1) $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$;

2) $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3$;

3) $\sqrt{3}\ \sin x - \cos x = 1$;

4) $\sin^3\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - 3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos^3\frac{x}{3} = 0$;

5) $\sin x - \sin 2x = 2\sin^2\frac{x}{2}$;

6) $2\sin 4x + 16\sin^3 x \cdot \cos x + 3\cos 2x - 5 = 0$;

7) $\cos 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Вариант № 10

1) $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$;

2) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 1$;

3) $\sin 2x - \cos x = 0$;

4) $\cos 2x + \sin 2x = 1$;

5) $10\cos 2x + 8 = \operatorname{tg} x$;

6) $\cos x - \sin 5x = \sin 7x$;

7) $\sin x + \cos x = 1$.

Вариант № 11

1) $\sin^2 x - \sqrt{3}\ \sin 2x - \cos^2 x = -2;\ 0 < x < 4$;

2) $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

3) $\sin y + \cos 3y = 1 - 2\sin^2 y + \sin 2y$;

4) $\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$;

5) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

6) $2(1 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x) + 1 - \cos 4x = 0$;

7) $-2 + \sin 2x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x - \cos 2x} = 0$.

Вариант № 12

1) $\cos 6x = \cos 2x$;

2) $\cos^{-1} 3t - \cos 3t = 5\sin 3t$;

3) $\sin x + \sqrt{3}\ \cos x = 1$;

4) $\sin 2x + \cos 3x = 2$;

5) $\sin x + \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x$;

6) $\frac{4\cos x}{\sin x} : \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) + \sin^2 2x + 1 = 0$;

7) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$.

Ответы к контрольным работам

Вариант № 1

1) $\varnothing$;

2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in Z$;

3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

5) $(-1)^{n+1} \cdot \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z;\ (-1)^k \cdot \arcsin\frac{2}{5} + \pi k,\ k \in Z$;

6) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

7) $\frac{2\pi n}{7},\ n \in Z;\ \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9},\ k \in Z.$

Вариант № 2

1) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $\pi n, n \in Z;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

3) $\frac{5\pi}{48} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;\ -\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{4} \cdot k,\ k \in Z$;

4) $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \frac{13\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in Z$;

5) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in Z;\ -\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$;

6) $\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{4} + n},\ n = 0, 1, 2, \ldots$;

7) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \pi + 2\pi k, k \in Z.$

Вариант № 3

1) $\pi n + \frac{\pi}{4},\ n \in Z;\quad \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{7} \cdot k,\ k \in Z$;

2) $\frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z;\ \frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{16}, n \in Z;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in Z$;

3) $\pi k,\ k \in Z; \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{7}{12}}\right) + 2\pi m, m \in Z$;

4) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z; -\operatorname{arctg} 3+\pi k,\ k\in Z;$

5) $\pi n,\ n\in Z; -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

6) $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$

7) $(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{19}}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

Вариант № 4

1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;$

2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z; \operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z;$

3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;\ \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

4) $8\pi l,\ l\in Z;$

5) $\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z;\ \frac{7\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z;$

6) $\frac{2\pi}{3}\cdot n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in Z;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

7) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$

Вариант № 5

1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z; -\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;$

2) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{12}{5}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in Z;$

3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z; \frac{7\pi}{36}+\pi n,\ n\in Z;$

4) $\pi+4\pi n,\ n\in Z;$

5) $\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n,\ n\in Z;$

6) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

7) $\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

Вариант № 6

1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

2) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in Z;$

3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z;$

4) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

5) $\pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z;$

6) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z;$

7) $2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n,\ n \in Z.$

Вариант № 7

1) $\pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k,\ k \in Z;$

2) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$

3) $\frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z;$

4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(2 - \sqrt{2}\right) + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;$

5) $(-1)^n \cdot \frac{1}{7} \arcsin \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \arcsin \frac{4}{5} + \frac{\pi n}{7},\ n \in Z;$

6) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

7) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Вариант № 8

1) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

2) $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$

3) $\frac{\pi k}{2},\ k \in Z;$

4) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{8}{17}+2\pi n,\ n\in Z;$

5) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$

6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ (-1)k\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z;$

7) $\varnothing$.

Вариант № 9

1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$

2) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z;\ \frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2}{5}\pi n,\ n\in Z;$

3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\ \pi+2\pi k,\ k\in Z;$

4) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z;$

5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z;$

6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

7) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Вариант № 10

1) $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z;$

2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z;$

3) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z;$

4) $\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$

5) $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z;$

6) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^n\cdot\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z;$

7) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ 2\pi k,\ k\in Z.$

Вариант № 11

1) $\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6};$

2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$

3) $2\,\pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z;$

4) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

5) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3};\ n \in Z;\ \pi k,\ k \in Z;$

6) $\varnothing;$

7) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ -\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \pi k,\ k \in Z.$

Вариант № 12

1) $\frac{\pi n}{4},\ n \in Z;$

2) $\frac{\pi n}{3},\ n \in Z;\ \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} 5 + \frac{\pi n}{3},\ k \in Z;$

3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

4) $\varnothing;$

5) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ 2\pi l,\ l \in Z;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$

6) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

7) $\frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

§5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Иррациональные уравнения

Уравнение $A(x) = B(x)$ называется иррациональным, если хотя бы одно из выражений иррационально. Один из основных методов решения иррациональных уравнений — метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень. Нужно помнить при этом, что уравнение $A^n(x) = B^n(x)$ при четном n является следствием уравнения $A(x) = B(x)$, а при нечетном равносильно уравнению $A(x) = B(x)$. Следовательно, при возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней, и поэтому необходима проверка корней.

Иррациональное уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = E(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} E(x) \geq 0, & (1) \\ f(x) = E^{2n}(x). & (2) \end{cases}$$

Излишне требовать, чтобы $f(x) \geq 0$, выполнение этого неравенства следует из уравнения (2).

Пример 1.

Решить уравнение $\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1, \\ x\left(x^2 - x - 1\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 0{,}5\left(1 \pm \sqrt{5}\right). \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 2.

$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

Решение.

Уединим один из корней: $\sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат $3x+7=\left(2+\sqrt{x+1}\right)^2$; $x+1=2\sqrt{x+1}$.

После вторичного возведения в квадрат обеих частей уравнения получим уравнение $x^2-2x-3=0$ с корнями $x=-1$, $x=3$.

Проверка показывает, что -1 и 3 являются корнями исходного уравнения.

Ответ: -1; 3.

Некоторые иррациональные уравнения удается решить, используя **свойство монотонности функций**.

Пример 3.

Решить уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Решение.

Функция $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}$ — возрастающая на всей области определения. Легко видеть, что $x_0=2$ — корень уравнения. Других корней уравнение иметь не может (в правой части исходного уравнения — константа).

Ответ: 2.

Пример 4.

Решить уравнение $\sqrt{x-3}=5-x$.

Решение.

Функция $\sqrt{x-3}$ — возрастающая, функция $5-x$ — убывающая (на общей области определения).

Уравнение (исходное) не может иметь более одного корня. Легко угадать, что $x_0=4$ — единственный корень.

Ответ: 4.

Пример 5.

Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение.

Функция $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ — возрастающая на всей области определения. В правой части уравнения — константа. Следовательно, уравнение не может иметь более одного корня, который легко угадывается: $x_0 = 1$.

Ответ: 1.

Пример 6.

Решить уравнение $\sqrt{5-x} - \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-15} = 2$.

Решение.

Найдем **область определения** функции, стоящей в левой части исходного уравнения:

$\begin{cases} 5-x \geq 0, \\ 7-x \geq 0, \\ 2x-15 \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 7, \\ x \geq 7{,}5. \end{cases}$ Область определения — пустое множество. Уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Пример 7.

Решить уравнение $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1} = 3 - 5x^2$.

Решение.

Используем **метод оценки**: $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1} \geq 3$, $3 - 5x^2 \leq 3$.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1} = 3, \\ 3 - 5x^2 = 3, \end{cases}$ решением которой является число 0.

Ответ: 0.

Некоторые иррациональные уравнения можно решить с помощью **введения новой переменной**.

Пример 8.

Решить уравнение $2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33$.

Решение.

Пусть $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = t$, тогда $2x^2 + 3x = t^2 - 9$.

Исходное уравнение примет вид $t^2 + t - 42 = 0$; $t_1 = -7$, $t_2 = 6$.

Имеем $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -7$ или $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6$.

(решений нет) $2x^2 + 3x + 9 = 36$;

$x = 3$, $x = -4{,}5$.

Ответ: $-4{,}5$; 3.

Пример 9.

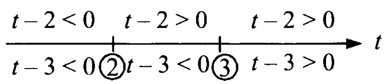
Решить уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Р е ш е н и е.

Пусть $\sqrt{x-1}=t$, $t \ge 0$. Тогда $x = t^2 + 1$, и исходное уравнение примет вид: $\sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-6t+9}=1$;

$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1$; $|t-2|+|t-3|=1$.

Определим знаки выражений, стоящих под модулем:



$\begin{cases} t \le 2, \\ -t+2-t+3=1, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2 < t \le 3, \\ +t-2-t+3=1, \end{cases}$ или $\begin{cases} t \ge 3, \\ t-2+t-3=1, \end{cases}$

$t=2$ все $t \in (2;\ 3]$ $t=3$.

Таким образом, $2 \le t \le 3$, $2 \le \sqrt{x-1} \le 3$, $4 \le x-1 \le 9$, $5 \le x \le 10$.

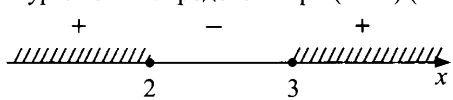
О т в е т: [5; 10].

Пример 10.

Решить уравнение $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

Р е ш е н и е.

Правая часть уравнения определена при $(x-2)(x-3) \ge 0$,



При $x \le 2$ левая часть уравнения отрицательна, а правая — положительна. Следовательно, $x \ge 3$.

Преобразуем исходное уравнение к виду

$6\left(\sqrt[6]{x-3}\right)^2+\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^2-5\sqrt[6]{x-2}\cdot\sqrt[6]{x-3}=0$ — уравнение **однородное второй степени** относительно $\sqrt[6]{x-2}$ или $\sqrt[6]{x-3}$. Разделим обе части уравнения на $\left(\sqrt[6]{x-3}\right)^2 \ne 0$, так как $x = 3$ не является корнем уравнения.

$6+\left(\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x-3}}\right)^2-5\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x-3}}=0$. Пусть $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x-3}}=t$, тогда $t^2-5t+6=0$,

$D=1$, $t_1=2$, $t_2=3$.

Значит, $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x-3}}=2$ или $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x-3}}=3$ и $x=3\dfrac{1}{63}$; или $x=3\dfrac{1}{728}$.

Ответ: $3\dfrac{1}{63}$; $3\dfrac{1}{728}$.

Пример 11.

Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}=3$.

Решение.

I способ. Пусть $\sqrt[3]{2-x}=u$, $\sqrt[3]{7+x}=v$, тогда

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9, \end{cases} \qquad \begin{cases} u=3-v, \\ (3-v)^3+v^3=9, \end{cases} \qquad \begin{cases} u=3-v, \\ v^2-3v+2=0, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2, \\ v=1, \end{cases} \\ \begin{cases} u=1, \\ v=2, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=2, \\ \sqrt[3]{7+x}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1, \\ \sqrt[3]{7+x}=2, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: –6; 1.

II способ. Применим формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ и возведем обе части исходного уравнения в куб:

$$2-x+7+x+3\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}\right)}_{3}=27,$$

$$9\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=18,\ x^2+5x-6=0,\ x=1,\ x=-6.$$

Ответ: –6; 1.

Пример 12.

Решить уравнение $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$.

Решение.

Найдем **область определения** функции в левой части:

$$\begin{cases} 11x+3\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \\ 9x+7\ge 0, \\ x-2\ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{11}, \\ x\le 2, \\ x\ge -\dfrac{7}{9}, \\ x\ge 2. \end{cases}$$

$x = 2.$

Область определения состоит из одного числа — $x = 2$. Проверка показывает, что $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: 2.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4;$
2) $\sqrt{3+x}=3-x;$
3) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-1}}-2\cdot\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}}=1;$
4) $\sqrt{(x-1)^2(x-4)}=|x-1|\sqrt{16-x^2};$
5) $x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=4;$
6) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4};$
7) $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1.$

Ответы:

1) 2;
2) 0;
3) 2,5;
4) 1; 4;
5) 1;
6) 2;
7) [3; 8].

Иррациональные неравенства

Иррациональными неравенствами называются неравенства, в которых неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаками радикалов. При решении иррациональных неравенств следует помнить, что неравенство можно возводить в квадрат лишь в том случае, когда обе части неотрицательны. Необходимо учитывать допустимые значения переменной, так как проверка подстановкой в неравенствах невозможна из-за бесконечного множества решений. Рассмотрим некоторые виды иррациональных неравенств и методы их решения.

Полезно помнить, что неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \varphi(x)$ равносильно совокупности систем $\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) \geq (\varphi(x))^{2n} \end{cases}$ или $\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \varphi(x)$ равносильно системе $\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) \leq (\varphi(x))^{2n}, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Рассмотрим некоторые виды иррациональных неравенств.

I. Простейшие иррациональные неравенства

Пример.

Решить неравенства:

а) $\sqrt{x-2} > 3$; б) $\sqrt{x-2} < 3$; в) $\sqrt{x-2} > -3$; г) $\sqrt{x-2} < -3$.

Решение.

а) $\sqrt{x-2} > 3$; $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 > 3^2$; $x-2 > 9$; $x > 11$.

б) $\sqrt{x-2} < 3$;

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x-2}\right)^2 < 3^2, \\ x-2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 11, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$2 \leq x < 11$.

в) $\sqrt{x-2} > -3$;

$x-2 \geq 0$;

$x \geq 2$.

г) $\sqrt{x-2} < -3$,

решений нет, то есть неотрицательная левая часть не может быть меньше отрицательного числа.

Ответ: а) $x > 11$; б) $2 \leq x < 11$; в) $x \geq 2$; г) решений нет.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sqrt{x+3}\ge 5$; 5) $\sqrt{4-x}>7$; 9) $\sqrt{x^2+8x-5}<2$;

2) $\sqrt{x+3}\le 5$; 6) $\sqrt{4-x}<7$; 10) $\sqrt{x^2+8x-5}>2$;

3) $\sqrt{x+3}\ge -5$; 7) $\sqrt{4-x}>-7$; 11) $\sqrt{x^2+8x-5}>-2$;

4) $\sqrt{x+3}\le -5$; 8) $\sqrt{4-x}<-7$; 12) $\sqrt{x^2+8x-5}<-2$.

О т в е т : 1) $[22;+\infty)$; 2) $[-3;\ 22]$; 3) $[-3;+\infty)$; 4) решений нет; 5) $(-\infty;-45)$;

6) $(-45;\ 4]$; 7) $(-\infty;\ 4]$; 8) решений нет;

9) $\left(-9;-4-\sqrt{21}\right]\cup\left[-4+\sqrt{21};1\right)$;

10) $(-\infty;-9)\cup(1;+\infty)$; 11) $\left(-\infty;-4-\sqrt{21}\right]\cup\left[-4+\sqrt{21};+\infty\right)$;

12) решений нет.

II. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)}\ge\varphi(x)$

$$\begin{cases}\varphi(x)\ge 0\\ f(x)\ge(\varphi(x))^{2n}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\varphi(x)<0\\ f(x)\ge 0.\end{cases}$$

Пример.

Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}-3-x>0$.

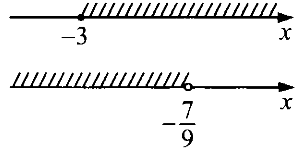
Р е ш е н и е .

$\sqrt{x^2-3x+2}>3+x$. Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\text{а) }\begin{cases}3+x\ge 0,\\ x^2-3x+2>(3+x)^2\end{cases} \text{ или б) } \begin{cases}3+x<0,\\ x^2-3x+2\ge 0.\end{cases}$$

Решим первую систему совокупности.

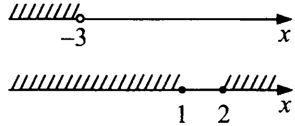
$$\begin{cases}x\ge -3,\\ -9x>7,\end{cases}$$



$x \in \left[-3; -\frac{7}{9}\right)$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x < -3, \\ (x-1)(x-2) \geq 0, \end{cases}$$



$x \in (-\infty; -3)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sqrt{1+4x-x^2} > x-2$;
2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x} \geq x - \frac{2}{5}$;
3) $\sqrt{x^2-10x+16} > 2x+4$;
4) $\sqrt{x^2+2x-8} > 12-2x$.

Ответ: 1) $\left[2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{2,5}\right)$;

2) $\left[0; \frac{4}{5}\right]$; 3) $(-\infty; 0]$;

4) $(4; +\infty)$.

III. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \varphi(x)$

Неравенство равносильно системе $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \varphi(x)$.

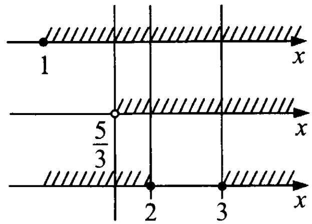
$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) \leq (\varphi(x))^{2n}, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример.

Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} < x-1$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-5x+6<(x-1)^2, \\ x^2-5x+6\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ 3x>5, \\ (x-2)(x-3)\ge 0. \end{cases}$$



О т в е т : $\left(\frac{5}{3}; 2\right]\cup[3; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sqrt{x^2-10x+16}<2x+4$;
2) $\sqrt{x^2+2x-8}<12-2x$;
3) $\sqrt{x^2-5x+6}\le x-2$;
4) $\sqrt{x-3}<5-x$;
5) $\sqrt{x^2-5x+4}<\sqrt{4-x}$.

О т в е т : 1) $(0; 2]\cup[8; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4]\cup[2; 4)$;
3) $[3; +\infty)\cup\{2\}$; 4) [3; 4) 5) (0; 1].

IV. Иррациональные неравенства, решаемые методом интервалов

При решении иррациональных неравенств можно также применять метод интервалов. Этот метод основан на следующем утверждении.

Если функция f на интервале $(a; b)$ непрерывна и не обращается в ноль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пример 1.

Решить неравенство $\dfrac{4x^2-8x-5}{\sqrt{3x^2-6x}}\le\dfrac{2x+1}{3}$.

Решение.

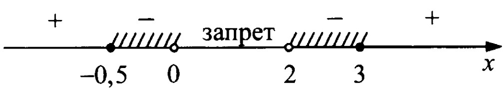
Область определения неравенства: $3x^2 - 6x > 0$, $x\,(x - 2) > 0$, $\left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>2. \end{array}\right.$

На области определения исходное неравенство равносильно следующему:

$$(2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x(x-2)}\right)\le 0.$$

Для решения этого неравенства применим метод интервалов. Рассмотрим функцию $f(x)=(2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x(x-2)}\right)$. Решив уравнение $f(x) = 0$, находим нули функции: $-0{,}5$; 3.

На каждом из промежутков $(-\infty; -0{,}5)$, $(-0{,}5; 0)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в ноль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак.



Ответ: $[-0{,}5; 0)\cup(2; 3]$.

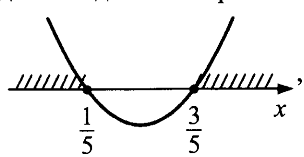
Пример 2.

Решить неравенство $\left(3x^2-4x+1\right)\sqrt{25x^2-20x+3}\le 0.$

Решение.

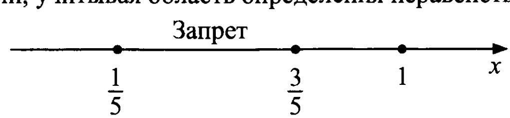
Найдем область определения данного неравенства.

$25x^2 - 20x + 3 \ge 0$

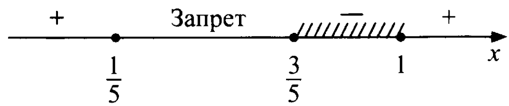


, $\left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{1}{5}, \\ x\ge \dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$

Нули функции $f(x)=\left(3x^2-4x+1\right)\sqrt{25x^2-20x+3}$ найдем из уравнения $f(x) = 0$: $x = 1$; $x=\frac{1}{5}$, $x=\frac{3}{5}$. Отметим на числовой прямой нули функции, учитывая область определения неравенства.



На каждом из промежутков $\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5};\ 1\right)$, $(1;\ +\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в ноль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак.



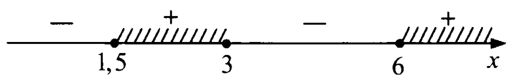
О т в е т : $\left[\frac{3}{5};1\right]\cup\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Пример 3. Решить неравенство

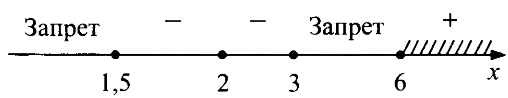
$$(x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)} \geq 0.$$

Р е ш е н и е . Найдем область определения неравенства:

$(2x-3)(x-3)(x-6)\geq 0.$



Нули функции $f(x)=(x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)}$ найдем, решив уравнение $f(x)=0$: $x=2$; $x=1{,}5$; $x=3$; $x=6$.



О т в е т : $[6;+\infty)\cup\{1{,}5;\ 2;\ 3\}$.

Пример 4.

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2.$

Р е ш е н и е .

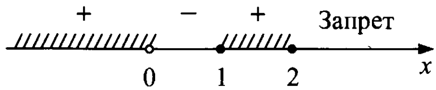
Область определения неравенства: $\begin{cases}2-x\geq 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x<0,\\ 0<x\leq 2.\end{array}\right.$

Преобразуем исходное неравенство к виду: $\dfrac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x}\geq 0.$

Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x}$ имеет нули: $\sqrt{2-x}=3-2x$, $2-x=9-12x+4x^2$;

$$4x^2 - 11x + 7 = 0; \quad \left[\begin{aligned} &x = 1, \\ &x = \frac{7}{4} \end{aligned} \right. \text{(посторонний корень).}$$

Отметим нули функции на области определения неравенства и определим знаки функции f на получившихся интервалах:



Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$.

Пример 5.

Решить неравенство $(x-3)\sqrt{x^2-4} \le x^2 - 9$.

Решение.

$(x-3)\sqrt{x^2-4} - (x-3)(x+3) \le 0;$

$(x-3)\left(\sqrt{x^2-4} - x - 3\right) \le 0.$

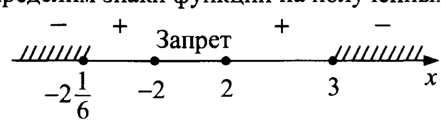
Найдем область определения неравенства:

$$x^2 - 4 \ge 0, \quad \left[\begin{aligned} &x \ge 2, \\ &x \le -2. \end{aligned} \right.$$

Найдем нули функции, $f(x) = (x-3)\left(\sqrt{x^2-4} - x - 3\right)$:

$$f(x) = 0 \text{ при } \left[\begin{aligned} &x = 3, \\ &x = -2\frac{1}{6}. \end{aligned} \right.$$

Отметим на числовой прямой (на области определения) нули функции f и определим знаки функции на полученных промежутках:



Ответ: $\left(-\infty; -2\frac{1}{6}\right] \cup [3; +\infty) \cup \{-2; 2\}$.

Пример 6.

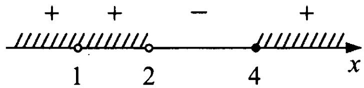
Решить неравенство

$$\frac{(x-3)(x-5)}{1-x} \cdot \sqrt{\frac{x-4}{x-2}} \le 0.$$

Р е ш е н и е.

Область определения неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-2} \geq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x < 1, \\ x \geq 4. \end{array}\right.$$

Нули функции $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-5)}{1-x} \cdot \sqrt{\dfrac{x-4}{x-2}}$ на области определения: $x = 5, x = 4$.

Отметим на числовой прямой (на области определения) нули функции f и определим знаки функции на полученных промежутках:

О т в е т: $(1; 2) \cup [5; +\infty) \cup \{4\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $(x-3)(x-5)\sqrt{x^2-10x+24} \leq 0$

О т в е т: $3 \leq x \leq 4, x = 6$.

2) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-6x+5}\sqrt{x+9} \leq 0$

О т в е т: $1 < x < 5, x = -9$.

3) $(x^2-7x+10)\left(\sqrt{7-2x}-x-4\right) > 0$

О т в е т: $x < -1; 2 < x \leq 3{,}5$.

4) $\dfrac{x-3\cdot\sqrt{x-2}}{x^2-6x-27} \leq 0$

О т в е т: $2 \leq x \leq 3; 6 \leq x < 9$.

5) $\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \geq \dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$

О т в е т: $-1 \leq x \leq 0; x = 4$.

6) $(|x|-1)\sqrt{-x^2+x+6} \leq 0$

О т в е т: $[-1; 1] \cup \{-2; 3\}$.

V вид. Иррациональные неравенства, решаемые методом подстановки

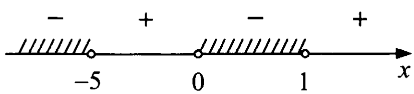
Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}+4<5\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{2x+1}}$.

Р е ш е н и е.

Пусть $\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}=t$, тогда неравенство примет вид:

$$t+4<\frac{5}{t},\ \frac{t^2+4t-5}{t}<0,\ \frac{(t-1)(t+5)}{t}<0.$$



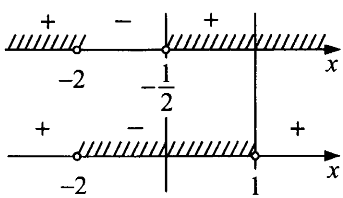
Следовательно, $t<-5$ или $0<t<1$.

Получим неравенства (1) $\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}<-5$

или (2) $0<\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}<1.$

Неравенство (1) не имеет решений. Решим неравенство (2):

$$0<\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x+2}}<1,\ 0<\frac{2x+1}{x+2}<1,\ \begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2}>0,\\ \dfrac{2x+1}{x+2}<1;\end{cases}\ \begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2}>0,\\ \dfrac{x-1}{x+2}<0.\end{cases}$$



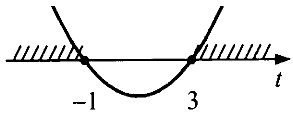
О т в е т: $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\dfrac{2x+1}{x}-2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}\geq 3$.

Р е ш е н и е.

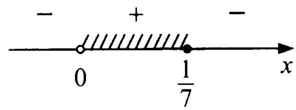
Пусть $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}=t$, тогда неравенство примет вид: $t^2-2t-3\geq 0$.



$t \le -1$ или $t \ge 3$.

$\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}} \le -1$ не имеет решений.

$\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}} \ge 3,\ \dfrac{2x+1}{x} \ge 9,\ \dfrac{1-7x}{x} \ge 0$



О т в е т: $\left(0; \dfrac{1}{7}\right]$.

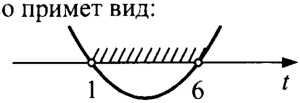
Пример 3.

Решить неравенство $2x^2 - 3x + 7 < 7\sqrt{(2x-1)(x-1)}$.

Р е ш е н и е.

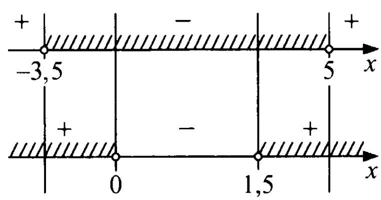
$\sqrt{(2x-1)(x-1)} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$. Пусть $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = t$, тогда $2x^2 - 3x + 1 = t^2$ и исходное неравенство примет вид:

$t^2 - 7t + 6 < 0$



Таким образом, $1 < t < 6$, то есть $1 < \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 6$, откуда $1 < 2x^2 - 3x + 1 < 36$.

Имеем $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 35 < 0, \\ 2x^2 - 3x > 0. \end{cases}$



О т в е т: $(-3{,}5; 0) \cup (1{,}5; 5)$.

Пример 4.

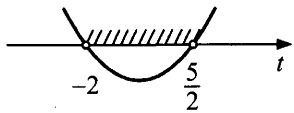
Решить неравенство $\sqrt{7 - \log_2 (x-1)^2} + \log_2 (x-1)^4 > 4$.

Р е ш е н и е.

Пусть $\sqrt{7 - \log_2 (x-1)^2} = t$, тогда $\log_2 (x-1)^2 = 7 - t^2$;

$2\log_2(x-1)^2 = 14-2t^2$, то есть $\log_2(x-1)^4 = 14-2t^2$.

Исходное неравенство примет вид: $2t^2 - t - 10 < 0$.



Значит, $-2 < t < \frac{5}{2}$, то есть $-2 < \sqrt{7-\log_2(x-1)^2} < \frac{5}{2}$,

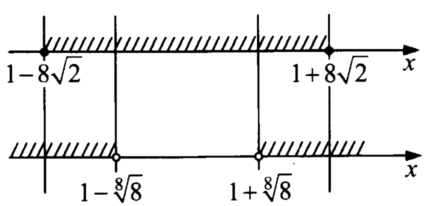
$$\begin{cases} 7-\log_2(x-1)^2 < \frac{25}{4}, \\ 7-\log_2(x-1)^2 \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x-1)^2 > \frac{3}{4}, \\ \log_2(x-1)^2 \le 7. \end{cases}$$

Таким образом, $\frac{3}{4} < \log_2(x-1)^2 \le 7$, $\frac{3}{4} < 2\log_2|x-1| \le 7$;

$\frac{3}{8} < \log_2|x-1| \le \frac{7}{2}$; $2^{\frac{3}{8}} < |x-1| \le 2^{\frac{7}{2}}$; $\begin{cases} |x-1| \le 2^{\frac{7}{2}}, \\ |x-1| > 2^{\frac{3}{8}}; \end{cases}$ $\begin{cases} -2^{\frac{7}{2}} \le x-1 \le 2^{\frac{7}{2}}, \\ \left[\begin{array}{l} x-1 > 2^{\frac{3}{8}}, \\ x-1 < -2^{\frac{3}{8}}; \end{array} \right. \end{cases}$

$\begin{cases} 1-2^{\frac{7}{2}} \le x \le 1+2^{\frac{7}{2}}, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1+2^{\frac{3}{8}}, \\ x < 1-2^{\frac{3}{8}}; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} 1-8\sqrt{2} \le x \le 1+8\sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1+\sqrt[8]{8}, \\ x < 1-\sqrt[8]{8}. \end{array} \right. \end{cases}$



Ответ: $\left[1-8\sqrt{2}; 1-\sqrt[8]{8}\right) \cup \left(1+\sqrt[8]{8}; 1+8\sqrt{2}\right]$.

Пример 5.

Решить неравенство $\sqrt{1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)}<\log_5\left(5x^2-20x+25\right)$.

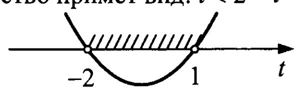
Р е ш е н и е.

Пусть $\sqrt{1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)}=t$, тогда $\log_5\left(x^2+4x+5\right)=1-t^2$ и

$$\log_5\left(5x^2-20x+25\right)=\log_5 5\left(x^2-4x+5\right)=$$

$$=1+\log_5\left(x^2-4x+5\right)=2-t^2.$$

Исходное неравенство примет вид: $t<2-t^2$ или $t^2+t-2<0$.



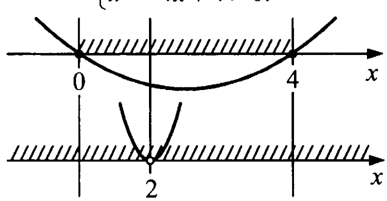
Таким образом, $-2<t<1$ или $-2<\sqrt{1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)}<1$.

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)<1,\\ 1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\log_5\left(x^2-4x+5\right)>0,\\ \log_5\left(x^2-4x+5\right)\le 1.\end{cases}$$

Таким образом, $0<\log_5\left(x^2-4x+5\right)\le 1$,

$1<x^2-4x+5\le 5$ или $\begin{cases}x^2-4x\le 0,\\ x^2-4x+4>0.\end{cases}$



О т в е т: $[0;2)\cup(2;4]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $x^2-5x+6<3\sqrt{(x-1)(x-4)}$

О т в е т: $0<x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$; $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<x<5$.

2) $3^x-1<\sqrt{9^x-3^x-2}$ О т в е т: $x>1$.

3) $\sqrt{\log_4\left(-4+8x-2x^2\right)} > \log_2\left(-2+4x-x^2\right)$

О т в е т : $2-0{,}5\sqrt{6} \le x < 2;\ 2 < x \le 2+0{,}5\sqrt{6}.$

4) $2^x - 1 \ge \sqrt{4^x + 2^{x+1} - 3}$

О т в е т : $x = 0.$

5) $\log_2 \dfrac{4}{x} - 2\sqrt{\log_2 \sqrt{x}} + 2 < 0$

О т в е т : $x > 4.$

VI. Тригонометрия и иррациональность

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{1-2\sin x} \ge \cos x.$

Р е ш е н и е .

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases}\cos x \ge 0,\\ 1-2\sin x \ge \cos^2 x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x < 0,\\ 1-2\sin x \ge 0.\end{cases}$

Решим систему (а):

$\begin{cases}\cos x \ge 0,\\ \left(1-\cos^2 x\right)-2\sin x \ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x \ge 0,\\ \sin^2 x - 2\sin x \ge 0;\end{cases}$

$\begin{cases}\cos x \ge 0,\\ \sin x\left(\sin x - 2\right) \ge 0.\end{cases}$

Так как $\sin x - 2 < 0$ всегда, то $\begin{cases}\cos x \ge 0,\\ \sin x \le 0.\end{cases}$

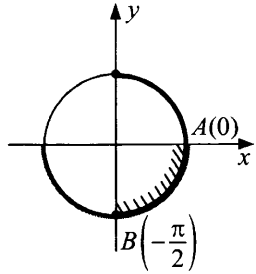


Рис. 37

$-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le 2\pi n,\ n \in Z$ — решения системы (а).

Решим систему (б):

$$\begin{cases}\cos x < 0,\\ \sin x \le \dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

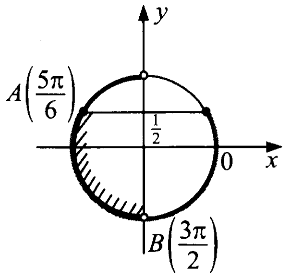


Рис. 38

$\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n \le x < \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ — решения системы (б).

Ответ:

$-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \le x \le 2\pi n,\ n\in Z;$

$\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n \le x < \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

Пример 2.

Решить неравенство $\sqrt{10\sin x-5} \ge -\sqrt{3}\cos x$.

Решение.

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases}\cos x \le 0,\\ 10\sin x-5 \ge 3\cos^2 x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x > 0,\\ 10\sin x-5 \ge 0.\end{cases}$

Решим систему (а):

$$\begin{cases}\cos x \le 0,\\ 10\sin x-5 \ge 3-3\sin^2 x;\end{cases}\quad \begin{cases}\cos x \le 0,\\ 3\sin^2 x+10\sin x-8 \ge 0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \le 0,\\ \sin x \ge \dfrac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x \le 0,\\ \sin x < -4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система из последней совокупности не имеет решений. С помощью тригонометрической окружности найдем решение системы

$$\begin{cases}\cos x \le 0,\\ \sin x \ge \dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

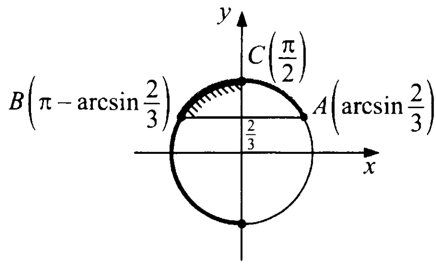


Рис. 39

Решение системы а): $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решим систему б):

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

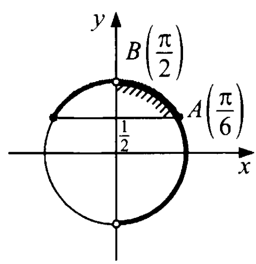


Рис. 40

Решение системы б): $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

О т в е т : $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n.$

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sqrt{4\cos x - 2} \ge -\sqrt{3}\sin x.$

О т в е т : $-\arccos\frac{\sqrt{19}-2}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $\sqrt{1 + \cos x} \le \sin x.$

О т в е т : $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

3) $\sqrt{1+3\cos x} \ge \sin x$.

Ответ: $2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n \le x < 2\pi n$, $n \in Z$.

4) $\sqrt{1-2\sin x} \ge \cos x$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le 2\pi n$; $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{-\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

VII. Иррациональные неравенства, содержащие несколько радикалов

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

Решение.

Область определения неравенства определяется системой

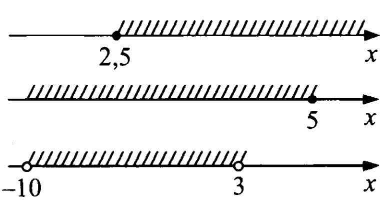
$$\begin{cases} x+6 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ 2x-5 \ge 0, \end{cases} \quad \text{откуда } x \ge 2{,}5.$$

Обе части неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно

системе $\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x+6 > x+1+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x-5} + 2x-5, \end{cases}$

то есть системе $\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ \sqrt{2x^2-3x-5} < 5-x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ 5-x \ge 0, \\ 2x^2-3x-5 < (5-x)^2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x \le 5, \\ 2x^2-3x-5 < 25-10x+x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x \le 5, \\ x^2+7x-30 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x \le 5, \\ -10 < x < 3. \end{cases}$$



Ответ: $[2{,}5; 3)$.

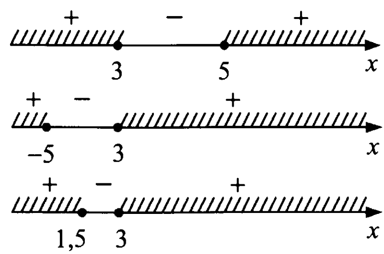
Пример 2.

Решить неравенство $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

Р е ш е н и е.

Найдем область определения данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2-8x+15\ge 0, \\ x^2+2x-15\ge 0, \\ 4x^2-18x+18\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x-5)\ge 0, \\ (x+5)(x-3)\ge 0, \\ 4(x-3)(x-1{,}5)\ge 0. \end{cases}$$



Область определения состоит из $x=3$, $x\le -5$ и $x\ge 5$. При $x=3$ обе части исходного неравенства равны нулю, поэтому число $x=3$ не является его решением. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}. \end{cases}$$

Обе части иррационального неравенства неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат и упрощений получим равносильную систему

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ \sqrt{x^2-8x+15}\cdot\sqrt{x^2+2x-15}>(x-3)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ \sqrt{(x-3)(x+5)}\cdot\sqrt{(x-3)(x-5)}>(x-3)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ \sqrt{(x-3)^2\left(x^2-25\right)}>(x-3)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ (x-3)^2\left(x^2-25\right)>(x-3)^4. \end{cases}$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |x| \geq 5, \\ x^2 - 25 > (x-3)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| \geq 5, \\ x > \dfrac{17}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{17}{3}; +\infty\right)$.

Пример 3.

Решить неравенство $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-5} < \sqrt{4x-7} + \sqrt{5x-9}$.

Решение. Область определения неравенства $x \geq 1{,}8$.

Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-9} < \sqrt{4x-7} - \sqrt{3x-5} \qquad (*)$$

Поскольку $2x - 3 \geq 5x - 9$ при $x \leq 2$, $4x - 7 \geq 3x - 5$ при $x \geq 2$, то область определения исходного неравенства целесообразно разбить на два множества: $1{,}8 \leq x \leq 2$ и $x > 2$, и на каждом из них решить неравенство (*). Если $1{,}8 \leq x \leq 2$, то справедливы неравенства $\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-9} \geq 0$ и $\sqrt{4x-7} - \sqrt{3x-5} \leq 0$, поэтому неравенство (*), а следовательно, и исходное неравенство решений не имеют.

Если $x > 2$, то $\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-9} < 0$ и $\sqrt{4x-7} - \sqrt{3x-5} > 0$, поэтому любое значение $x > 2$ является решением неравенства (*), а следовательно, и исходного неравенства.

Ответ: $x > 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sqrt{9-3x} + \sqrt{4-x} > \sqrt{2x+25}$

Ответ: $-12{,}5 \leq x < 0$.

2) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x-3} > \sqrt{x}$

Ответ: $\frac{3}{4} \leq x < 1$.

3) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$

Ответ: $x > 1$.

4) $\sqrt[6]{2x-4} + \sqrt[3]{x+6} \geq 2 - \sqrt{2-x}$

Ответ: $x = 2$.

5) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} > \sqrt{x}$

Ответ: $0 \leq x < 1$.

§6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Что такое параметр?

Для начала рассмотрим несколько уравнений и неравенств:
$ax^2 + 3x - 4 = 0$,

$bx > 2$, $(m + 2)x = m^2 + 3m + 2$, $x^2 + c \leq 0$.

Все эти уравнения и неравенства схожи тем, что кроме переменных, обозначенных традиционной буквой x, мы видим и другие буквы: a, b, m, c.

Если, например, в уравнении $ax^2 + 3x - 4 = 0$ букву a заменить числом 1, то получим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, числа -4 и 1 — его корни.

Если же $a = 2{,}5$, то получим уравнение $2{,}5x^2 + 3x - 4 = 0$ с корнями -2 и 0,8.

Таким образом, если из множества всех действительных чисел выбрать и зафиксировать какое-либо значение a (b, m, c), и подставить его в данные уравнения и неравенства, то получатся уравнения и неравенства относительно x, то есть с одним неизвестным.

Так как букву a можно заменить любым числом, то мы имеем дело с целым семейством (или классом) уравнений.

Буквенный коэффициент a в уравнении $ax^2 + 3x - 4 = 0$ принято называть **параметром**, а само уравнение — **уравнением с параметром**.

В уравнении $(m + 2)x = m^2 + 3m + 2$ параметр обозначен буквой m.

Аналогичным образом обстоит дело с неравенствами. Например, в неравенстве второй степени $x^2 + c \leq 0$ есть буквенный коэффициент c, который называют **параметром**, а само неравенство является **неравенством с параметром**.

В неравенстве $bx > 2$ параметр обозначен буквой b.

Итак, всякая задача с параметром — это целая серия однотипных задач, которые соответствуют всем значениям параметра.

Решить уравнение или неравенство с параметром — значит:

1) указать, при каких значениях параметра есть решения;
2) найти их;
3) выяснить, при каких значениях параметра решений нет.

То есть для каждого значения параметра нужно указать множество всех решений данного уравнения или неравенства.

Эта задача может формулироваться не только прямым указанием «для каждого значения параметра найти все решения уравнения (неравенства)», но и несколько закамуфлированно, например: «найти все значения параметра, при каждом из которых решение уравнения (неравенства) удовлетворяет заданным условиям».

Задача исследования уравнения или неравенства с параметром, как правило, довольно трудна. Она всегда предполагает рассмотрение нескольких случаев, ни один из которых нельзя потерять.

К тому же при решении можно «приобрести» так называемые посторонние корни, проверка которых для уравнений с параметром — задача весьма непростая.

Поэтому при решении крайне важно понимать, какие преобразования происходят — равносильные или нет, и применять по возможности равносильные.

Равносильность уравнений

Повторим понятие равносильности уравнений и неравенств. И первое, что сделаем, — дадим определение равносильных уравнений.

Пусть имеются два уравнения: $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$. Если всякий корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, всякий корень второго уравнения есть корень первого, то уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ называют равносильными. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Итак, уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*.

Например, уравнения $3x = 9$ и $\sqrt{3x+7}=4$ являются равносильными, значение $x = 3$ — их корень.

Уравнения $x^4 + 7 = 0$ и $3x^2 + 8 = 0$ тоже равносильны, так как ни одно из них не имеет корней, то есть множество корней как первого, так и второго уравнения пусто.

Преобразования, при которых данное уравнение переходит в равносильное уравнение

1. Слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя знак перед этим слагаемым на противоположный:

$$f(x)+p(x)=g(x)+q(x) \Leftrightarrow f(x)+p(x)-q(x)=g(x).$$

Например, уравнение $x^2 + 7 = 3x$ равносильно уравнению $x^2 + 7 - 3x = 0$.

Обратите внимание, что речь идет о переносе слагаемых, а не приведении подобных членов (это обычно делается одновременно). Приведение подобных как раз может быть неравносильным преобразованием.

Например, если в уравнении $x^2+\sqrt{1-x}=\sqrt{1-x}+4$ перенести в левую часть выражение $\sqrt{1-x}$, а затем привести подобные слагаемые, то мы получим уравнение $x^2 = 4$, корнями которого будут числа -2 и 2. Однако число 2 не является корнем исходного уравнения, так как при подстановке этого значения мы получим отрицательное число под знаком корня.

Отметим, что равносильность переноса слагаемых вытекает из другого равносильного преобразования.

2. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному: $\boldsymbol{f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+a=g(x)+a}$, **где** $\boldsymbol{a \in R}$.

Прибавлять к обеим частям уравнения можно любое число, а умножать — только на число, не равное нулю.

3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному:

$$\boldsymbol{f(x)=g(x) \Leftrightarrow a \cdot f(x)=a \cdot g(x)}, \text{ где } \boldsymbol{a \neq 0}.$$

Это преобразование используется так же часто, как и предыдущее. Например, уравнения $\frac{x^2-13}{12}=3$ и $x^2 - 13 = 36$ — равносильны.

Обе части уравнения можно умножать не только на числа, но и на выражения, содержащие переменную. Главное, чтобы это выражение имело смысл на всей области определения уравнения и ни при каком значении x оно не равнялось нулю.

4. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить или разделить на функцию $y=k(x)$ (для всех x выполняется $k(x)\neq 0$), определенную на всей области определения уравнения $f(x)=g(x)$, то получится уравнение, равносильное данному:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow k(x)\cdot f(x)=k(x)\cdot g(x), \text{ где } k(x)\neq 0.$$

Например, уравнение $x(\sin^2 x+3)=4(\sin^2 x+3)$ равносильно уравнению $x = 4$.

Мы рассмотрели основные «арифметические действия» над уравнениями, когда они равносильны или неравносильны. Приведем еще несколько примеров равносильных преобразований.

5. Уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$ при $a > 0$, $a\neq 1$.

Для рассмотрения преобразований 6 и 7 нужно ввести понятие равносильности уравнений на множестве.

Два уравнения называются равносильными на множестве M, если совпадают множества их корней, принадлежащие множеству M, или же оба уравнения на этом множестве корней не имеют.

Например, уравнения $x^2 = 4$ и $x = 2$ равносильны на множестве $(0; +\infty)$.

6. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ *неотрицательны* на некотором множестве M, то на этом множестве уравнения $f(x)=g(x)$ и $f^n(x)=g^n(x)$ равносильны при всех $n\in \mathbb{N}$.

7. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ *положительны* на некотором множестве M, то на этом множестве уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ и $f(x)=g(x)$ равносильны при $a > 0$, $a\neq 1$.

Обратите внимание на ограничения — функции должны быть или положительны, или неотрицательны. Если эти условия не выполняются, то уравнения равносильными не будут.

Перечислив основные равносильные преобразования, назовем наиболее часто встречающиеся преобразования, приводящие к уравнению-следствию.

Если всякий корень одного уравнения является корнем второго, то второе уравнение называют следствием первого.

(Из определения следует, что если два уравнения не являются следствиями друг друга, то они равносильны.)

Итак, к уравнению-следствию приводят:

— освобождение от знаменателя:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)\Rightarrow f(x)=h(x)\cdot g(x);$$

— возведение обеих частей уравнения в четную степень:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f^{2n}(x)=g^{2n}(x),\ n\in \mathrm{N};$$

— замена уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ уравнением $f(x)=g(x)$:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow f(x)=g(x),\ a>0,\ a\neq 1.$$

Для того чтобы лучше разобраться в равносильных преобразованиях, имеет смысл решить следующие задания.

Задания для самостоятельного решения

1. Какие из пар уравнений являются равносильными? Какое из уравнений в парах является следствием другого?

1) $\frac{5x+6}{x-1}=\frac{4-2x}{x-1}$ и $5x+6=4-2x$;

2) $(x+3)^2=(4-x)^2$ и $|x+3|=|4-x|$;

3) $\frac{9-x^2}{x+3}=0$ и $9-x^2=0$;

4) $6x^2-11x+5=0$ и $x-\frac{5}{6}=0$;

5) $\sqrt{(x-5)(x+1)}=0$ и $\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+1}=0$;

6) $3x-2=x$ и $(3x-2)\cdot\sqrt{x-4}=x\cdot\sqrt{x-4}$.

2. При каком значении параметра a уравнения равносильны?

1) $\sin x=a$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;

2) $\arcsin x=a$ и $x=\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg} x=\frac{a}{9}$ и $x=\sqrt{3}$;

4) $5x-101=0$ и $(5x-101)(x^4+a)=0$;

5) $2x-7+\frac{1}{\sqrt{x-2}}=3x-a+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ и $2x-7=3x-a$;

6) $\frac{16x^2-9}{x-a}=0$ и $4x+3=0$.

Указания. Если в первом задании нужно просто найти корни каждого уравнения указанной пары и сравнить их, то второе задание сложнее — это первая тренировка работы с параметрами.

Первые три примера второго задания достаточно просты: нужно решить оба уравнения, причем в уравнении с параметром надо просто выразить переменную x через a. Приравняв полученные выражения для x, можно легко установить значение a.

В четвертом примере нужно установить, при каких значениях a уравнение $(5x - 101)(x^4 + a) = 0$ имеет один корень, а в пятом и шестом нужно обратить внимание на ограничения, которые дают выражение $\sqrt{x-2}$ и выражение $x - a$, стоящие в знаменателе.

Ответы:

1. 1) $(1) \Leftrightarrow (2)$;

2) $(1) \Leftrightarrow (2)$;

3) $(1) \Rightarrow (2)$;

4) $(2) \Rightarrow (1)$;

5) $(2) \Rightarrow (1)$;

6) никакое из уравнений не является следствием другого.

2. 1) при $a = 1$;

2) при $a = \frac{\pi}{6}$;

3) при $a = 3\pi$;

4) при $a > 0$;

5) при $a > 9$;

6) при $a = \frac{3}{4}$.

Линейные уравнения

Линейным уравнением с параметром относительно x называют уравнение вида

$$px - q = 0,$$

где p и q — некоторые выражения, зависящие только от параметра, а x — неизвестное.

Линейное уравнение с параметром приводят к виду $px = q$. При $p \neq 0$ оно имеет единственное решение $x = \frac{q}{p}$, при $p = 0$ и $q = 0$ его решением является любое число; если же $p = 0$, а $q \neq 0$, то уравнение решений не имеет.

Пример 1. Решить уравнение $ax - 4 = 6a - 3x$.

Р е ш е н и е . Перенесем члены, содержащие переменную x, влево, а остальные члены — вправо: $ax + 3x = 6a + 4$.

Слева мы вынесем за скобки общий множитель x. Это преобразование возможно при любом значении a:

$$x(a + 3) = 6a + 4. \qquad (*)$$

Следующее действие — деление обеих частей уравнения на $a + 3$ — возможно лишь при $a \neq -3$. А что же будет, если $a = -3$? Ведь параметр a принимает любые значения из множества действительных чисел, в том числе и -3.

При $a = -3$ уравнение (*) станет таким: $0 \cdot x = -14$.

Очевидно, что оно решений не имеет.

При $a \neq -3$ мы получим $x = \dfrac{6a+4}{a+3}$.

Таким образом, для каждого значения параметра a решения найдены. В частности, $x = \dfrac{4}{3}$ при $a = 0$; $x = \dfrac{5}{2}$ при $a = 1$; $x = -8$ при $a = -2$ и т.д.

Покажем на числовой прямой (рис. 41), что мы не пропустили ни одного значения параметра a, не указав при этом значения x, которое ему соответствует. (Это вовсе не обязательный этап решения, а дополнительная иллюстрация.)

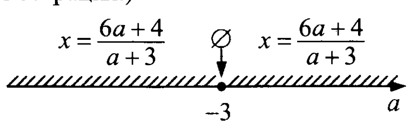


Рис. 41

О т в е т : при $a = -3$ корней нет; при $a \neq -3$ $x = \dfrac{6a+4}{a+3}$.

Пример 2. Решить уравнение $(a - 4)(a + 7)x = (a + 3)(a - 4)$.

Р е ш е н и е . Сразу выделим случаи, когда коэффициент при x равен нулю и из уравнения нельзя найти решение делением обеих частей на этот коэффициент, ведь на ноль делить нельзя.

1) При $a = 4$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, то есть его решением является любое действительное число;

2) при $a = -7$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 44$, то есть в этом случае корней нет;

3) при любом a из объединения промежутков $(-\infty; -7) \cup (-7; 4) \cup (4; +\infty)$ уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{(a+3)(a-4)}{(a-4)(a+7)}, \text{ или } x = \frac{a+3}{a+7}.$$

Например, $x = 0$ при $a = -3$, $x = \frac{1}{2}$ при $a = 1$; $x = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+7}$ при $a = \sqrt{5}$ и т.д.

Покажем, что мы указали, как найти x для любого значения параметра a (рис. 42).

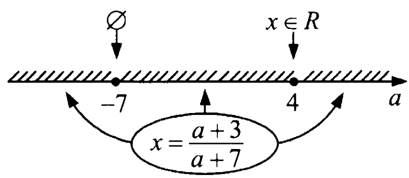


Рис. 42

Ответ: при $a = 4$ x — любое действительное число; при $a = -7$ корней нет; при всех значениях a из множества

$(-\infty; -7) \cup (-7; 4) \cup (4; +\infty)$ $x = \frac{a+3}{a+7}$.

Пример 3. Решить уравнение

$(c+2)^3 \cdot x - 2(c+6)(c+2) \cdot x = 8 - 8(c+5)$.

Решение. В левой части уравнения вынесем за скобки множители $c + 2$ и x:

$(c+2)(c^2 + 4c + 4 - 2c - 12)\,x = -8(c+4)$;

$(c+2)(c^2 + 2c - 8)\,x = -8(c+4)$;

$(c+2)(c-2)(c+4)\,x = -8(c+4)$.

1) При $c = -2$ уравнение примет вид $0 \cdot x = -16$ и корней не имеет;
2) при $c = 2$ уравнение примет вид $0 \cdot x = -48$ и корней не имеет;
3) при $c = -4$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$ и любое действительное число является его корнем;
4) при любом $c \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ корнем уравнения является $x = -\frac{8}{c^2 - 4}$.

На числовой прямой покажем, что для любого значения параметра c мы указали, как найти x.

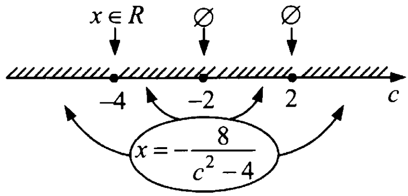


Рис. 43

О т в е т : при $c = -2$ или $c = 2$ корней нет; при $c = -4$ x — любое действительное число; при всех

$c \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ $x = -\dfrac{8}{c^2-4}$.

Задания для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра решить уравнение:

1) $bx + 6 = 5b - 2x$;
2) $(c^2 - 25)x - (c^2 + 4c - 5) = 0$;
3) $(a + 2)^2 x - 15 = 5(a + 2) - 3(a + 2)x$;
4) $(n - 2)^3 x - 2(n + 2)(n - 2)x = -8(n + 3) + 24$;
5) $(k - 1)^5 \cdot x - 4x \cdot (k - 1)^3 = 0$;
6) $(a - 3)^3 x + 4(a - 1) = 8 + (a - 1)(a - 3)x$.

Ответы:

1) при $b = -2$ — решений нет;
   при любом $b \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ — $x = \dfrac{5b-6}{b+2}$;
2) при $c = -5$ — x любое число;
   при $c = 5$ — решений нет;
   при любом $c \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$ — $x = \dfrac{c-1}{c-5}$;
3) при $a = -2$ — решений нет;
   при $a = -5$ — x любое число;
   при любом $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; -2) \cup (-2; +\infty)$ — $x = \dfrac{5}{a+2}$;
4) при $n = 0$ — x любое число;
   при $n = 2$ или $n = 6$ — решений нет;

при любом $n \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; +\infty)$ — $x = \dfrac{-8}{n^2 - 8n + 12}$;

5) при $k = 1$, или $k = -1$, или $k = 3$ — x любое число; при любом $k \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$ $x = 0$;

6) при $a = 3$ x — любое число; при $a = 2$ или $a = 5$ — решений нет;

при любом $a \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)$ — $x = \dfrac{4}{-a^2 + 7a - 10}$.

Уравнения, приводимые к линейным

Сразу скажем, увидеть при первом взгляде на многие уравнения, из которых потом «получаются» линейные, что их можно привести к этому виду, нельзя. Просто после всех преобразований вдруг можно заметить, что в уравнении нет x, стоящих в степени, большей 1. Даже если и были квадраты, кубы, переменные в знаменателе, то они «исчезли».

И надо помнить, что если, например, в уравнении $\dfrac{k-6}{x+1} - \dfrac{3k+4}{a-2} = \dfrac{2(k-1)x-5}{x^2-x-2}$ мы умножили его обе части на $(x-2)(x+1)(a-2)$, то $x \neq -1$, $x \neq 2$, $a \neq 2$. То есть снова не забывать о равносильности.

Пример 1. Решите уравнение $\dfrac{x}{5a+x} - \dfrac{5a+x}{x-5a} = \dfrac{100a^2}{25a^2-x^2}$.

Решение. По смыслу задачи $(5a + x)(x - 5a) \neq 0$, то есть $x \neq \pm 5a$.

Умножив обе части уравнения на произведение $(5a + x) \cdot (x - 5a)$, получим уравнение $x^2 - 5ax - x^2 - 10ax - 25a^2 = -100a^2$, или $-15ax = -75a^2$; $ax = 5a^2$.

1) При $a = 0$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, решением которого будет любое число, кроме нуля (так как $x \neq \pm 5a$).
2) При $a \neq 0$ имеем $x = 5a$. Этот корень попадает под ограничение $x \neq \pm 5a$.

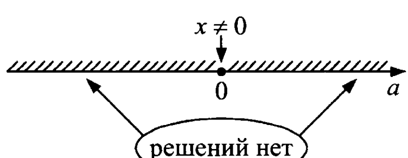


Рис. 44

О т в е т : при $a = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений: все действительные числа, кроме нуля; при любом $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ решений нет.

Пример 2. Решите уравнение $\dfrac{3(a+1)x-5}{a(x+3)} + \dfrac{3a-8}{a} = \dfrac{2x+7}{x+3}$.

Р е ш е н и е . По смыслу задачи $a \neq 0$, $x \neq -3$. Умножив обе части уравнения на

$a(x + 3) \neq 0$, получим уравнение $3(a + 1)x - 5 + (3a - 8)(x + 3) = (2x + 7)a$, или

$(4a - 5)x = 29 - 2a$.

Отсюда, если $a \neq 1{,}25$, то $x = \dfrac{29-2a}{4a-5}$. Если же $a = 1{,}25$, то получится уравнение $0x = 26{,}5$, не имеющее корней.

Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений a, при которых найденное значение x равно -3.

$\dfrac{29-2a}{4a-5} = -3$ при $29 - 2a = -12a + 15$, то есть при $a = -1{,}4$.

Таким образом, при $a \neq 0$, $a \neq 1{,}25$, $a \neq -1{,}4$ уравнение имеет единственное решение: $x = \dfrac{29-2a}{4a-5}$.

При $a = 0$, $a = 1{,}25$, $a = -1{,}4$ решений нет.

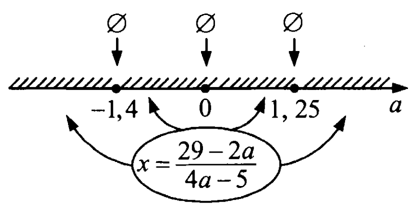


Рис. 45

О т в е т : при $a = 0$, или $a = 1{,}25$, или $a = -1{,}4$ корней нет; при любом

$a \in (-\infty; -1{,}4) \cup (-1{,}4; 0) \cup (0; 1{,}25) \cup (1{,}25; +\infty)$ $x = \dfrac{29-2a}{4a-5}$.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения для каждого значения параметра:

1) $\dfrac{(b+2)x-3}{x-1}=0;$

2) $\dfrac{x}{c-3}+\dfrac{x}{c-2}=\dfrac{4c^2-16c+15}{(c-3)(c-2)};$

3) $\dfrac{3(c-3)x-5}{(c-1)(x^2-9)}=\dfrac{2c-5}{(c-1)(x-3)}-\dfrac{5}{x+3};$

4) $\dfrac{k-6}{x+1}-\dfrac{3k+4}{x-2}=\dfrac{2(k-1)x-5}{x^2-x-2};$

5) $1+\dfrac{1}{bx+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{b+1};$

6) $\dfrac{x-4}{x+1}+\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{1}{(a+1)(x+1)}.$

Ответы:

1) при $b=-2$ или $b=1$ решений нет;
при любом $b\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;+\infty)$ $x=\dfrac{3}{b+2};$

2) при $c=2$ или $c=3$ решений нет; при $c=2{,}5$ x — любое число,
при $c\in(-\infty;2)\cup(2;2{,}5)\cup(2{,}5;3)\cup(3;+\infty)$ $x=2c-3;$

3) при $c=1\frac{1}{3}$, или $c=-\frac{2}{3}$, или $c=1\frac{1}{2}$, или $c=1$ решений нет;
при любых
$c\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};1\right)\cup\left(1;1\frac{1}{3}\right)\cup\left(1\frac{1}{3};1\frac{1}{2}\right)\cup\left(1\frac{1}{2};+\infty\right)$ $x=\dfrac{21c-25}{6c-9};$

4) при $k=-2$, или $k=-\frac{3}{13}$, или $k=21$ решений нет, при
$k\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{3}{13}\right)\cup\left(-\frac{3}{13};21\right)\cup(21;+\infty)$ $x=\dfrac{13-5k}{4k+8};$

5) при $b=-4$, или $b=-1$, или $b=0$ решений нет;
при $b\in(-\infty;-4)\cup(-4;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$ $x=\dfrac{b}{b+4};$

6) при $a=-3$, или $a=-1{,}2$, или $a=-1$ решений нет;
при любых
$a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-1{,}2)\cup(-1{,}2;-1)\cup(-1;+\infty)$ $x=\dfrac{4a+3}{a+3}.$

Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к квадратным

Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется квадратным только в случае $a \neq 0$.

Однако решение таких уравнений очень часто начинают с нахождения дискриминанта. Это неверно. В качестве коэффициента при x^2 может быть выражение с параметром. А оно вполне может быть равным нулю, и данное уравнение квадратным не будет — получится линейное уравнение.

Поэтому, решая квадратное уравнение с параметром, советуем первым делом смотреть на коэффициент при x^2. Если этот коэффициент — выражение с параметром, то нужно отдельно выделить случай, когда он равен нулю, и решить получившееся линейное уравнение.

Рассмотрим несколько уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $(a + 3)x^2 + 2x(a + 5) + 2a + 7 = 0$.

Р е ш е н и е. Начнем решение данного уравнения с «вырожденного случая» $a = -3$: уравнение примет вид $4x = -1$, его корень $x = -\frac{1}{4}$.

При $a \neq -3$ данное уравнение является квадратным. Найдем дискриминант уравнения:

$$D = 4(a + 5)^2 - 4(a + 3)(2a + 7) = 4(a^2 + 10a + 25) -$$
$$- (8a^2 + 24a + 28a + 84) = -4a^2 - 12a + 16 = -4(a - 1)(a + 4).$$

На рисунке 46 показаны числовые интервалы, в которых дискриминант сохраняет свой знак.

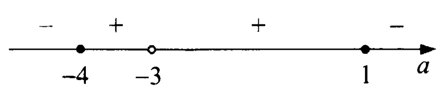


Рис. 46

При всех $a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ $D < 0$, и уравнение не имеет корней.

При всех $a \in [-4; -3) \cup (-3; 1]$ $D \geq 0$, и уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2} = \frac{-(a+5) \pm \sqrt{-a^2 - 3a + 4}}{a+3}$, причем при $a = 1$ — $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$; при $a = -4$ — $x_1 = x_2 = 1$.

О т в е т : при $a = -3$ $x = -\frac{1}{4}$;

при всех $a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ — корней нет;

при всех $a \in [-4; -3) \cup (-3; 1]$ —

$$x_{1,2} = \frac{-(a+5) \pm \sqrt{-a^2 - 3a + 4}}{a+3}.$$

Пример 2. Решите уравнение $\frac{2x}{a^2 + 3a} - \frac{1}{3a - a^2} = \frac{x^2 + 8}{a^2 - 9}$.

Р е ш е н и е . При $a \neq 0$ и $a \neq \pm 3$ данное уравнение равносильно уравнению

$(a - 3) \cdot 2x + a + 3 = a(x^2 + 8)$,

или $ax^2 + 2(3 - a)x + (7a - 3) = 0$.

1) При $a = 0$, $a = \pm 3$ — корней нет;

2) При $a \neq 0$, $a \neq \pm 3$ найдем дискриминант:

$D = 4(3 - a)^2 - 4a(7a - 3) = 4((9 - 6a + a^2) - 7a^2 + 3a) =$

$= 4(-6a^2 - 3a + 9) = -24(a - 1)(a + 1{,}5)$.

Отметим на числовой прямой знаки дискриминанта.

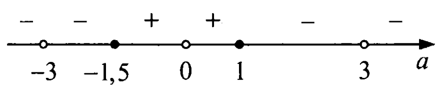


Рис. 47

При всех $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1{,}5) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$ $D < 0$, и уравнение не имеет корней.

При всех $a \in [-1{,}5; 0) \cup (0; 1]$ —

$$x_{1,2} = \frac{a - 3 \pm \sqrt{-6a^2 - 3a + 9}}{a}.$$

На рисунке 48 покажем все решения уравнения.

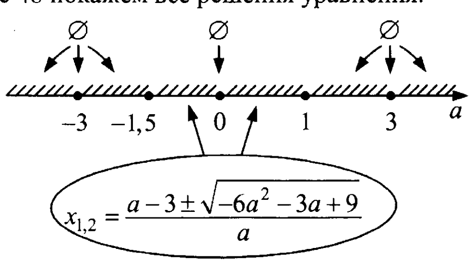


Рис. 48

О т в е т : при всех $a \in (-\infty; -1{,}5) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ — корней нет;
при всех $a \in [-1{,}5; 0) \cup (0; 1]$ —
$x_{1,2} = \dfrac{a - 3 \pm \sqrt{-6a^2 - 3a + 9}}{a}$.

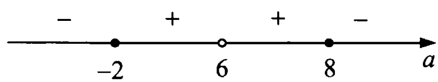
Пример 3. Решите уравнение $\dfrac{a}{4x} = \dfrac{4 - x}{a - 6}$.

Р е ш е н и е . При $a \neq 6$ и $x \neq 0$ данное уравнение равносильно уравнению $4x^2 - 16x + (a^2 - 6a) = 0$.

Найдем $\dfrac{D}{4}$:

$\dfrac{D}{4} = 64 - 4a^2 + 24a = -4(a - 8)(a + 2)$.

Отметим на числовой прямой знаки дискриминанта.



1) При всех $a < -2$ или $a > 8$, $D < 0$, и уравнение не имеет корней.
2) При $-2 \leq a < 6$ или $6 < a \leq 8$, $D \geq 0$, и $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-a^2 + 6a + 16}}{2}$.
3) Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений параметра, при которых x_1 и x_2 (или один из них) равен 0. Корень $x_1 = \dfrac{4 + \sqrt{-a^2 + 6a + 16}}{2}$ не равен нулю ни при каких значениях параметра a.

Корень $x_2 = \dfrac{4 - \sqrt{-a^2 + 6a + 16}}{2}$ равен нулю при $\sqrt{-a^2 + 6a + 16} = 4$, то есть, если $-a^2 + 6a + 16 = 16$, или $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 6. \end{array}\right.$

При этом $a = 6$ не является допустимым значением параметра, а если $a = 0$, то $x = 4$.

О т в е т : при $a = 6$ — уравнение не имеет смысла;
при всех $a \in (-\infty; -2) \cup (8; +\infty)$ — корней нет;
при всех $a \in (-2; 0) \cup (0; 6) \cup (6; 8)$ — уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-a^2 + 6a + 16}}{2}$;
при $a = 0$, $x = 4$; при $a = -2$, $a = 8$ — $x_1 = x_2 = 2$.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения для каждого значения параметра:

1) $bx^2 + 2x(b+2) + 2b + 1 = 0$;
2) $2x^2(m+5) + 2x(m-7) + 3 = 0$;
3) $(2b^2 - b - 6)x^2 = 4(b+1)x - 2$;
4) $\dfrac{x}{2a-6} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{3x-2a+6}{2(x-2)}$;
5) $\dfrac{x+3}{x^2+6x+5} + \dfrac{a}{x^2+8x+15} - \dfrac{1}{x^2+4x+3} = 0$;
6) $\dfrac{2x}{x+4a} - \dfrac{x^2+48a^2}{x^2-16a^2} = \dfrac{x+4a}{4a-x}$.

Ответы:

1) при $b=0$ $x=-0{,}25$; при $b=-1$ $x=1$;
при $b=4$ $x=-1{,}5$; при всех $b \in (-1;\,0) \cup (0;\,4)$
$$x_{1,2} = \frac{-(b+2) \pm \sqrt{-b^2+3b+4}}{b};$$
при $b \in (-\infty;\,-1) \cup (4;\,+\infty)$ корней нет;

2) при $m=-5$ $x=0{,}125$; при всех $m \in (1;\,19)$ корней нет;
при всех
$m \in (-\infty;\,-5) \cup (-5;\,1] \cup [19;\,+\infty)$ $x_{1,2} = \dfrac{7-m \pm \sqrt{m^2-20m+19}}{2(m+5)}$;

3) при $b=2$ $x=\dfrac{1}{6}$; при $b=-1{,}5$ $x=-1$;
при всех
$b \in [-1{,}6;\,-1{,}5) \cup (-1{,}5;\,2) \cup (2;\,+\infty)$ $x_{1,2} = \dfrac{2(b+1) \pm \sqrt{10b+16}}{2b^2-b-6}$;
при всех $b \in (-\infty;\,-1{,}6)$ корней нет;

4) при $a \neq 4$, $a \neq 3$ $x_1 = 2a-6$, $x_2 = a-1$;
при $a=4$ $x=3$; при $a=3$ уравнение не имеет смысла;

5) при $a \neq -3$, $a \neq -1$, $a \neq 1$ $x = -4-a$;
при $a=-3$; $a=-1$, $a=1$ корней нет;

6) уравнение не имеет корней при любых допустимых значениях параметра a.

Расположение нулей квадратичной функции на числовой прямой

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Числа x_1 и x_2 — нули функции $y = f(x)$, причем $x_1 \leq x_2$;

$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы, являющейся ее графиком.

Введя эти стандартные обозначения, перейдем к решению таких задач, где квадратный трехчлен задан явным образом. Подчеркнем, что предложенные алгоритмы решения универсальны, а значит (обратная сторона любой универсальности), есть конкретные случаи, когда задачу можно решить несколько проще.

В этих задачах, как правило, требуется определить те значения параметра, при которых выполняется некоторое условие для расположения корней.

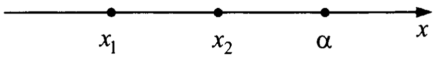
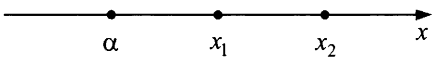
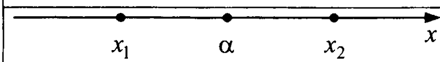
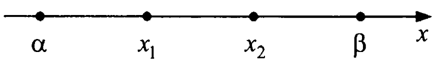
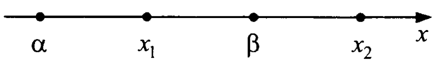
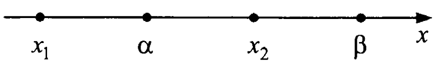
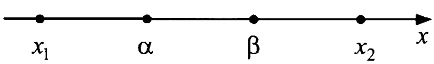
Перечислим основные условия:

1) оба корня меньше некоторого числа α: $x_1 \leq x_2 < \alpha$;
2) оба корня больше некоторого числа α: $\alpha < x_1 \leq x_2$;
3) заданное число α лежит между корнями: $x_1 < \alpha < x_2$;
4) оба корня принадлежат заданному промежутку $(\alpha; \beta)$: $\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$;
5) только меньший корень принадлежит промежутку $(\alpha; \beta)$: $\alpha < x_1 < \beta < x_2$;
6) только больший корень принадлежит промежутку $(\alpha; \beta)$: $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$;
7) оба корня лежат по обе стороны от промежутка $(\alpha; \beta)$: $x_1 < \alpha < \beta < x_2$.

Рассматривать отдельно задачи, когда оба корня лежат справа или слева от промежутка, смысла не имеет, так как эти случаи в чистом виде соответствуют пунктам 1 и 2.

В таблице приведены условия, необходимые и достаточные для выполнения перечисленных условий.

Таблица

Расположение нулей квадратичной функции на числовой прямой	**Необходимые и достаточные условия**
	$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$
	$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$
	$a \cdot f(\alpha) < 0$
	$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta. \end{cases}$
	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$

Итак, мы записали все условия. Понятно, что запомнить их все — задача весьма непростая, но это и не требуется. Покажем, что означает то или иное неравенство в условиях, начав с первого случая:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$$

Самое простое требование — неотрицательность дискриминанта квадратного трехчлена: корни должны существовать. А вот второе неравенство системы совсем не очевидно.

Казалось бы, нужно просто записать выражение для бóльшего корня:

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

и потребовать, чтобы оно было меньше числа α. Но при этом приходится работать с корнем из дискриминанта, что зачастую существенно усложняет решение.

Помочь может очень простая «хитрость»: если мы знаем знак выражения $a \cdot f(\alpha)$, то всегда можем определить, где лежит число α: между корнями или нет.

Объясняется это несложно. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Тогда $f(\alpha)$, а вместе с ним и выражение $a \cdot f(\alpha)$, меньше нуля, когда число α находится между корнями трехчлена, и больше нуля, когда α не принадлежит интервалу $(x_1; x_2)$.

Если $a < 0$, то график квадратного трехчлена «растет» вниз. При этом значение $f(\alpha)$, наоборот, больше нуля, когда число α находится между корнями. Однако выражение $a \cdot f(\alpha)$ снова отрицательно. Аналогично, это выражение положительно при $\alpha \notin (x_1; x_2)$.

Итак, **если** $\boldsymbol{a \cdot f(\alpha) < 0}$**, то** $\alpha \in (\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2})$,
если $\boldsymbol{a \cdot f(\alpha) > 0}$**, то** $\alpha \notin (\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2})$.

Вернемся к условиям $\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$

Неотрицательность дискриминанта дает существование корней, положительность выражения $a \cdot f(\alpha)$ соответствует тому, что $\alpha \notin (x_1; x_2)$, а последнее неравенство устанавливает расположение обоих корней слева от α, ведь абсцисса вершины параболы — середина отрезка $[x_1; x_2]$ — находится слева.

Выбор абсциссы вершины объясняется опять тем, что работать с формулой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ в общем случае проще, чем с формулой $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. (Практика показывает, что всегда легче решить два простых уравнения, чем одно сложное.)

Условия во втором случае аналогичны предыдущим.

Для существования третьего расположения корней относительно данного числа α достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a \cdot f(\alpha) < 0$. Это же неравенство дает нам условие существования корней — если их нет, то выражение $a \cdot f(\alpha)$ всегда положительно.

Условие для случаев 4—7 следует из уже рассмотренных нами условий.

Перейдем к конкретным примерам.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$(a-2)\,x^2-3(a+3)\,x+a+1=0$$

имеют разные знаки.

Решение. Пусть $f(x)=(a-2)x^2-3(a+3)x+a+1=0$, x_1, x_2 — корни $f(x)$, причем $x_1 \le x_2$.

Условие того, что уравнение $f(x) = 0$ имеет корни разных знаков, равнозначно условию расположения числа 0 между нулями квадратичной функции $y = f(x)$.

Необходимым и достаточным условием этого является следующее неравенство (см. третий случай в таблице): $(a-2)(a+1) < 0$, где $a-2$ — коэффициент при x^2 квадратного трехчлена; $f(0)=a+1$ — значение квадратного трехчлена при $x = 0$.

Решив неравенство $(a-2)(a+1) < 0$, получаем $-1 < a < 2$.

Ответ: $(-1; 2)$.

Обратите внимание, что в первом примере не рассматривается случай, когда коэффициент при x^2 равен нулю. Это не нужно, так как из условия задачи (фраза «корни... имеют разные знаки») ясно, что корней должно быть два.

В следующей задаче из фразы «корни уравнения... меньше 1» совсем не следует, что их должно быть два, и первое, что надо сделать, — рассмотреть, когда уравнение является линейным, ведь все предыдущие рассуждения касались квадратного трехчлена.

Пример 2. Найти все значения параметра b, при которых корни уравнения

$$(b+1)\,x^2+2x-3b-1=0 \text{ меньше } 1.$$

Решение.

1) Поскольку коэффициент при x^2 содержит параметр, то нужно рассмотреть, когда он может быть равен нулю.

   При $b=-1$ получаем корень $x=-1$, который меньше числа 1.

2) Если $b \ne -1$, то выражение $f(x) = (b+1)\,x^2 + 2x - 3b - 1$ является квадратным трехчленом, его корни обозначим как x_1 и x_2, полагая $x_1 \le x_2$.

Абсцисса вершины параболы находится по формуле $x_0 = -\frac{1}{b+1}$.

Значение квадратного трехчлена в точке $x = 1$:

$f(1) = (b + 1) + 2 - 3b - 1 = 2 - 2b$.

Дискриминант: $D = 4(3b^2 + 4b + 2)$.

Итак, должны выполняться три условия:

а) дискриминант больше или равен нулю;

б) выражение $(b + 1)(2 - 2b)$ положительно;

в) абсцисса вершины параболы меньше числа 1.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4\left(3b^2 + 4b + 2\right) \geq 0, \\ (b+1)(2-2b) > 0, \\ -\dfrac{1}{b+1} < 1. \end{cases}$$

Преобразуем ее:

$$\begin{cases} 3b^2 + 4b + 2 \geq 0, \\ (b+1)(2-2b) > 0, \\ \dfrac{-b-2}{b+1} < 0. \end{cases}$$

и изобразим решение каждого неравенства на рисунке 49.

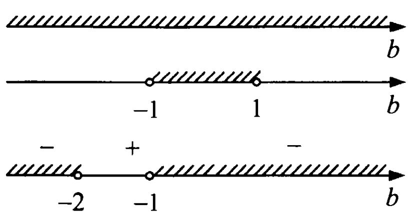


Рис. 49

Таким образом, решением этой системы будут все значения b, принадлежащие интервалу $(-1; 1)$.

В итоге корни уравнения $(b + 1)x^2 + 2x - 3b - 1 = 0$ меньше 1 при всех значениях $[-1; 1)$.

Ответ: $[-1; 1)$.

Пример 3. Найти все значения a, при которых корни уравнения $(a + 1)x^2 - (a^2 + 2a)x - a - 1 = 0$ принадлежат отрезку $[-2; 2]$.

Р е ш е н и е.

1) При $a = -1$ уравнение примет вид $x = 0$ и его решение принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

2) При $a \neq -1$ необходимые и достаточные условия того, что нули функции

$f(x) = (a + 1)\,x^2 - (a^2 + 2a)x - a - 1$ принадлежат отрезку $[-2; 2]$, задаются следующей системой:

$$\begin{cases} (a+1)\cdot f(-2) \geq 0, \\ (a+1)\cdot f(2) \geq 0, \\ D \geq 0, \\ -2 < x_0 < 2. \end{cases}$$

В этой системе $x_0 = \dfrac{a^2 + 2a}{2(a+1)}$;

$f(-2) = (a + 1)\cdot 4 - (a^2 + 2a)\cdot(-2) - a - 1 = 2a^2 + 7a + 3;$

$f(2) = (a + 1)\cdot 4 - (a^2 + 2a)\cdot(2) - a - 1 = -2a^2 - a + 3;$

$D = (a^2 + 2a)^2 + 4(a + 1)^2 = (a^2 + 2a + 2)^2 = (1 + (a + 1)^2)^2 > 0.$

Итак,

$$\begin{cases} (a+1)\left(2a^2+7a+3\right) \geq 0, \\ (a+1)\left(-2a^2-a+3\right) \geq 0; \\ -2 < \dfrac{a^2+2a}{2(a+1)} < 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2(a+1)(a+3)(a+0,5) \geq 0, \\ -2(a+1)(a-1)(a+1,5) \geq 0; \\ \dfrac{\left(a-1-\sqrt{5}\right)\left(a-1+\sqrt{5}\right)}{2(a+1)} < 0, \\ \dfrac{\left(a+3-\sqrt{5}\right)\left(a+3+\sqrt{5}\right)}{2(a+1)} > 0. \end{cases}$$

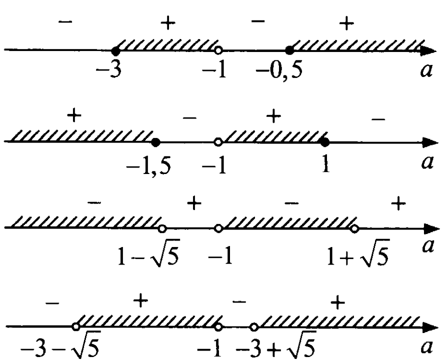


Рис. 50

О т в е т: $[-3; -1,5] \cup [-0,5; 1]$.

Задания для самостоятельного решения

1) При каких значениях параметра a корни уравнения
$(a + 4)x^2 - 2(a + 2)x + 3a + 6 = 0$ положительны?
2) Найти все значения b, при которых один из корней уравнения
$(b^2 - b + 1)x^2 + (b - 2)x + (b - 1)^2 = 0$
больше 3, а другой меньше 3.
3) При каких m корни уравнения
$x^2 - 2(m + 4)x + 2m + 11 = 0$
имеют разные знаки и каждый по модулю меньше 4?
4) При каких b корни уравнения
$(b - 3)x^2 - (b - 2)x + 2 = 0$
по модулю меньше 1?
5) При каких значениях b оба корня уравнения
$(b - 3)x^2 - 3(b - 4)x + 4b - 16 = 0$
принадлежат интервалу (2; 5)?
6) При каких m все решения неравенства
$(m - 2)x^2 + (4m - m^2 - 3)x - m + 2 > 0$
принадлежат отрезку [–2; 2]?

Ответы:

1) $[-5; -4]$;
2) ни при каких;
3) $(-5{,}9; -5{,}5)$;
4) $\left[6+2\sqrt{2}; +\infty\right)$;
5) $\left(1\frac{5}{7}; 2\right)$;
6) $(0; 1{,}5)$.

Неравенства с параметром

Равносильность неравенств

Два неравенства называются равносильными, если их решения совпадают.

Если множество решений некоторого неравенства (1) содержит множество решений другого неравенства (2), то первое неравенство называется следствием второго.

Пример 1.

1) $x > 4$ и $2 + x > 6$ — равносильные неравенства, так как множества их решений совпадают.

Пример 2. Неравенство $x > 1$ является следствием неравенства $x > 3$, так как множество решений неравенства $x > 1$ содержит множество решений неравенства $x > 3$.

Преобразования, при которых данное неравенство переходит в равносильное неравенство:

1. Если какой-либо член неравенства с одной переменной перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.
2. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства, то полученное неравенство равносильно данному.
3. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Какие из пар неравенств являются равносильными? Какое из неравенств в парах является следствием другого?

1) $x > 3$ и $x > 100$;
2) $x^2 < 1$ и $|x| < 1$;
3) $x^2 > 9$ и $|x| > 3$;
4) $|x - 8| > |x + 1|$ и $(x - 8)^2 > (x + 1)^2$;
5) $|x| < 2$ и $x^3 < 8$;
6) $(x + 1)(x - 3) < 0$ и $x - 3 < 0$;
7) $\frac{6}{x-1} < 0$ и $x < 1$;
8) $\frac{4}{x+2} > 4$ и $x < -1$;
9) $\sqrt{2x-3} \geq 1$ и $x > 5$;
10) $\cos x \leq \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;
11) $\log_2 x < 3$ и $x < 8$;
12) $\log_{0,3} x < 2$ и $x > 0,09$;
13) $\sqrt{x+4} < -1$ и $|x| < -2$;

14) $\arcsin x < \frac{\pi}{3}$ и $-1 \le x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

15) $\arcsin x > \frac{\pi}{6}$ и $0 \le x \le 2$;

16) $\arccos x < \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2} < x \le 1$;

17) $\arccos x > \frac{\pi}{3}$ и $-2 \le x < \frac{1}{2}$;

18) $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4}$ и $1 < x < \frac{\pi}{2}$;

19) $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4}$ и $x < 1$;

20) $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4}$ и $x > 1$.

2. При каких значениях параметра a неравенства равносильны?

1) $\sqrt{x-9} \ge -3$ и $x \ge a$;

2) $2x + \sqrt{-x} < \sqrt{-x} + 2a$ и $x < a$;

3) $\sqrt{x+2} < -3$ и $\cos x > a$;

4) $\frac{x}{x+2} < \frac{2}{x+2}$ и $-2 < x < a$;

5) $\sqrt{x+1} \le a$ и $0 \le x + 1 \le a^2$;

6) $2x - 3 \le 0$ и $(x - a)^2 (2x - 3) \le 0$;

7) $\sqrt{3-x} < a$ и $3 - x < a^2$;

8) $\log_2 x < 3$ и $a < x < 8$;

9) $\arcsin(x-a) \le \frac{\pi}{6}$ и $-1 \le x \le \frac{1}{2}$;

10) $\arccos(x+a) \ge \frac{\pi}{3}$ и $0 \le x \le \frac{3}{2}$;

11) $\log_{0,3} x > 1$ и $0 < x < a$;

12) $\log_4 (x + 6) > 2$ и $x > a$;

13) $\log_{0,3} (x - 8) < 2$ и $x > a$;

14) $\arccos x < \frac{\pi}{3}$ и $a < x \le 1$;

15) $\arcsin x \ge \frac{\pi}{6}$ и $a \le x \le 1$;

16) $\cos x \le a$ и $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

17) $\sin x \geq a$ и $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$;

18) $\operatorname{tg} x \leq a$ и $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

19) $\operatorname{ctg} x \geq a$ и $\pi n < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

20) $2^{x-4} \geq a$ и $x \geq 1$.

Ответы:

1. **1)** (2) $\Rightarrow$ (1); **2)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **3)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **4)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **5)** (1) $\Rightarrow$ (2); **6)** (1) $\Rightarrow$ (2); **7)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **8)** (1) $\Rightarrow$ (2); **9)** (2) $\Rightarrow$ (1); **10)** (2) $\Rightarrow$ (1); **11)** (1) $\Rightarrow$ (2); **12)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **13)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **14)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **15)** (1) $\Rightarrow$ (2); **16)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **17)** (1) $\Rightarrow$ (2); **18)** (2) $\Rightarrow$ (1); **19)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **20)** (1) $\Rightarrow$ (2).
2. **1)** при $a = 9$; **2)** при $a \leq 0$; **3)** при $a \geq 1$; **4)** при $a = 2$; **5)** при $a \geq 0$; **6)** при $a \leq 1{,}5$; **7)** ни при каких значениях a; **8)** при $a = 0$; **9)** при $a = 0$; **10)** при $a = -1$; **11)** при $a = 0{,}3$; **12)** при $a = 10$; **13)** при $a = 8{,}09$; **14)** при $a = \frac{1}{2}$; **15)** при $a = \frac{1}{2}$; **16)** при $a = \frac{1}{2}$; **17)** при $a = \frac{1}{2}$; **18)** при $a = \sqrt{3}$; **19)** при $a = 1$; **20)** при $a = \frac{1}{8}$.

Простейшие неравенства с параметром

Пример 1. Для каждого значения параметра a решить неравенство $(a-1)x > a^2 - 1$.

Решение.

1) При $a = 1$ неравенство примет вид $0 \cdot x > 0$ и не имеет решений;
2) при $a > 1$ $\quad a - 1 > 0$ и $x > \frac{a^2-1}{a-1}$, или $x > a + 1$;
3) при $a < 1$ $\quad a - 1 < 0$ и $x < \frac{a^2-1}{a-1}$, или $x < a + 1$.

Ответ: при $a = 1$ решений нет; при $a > 1$ $\quad x > a + 1$; при $a < 1$ $\quad x < a + 1$.

Пример 2. Решить неравенство (a — параметр) $ax^2 - 2x - 1 > 0$.

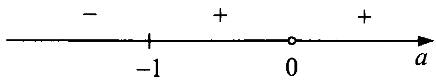
Решение.

1) При $a = 0$ неравенство примет вид: $-2x - 1 > 0$, $x < -\frac{1}{2}$;
2) при $a \neq 0$ неравенство является квадратным.

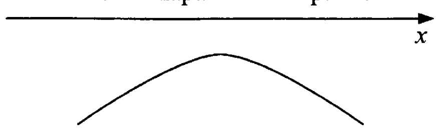
Для решения квадратного неравенства найдем корни квадратного трехчлена

$ax^2 - 2x - 1$ и, изобразив схематично график квадратного трехчлена, выберем интервалы, в которых квадратный трехчлен положителен: $ax^2 - 2x - 1 = 0$;

$D = 4 + 4a = 4(1 + a)$. Отметим на числовой прямой точки $a = -1$ и $a = 0$ и определим знаки дискриминанта в полученных интервалах:

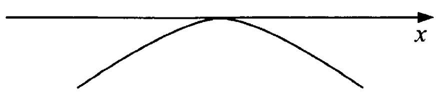


При $a < -1$ $D < 0$ и ветви параболы направлены вниз:



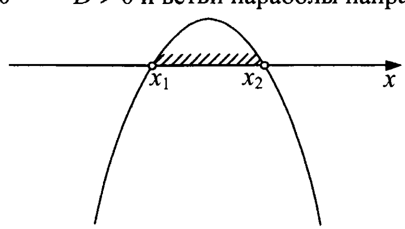
В этом случае квадратный трехчлен не может быть положительным. Следовательно, при $a < -1$ неравенство не имеет решений.

При $a = -1$ $D = 0$ и ветви параболы направлены вниз:



И в этом случае решений нет.

При $-1 < a < 0$ $D > 0$ и ветви параболы направлены вниз:



Квадратный трехчлен положителен при $x_1 < x < x_2$.

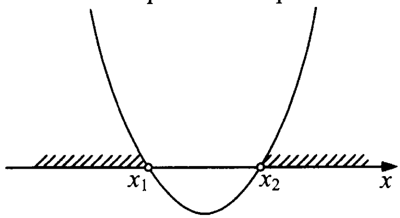
Его корни $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$. В данном случае меньшим будет корень

$\dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a}$, а бóльшим $\dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a}$. (Например, при $a = -0,99$:

$\dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a} = -\dfrac{110}{99}$; $\dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a} = -\dfrac{90}{99}$; $-\dfrac{110}{99} < -\dfrac{90}{99}$).

Таким образом, при $-1 < a < 0$ решением неравенства будут все значения x из интервала $\left(\frac{1+\sqrt{1+a}}{a}; \frac{1-\sqrt{1+a}}{a}\right)$.

При $a > 0$ $D > 0$ и ветви параболы направлены вверх:



Квадратный трехчлен положителен при любом значении x из объединения интервалов $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1+a}}{a}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1+a}}{a}; +\infty\right)$. В этом случае $\frac{1-\sqrt{1+a}}{a} < \frac{1+\sqrt{1+a}}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ $x < -0{,}5$; при $a \le -1$ решений нет; при $-1 < a < 0$

$$\frac{1+\sqrt{1+a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1+a}}{a}; \text{ при } a > 0 \left[\begin{array}{l} x < \frac{1-\sqrt{1+a}}{a}, \\ x > \frac{1+\sqrt{1+a}}{a}. \end{array}\right.$$

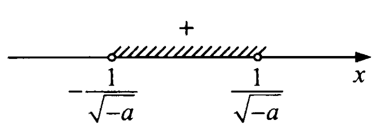
Пример 3.

Решить неравенство $ax^2 + 1 > 0$.

Решение.

1) При $a = 0$ неравенство примет вид $0 \cdot x^2 + 1 > 0$, его решением является любое действительное число, так как $1 > 0$ — всегда.
2) Если $a > 0$, то $ax^2 + 1 > 0$ при любом действительном значении x, так как в этом случае левая часть всегда положительна.
3) При $a < 0$ разложим левую часть неравенства на множители $ax^2 + 1 = \left(1-\sqrt{-a}x\right)\left(1+\sqrt{-a}x\right)$ и решим неравенство методом интервалов:

$$-\frac{1}{\sqrt{-a}} < x < \frac{1}{\sqrt{-a}}.$$

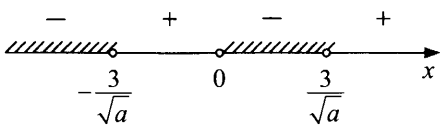


Ответ: x — любое действительное число при $a \geq 0$; $-\sqrt{-\frac{1}{a}} < x < \sqrt{-\frac{1}{a}}$ при $a < 0$.

Пример 4. Решить неравенство $ax < \frac{9}{x}$.

Решение. $ax < \frac{9}{x}$, $ax - \frac{9}{x} < 0$, $\frac{ax^2 - 9}{x} < 0$.

1) При $a \leq 0$ числитель дроби отрицателен. Следовательно, знаменатель дроби должен быть положительным, то есть $x > 0$.
2) При $a > 0$ разложим числитель дроби на множители: $\frac{\left(\sqrt{a}x - 3\right)\left(\sqrt{a}x + 3\right)}{x} < 0$ и решим неравенство методом интервалов:



Решением будет являться любое значение x из объединения интервалов:
$\left(-\infty; -\frac{3}{\sqrt{a}}\right) \cup \left(0; \frac{3}{\sqrt{a}}\right)$.

Ответ: при $a \leq 0$ $x > 0$; при $a > 0$ $\left[\begin{array}{l} x < -\frac{3}{\sqrt{a}}, \\ 0 < x < \frac{3}{\sqrt{a}}. \end{array}\right.$

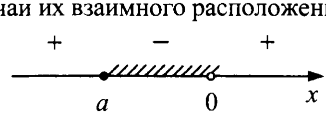
Пример 5. Решить неравенство $x^2 - ax \leq 0$.

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители и воспользуемся методом интервалов: $x(x - a) \leq 0$.

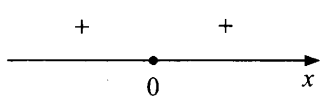
На числовой прямой нужно отложить точки $x = 0$ и $x = a$.

При различных значениях a взаимное расположение этих точек будет различным. Рассмотрим все случаи их взаимного расположения.

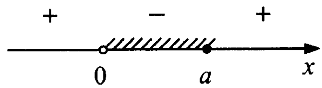
1) При $a < 0$ $\quad a \leq x < 0$.



2) При $a = 0$ $\quad x = 0$.



3) При $a > 0 \quad 0 < x \le a$.

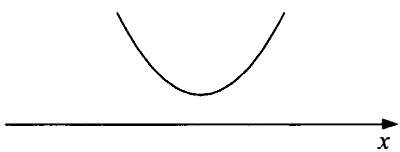


Ответ: при $a < 0 \quad a \le x < 0$; при $a = 0 \quad x = 0$; при $a > 0 \quad 0 < x \le a$.

Пример 6. При каких значениях параметра a выражение $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$ положительно при любом действительном значении x?

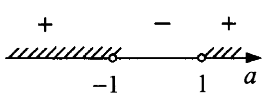
Решение. Итак, нам нужно найти такие значения параметра a, при которых решением неравенства $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ будут все действительные значения x.

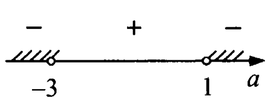
1) При $a = 1$ неравенство примет вид $2 > 0$ и выполняется при любом действительном значении x.
2) При $a = -1$ неравенство примет вид $-4x + 2 > 0$, $x < \frac{1}{2}$ — не любое значение x. Следовательно, $a = -1$ не удовлетворяет условию.
3) При $a \neq \pm 1$ неравенство будет квадратным. Условию задачи будет соответствовать только одно расположение графика квадратного трехчлена:



Необходимые и достаточные условия такого расположения: ветви параболы направлены вверх, дискриминант отрицателен, то есть

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ D < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-1)(a+1) > 0, \\ -4a^2 - 8a + 12 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-1)(a+1) > 0, \\ -4(a-1)(a+3) < 0. \end{cases}$$





Решением системы являются $a < -3$ или $a > 1$. Итак, условию задачи удовлетворяют значения $a < -3$ или $a \ge 1$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенство (b — периметр):

1) $(b-4)x > b^2 - 6b + 8$;
2) $(b+1)x^2 + x + 1 > 0$;
3) $x^2 + (b+1)x + 1 > 0$;
4) $(b+8)x^2 + 1 > 0$;
5) $(b-5)x < \dfrac{9}{x}$;
6) $(b+4)x^2 - 2x - 1 > 0$;
7) $x^2 - (b+2)x \le 0$;
8) $bx^2 + bx - 5 \le 0$;
9) $x^2 - bx + b - 1 \ge 0$;
10) $x^2 - 2bx + 1 > 0$.

Ответы:

1) $x < b-2$ при $b < 4$; при $b = 4$ решений нет; $x > b-2$ при $b > 4$;

2) при $b < -1$ $x \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{-4b-3}}{2b+2};\ \dfrac{-1-\sqrt{-4b-3}}{2b+2}\right)$; при $b=-1$

$x \in (-1;+\infty)$; при $-1 < b \le -\dfrac{3}{4}$

$x \in \left(-\infty;\ \dfrac{-1-\sqrt{-4b-3}}{2b+2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{-4b-3}}{2b+2};+\infty\right)$;

при $b > -\dfrac{3}{4}$ x — любое действительное число;

3) при $-3 < b < 1$ x — любое действительное число; при $b \le -3$ или $b \ge 1$

$x \in \left(-\infty;\dfrac{-b-1-\sqrt{b^2+2b-3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-b-1+\sqrt{b^2+2b-3}}{2};+\infty\right)$;

4) при $b \ge -8$ x — любое действительное число;

при $b < -8$ $-\sqrt{\dfrac{1}{-b-8}} < x < \sqrt{\dfrac{1}{-b-8}}$;

5) при $b \le 5$ $x > 0$; при $b > 5$ $\left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{3}{\sqrt{b-5}}, \\ 0 < x < \dfrac{3}{\sqrt{b-5}}; \end{array}\right.$

6) при $b=-4$ $x < -0{,}5$, при $b \le -5$ решений нет;

при $-5 < b < -4$ $\dfrac{1+\sqrt{b+5}}{b+4} < x < \dfrac{1-\sqrt{b+5}}{b+4}$;

при $b > -4$ $\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1-\sqrt{b+5}}{b+4}, \\ x > \dfrac{1+\sqrt{b+5}}{b+4}; \end{array}\right.$

7) при $b < -2$ $\quad b+2 \le x < 0$; при $b = -2$ $\quad x = 0$;
при $b > -2$ $\quad 0 < x \le b + 2$;

8) при $-20 \le b \le 0$ $\quad x$ — любое действительное число;
при $b < -20$ $\quad x \in \left(-\infty; \frac{-b+\sqrt{b^2+20b}}{2b}\right) \cup \left(\frac{-b-\sqrt{b^2+20b}}{2b}; +\infty\right)$;

при $b > 0$

$x \in \left(\frac{-b-\sqrt{b^2+20b}}{2b}; \frac{-b+\sqrt{b^2+20b}}{2b}\right)$;

9) при $b = 2$ $\quad x$ — любое действительное число;
при $b < 2$ $\quad x \in (-\infty; b-1] \cup [1; +\infty)$; при $b > 2$
$x \in (-\infty; 1] \cup [b-1; +\infty)$;

10) при $-1 < b < 1$ $\quad x$ — любое действительное число;
при $b = -1$ $\quad x \ne -1$; при $b = 1$ $\quad x \ne 1$;
при $b < -1$ или $b > 1$ $\quad x \in \left(-\infty; b - \sqrt{b^2-1}\right) \cup \left(b + \sqrt{b^2-1}; +\infty\right)$.

Уравнения и неравенства, решение которых связано с исследованием квадратного трехчлена

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-3} = x - a$ (a — параметр).

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-3=(x-a)^2, \\ x \ge a; \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+\left(a^2+3\right)=0, \\ x \ge a. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к исследованию расположения корней квадратного трехчлена относительно числа a. Для квадратного трехчлена

$f(x) = x^2-(2a+1)x+\left(a^2+3\right)$ найдем дискриминант (D), абсциссу вершины параболы (x_0) и значение квадратного трехчлена $f(x)$ при $x = a$.

$D = 4a - 11$; $x_0 = \frac{2a+1}{2}$; $f(a) = 3 - a$.

1) Необходимым и достаточным условием того, чтобы $x_1 < a \le x_2$, являются следующие неравенства (см. таблицу на стр. 224, случай 3): $f(a) \le 0$, то есть $3 - a \le 0$ или $a \ge 3$.

Таким образом, при $a \ge 3$ уравнение $\sqrt{x-3} = x - a$ имеет одно решение:

$$x = \frac{2a+1+\sqrt{4a-11}}{2}.$$

2) Необходимые и достаточные условия того, чтобы $a \le x_1 \le x_2$, заданы системой (см. случай 2 таблицы на стр. 224).

$$\begin{cases} f(a) \ge 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > a; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3 - a \ge 0, \\ 4a - 11 \ge 0, \\ \dfrac{2a+1}{2} > a; \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 3, \\ a \ge \dfrac{11}{4}, \\ 1 > 0; \end{cases} \text{ откуда } 2{,}75 \le a \le 3.$$

Таким образом, при $2{,}75 \le a \le 3$ уравнение $\sqrt{x-3} = x - a$ имеет два решения

$$x_{1,\,2} = \frac{2a+1\pm\sqrt{4a-11}}{2}.$$

Ответ: при $a \ge 3$ $\quad x = \dfrac{2a+1+\sqrt{4a-11}}{2}$; при $2{,}75 \le a \le 3$

$x_{1,\,2} = \dfrac{2a+1\pm\sqrt{4a-11}}{2}$; при $a < 2{,}75$ решений нет.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{a-x} > 2x+1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0, \\ a - x > (2x+1)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x+1 < 0, \\ a - x \ge 0. \end{cases}$$

Решим первую из систем:

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ a - x > 4x^2 + 4x + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ 4x^2 + 5x + (1-a) < 0. \end{cases}$$

Для квадратного трехчлена $f(x) = 4x^2 + 5x + (1 - a)$ найдем дискриминант, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ и x_0:

$$D = 25 - 16(1 - a) = 16a + 9;\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - a;\ x_0 = -\frac{5}{8}.$$

Решение системы будет зависеть от взаимного расположения корней квадратного трехчлена (x_1 и x_2) и числа $-\frac{1}{2}$ на числовой прямой:

при $x_1 < x_2 < -\frac{1}{2}$ система не будет иметь решений;

при $x_1 < -\frac{1}{2} < x_2$ решениями системы будут все значения x из промежутка $\left[-\frac{1}{2}; x_2\right)$; при $-\frac{1}{2} < x_1 < x_2$ решениями системы будут все значения x из промежутка $(x_1; x_2)$.

С помощью таблицы на стр. 224 составим необходимые и достаточные условия для реализации следующих случаев:

1) $x_1 < -\frac{1}{2} < x_2$. Это возможно при $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, то есть $-\frac{1}{2} - a < 0$, $a > -\frac{1}{2}$.

Таким образом, при $a > -\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2} \le x < \frac{-5+\sqrt{16a+9}}{8}$;

2) $-\frac{1}{2} < x_1 < x_2$. Этот случай возможен при соблюдении условий

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0, \\ D > 0, \\ x_0 > -\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2} - a > 0, \\ 16a + 9 > 0, \\ -\frac{5}{8} > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Из третьего неравенства системы следует, что данный случай не имеет места. Таким образом, первая система при $a > -\frac{1}{2}$ имеет решениями все значения x из интервала $\left[-\frac{1}{2}; \frac{-5+\sqrt{16a+9}}{8}\right)$.

При остальных значениях параметра a первая система не имеет решений.

Решим вторую систему: $\begin{cases} 2x+1 < 0, \\ a - x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x \le a. \end{cases}$

При $a \ge -\frac{1}{2}$ $x < -\frac{1}{2}$; при $a < -\frac{1}{2}$ $x \le a$.

Собрав в таблицу данные о решении I и II систем, получим следующее:

	$a<-\frac{1}{2}$	$a=-\frac{1}{2}$	$a>-\frac{1}{2}$
I	решений нет	решений нет	$\left[-\frac{1}{2};\frac{-5+\sqrt{16a+9}}{8}\right)$
II	$(-\infty;a]$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$
$\left[\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\end{matrix}\right.$	$(-\infty;a]$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\infty;\frac{-5+\sqrt{16a+9}}{8}\right)$

Ответ: при $a<-\frac{1}{2}$ все x из промежутка $(-\infty;a]$; при $a\ge-\frac{1}{2}$ все x из промежутка $\left(-\infty;\frac{-5+\sqrt{16a+9}}{8}\right)$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\log_3(9^x+a)=x$ имеет два действительных и различных корня.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $9^x+a=3^x$, то есть $9^x-3^x+a=0$. Пусть $3^x=t>0$, тогда $t^2-t+a=0$. Таким образом, данное в условии уравнение имеет два действительных и различных корня, если уравнение $t^2-t+a=0$ имеет корни, удовлетворяющие условию $0<t_1<t_2$.

Воспользовавшись таблицей на стр. 224 составим систему:

$$\begin{cases}f(0)>0,\\D>0,\\x_0>0,\end{cases}\quad\text{то есть}\quad\begin{cases}a>0,\\1-4a>0,\\\frac{1}{2}>0,\end{cases}\quad\begin{cases}a>0,\\a<\frac{1}{4},\end{cases}\quad 0<a<\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет решение неравенство $1+\log_2(2x^2+2x+3{,}5)\ge\log_2(ax^2+a)$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(4-a)x^2+4x+(7-a)\ge0,\\ax^2+a>0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}(4-a)x^2+4x+(7-a)\ge0,\\a>0.\end{cases}$$

При $a = 4$ первое неравенство системы примет вид $4x + 3 \geq 0$, $x \geq -\frac{3}{4}$.

При $a \neq 4$ неравенство $(4 - a)x^2 + 4x + (7 - a) \geq 0$ является квадратным. Оно не имеет решений только в случае $\begin{cases} 4 - a < 0, \\ D < 0; \end{cases}$ то есть

$$\begin{cases} a > 4, \\ 16 - 4(4 - a)(7 - a) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 4, \\ -4(a - 8)(a - 3) < 0; \end{cases}$$

из последней системы следует, что $a > 8$.

Следовательно, при $a \leq 8$ неравенство $(4 - a)x^2 + 4x + (7 - a) \geq 0$ имеет решения. Учитывая требования системы $a > 0$, получим окончательный ответ $0 < a \leq 8$.

Ответ: $(0; 8]$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить уравнения и неравенства (a и b параметры).

1) $\sqrt{3x - 5b} = 5b - 2x$;
2) $\sqrt{x^2 - (b + 1)x + 3b + 3} = 2 - x$;
3) $\sqrt{2x^2 - (2b - 2)x + 1} = x - 2$;
4) $\sqrt{x^2 + (b + 3)x - 2} = x + 1$;
5) $\sqrt{2x - 3} < 9 - b$;
6) $\sqrt{a + 1 - x} > 2x + 1$;
7) $(a - 2)\sqrt{x + 1} < 1$;
8) $\sqrt{2x - 4} + \sqrt{x + 7} > b - 3$;
9) $\log_{x+2}(2x + a + 3) = 1$;
10) $\log_{2x}(x^2 - b) = 1$;
11) $(b + 2) \cdot 3^x - b - 1 = 0$;
12) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a \cdot 4^x - \sqrt{2} \cdot 2^x + a + 1 = 0$ имеет единственное решение;
13) $\log_{b+1}(1 - x^2) \geq 1 \quad (b > -1;\ b \neq 0)$;
14) $x^{\log_{-b} x + 1} > b^2 \cdot x \ (b < 0,\ b \neq -1)$;
15) $b^2 + 2b + 1 - 2 \cdot 4^{x+1} - (b + 1) \cdot 2^{x+1} > 0$;

16) $\lg\left(b^4\cdot x\right)<\lg\left(4b^2\cdot x-b-2\right)$, $b\neq 0$;

17) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}(x+a+2)^2+y^2=1,\\ y^2=2ax\end{cases}$ имеет одно решение;

18) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\log_x y=1,\\ y=a+5x-x^2\end{cases}$ имеет два различных решения;

19) При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}6\cdot 2^{x^2}+2=4a-\sin y,\\ 5\sin y+10=a+2^{3+x^2}\end{cases}$ имеет решение?

20) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}y=x^2+2x+2,\\ x^2+2x+y^2-2(a+1)y+a^2+2a+1=0\end{cases}$ имеет решение.

Ответы:

1) при $b\geq 0$ $x=\frac{1}{8}\left(20b+3-\sqrt{40b+9}\right)$; при $b<0$ решений нет;

2) при $-5\leq b<3$ $x=\frac{3b-1}{b-3}$; при $\left[\begin{array}{l}b<-5\\ b\geq 3\end{array}\right.$ решений нет;

3) при $b\geq\frac{13}{4}$ $x=b-3+\sqrt{b^2-6b+12}$, при $b<\frac{13}{4}$ решений нет;

4) при $\left[\begin{array}{l}b\leq -4\\ b>-1\end{array}\right.$ $x=\frac{3}{b+1}$; при $-4<b\leq -1$ решений нет;

5) при $b\geq 9$ решений нет; при $b<9$ $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{b^2-18b+84}{2}\right)$;

6) при $a<-1{,}5$ $x\in(-\infty;\,a+1]$, при $a\geq -1{,}5$ $x\in\left(-\infty;\,\frac{-5+\sqrt{16a+25}}{8}\right]$;

7) при $a>2$ $x\in\left[-1;\,\frac{1}{(a-2)^2}-1\right)$, при $a\leq 2$ $x\in[-1;\,+\infty)$;

8) при $b\geq 6$ $x\in\left(3b^2-18b+38-2(b-3)\cdot\sqrt{2b^2-12b+36};\,+\infty\right)$;

при $b<6$ $x\in[2;\,+\infty)$;

9) при $a < 1$ и $a \neq 0$ $\quad x = -a - 1$; при остальных значениях a решений нет;

10) при $\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} < b < 0 \\ -1 \le b < -\frac{3}{4} \end{array}\right.$ $\quad x = 1 \pm \sqrt{1+b}$; при $b \ge 0$ $\quad x = 1 + \sqrt{1+b}$; при $b = -\frac{3}{4}$ $\quad x = 1{,}5$; при $b < -1$ решений нет;

11) при $\left[\begin{array}{l} b < -2 \\ b > -1 \end{array}\right.$ $\quad x = \log_3 \frac{b+1}{b+2}$; при $-2 \le b \le -1$ решений нет;

12) при $-1 < a \le 0$, $a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$;

13) при $b > 0$ решений нет; при $-1 < b < 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} -1 < x \le -\sqrt{-b} \\ \sqrt{-b} \le x < 1; \end{array}\right.$

14) при $b < -1$ $\left[\begin{array}{l} 0 < x < (-b)^{-\sqrt{2}}; \\ x > (-b)^{-\sqrt{2}}; \end{array}\right.$ при $-1 < b < 0$ $\quad (-b)^{\sqrt{2}} < x < (-b)^{-\sqrt{2}}$;

15) при $b < -1$ $\quad x < \log_2(-b-1) - 1$; при $b = -1$ решений нет; при $b > -1$ $\quad x < \log_2(b+1) - 2$;

16) при $b \ge 2$ и $b = -2$ решений нет; при $0 < b < 2$ или $-2 < b < 0$ $\quad x > \frac{1}{b^2(2-b)}$; при $b < -2$ $\quad 0 < x < \frac{1}{b^2(2-b)}$;

17) $-1; -3$;

18) $(-4; -3) \cup (-3; 0)$;

19) $[2; 3]$;

20) $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$.

Графические методы решения задач с параметром

Первый графический метод решения задач с параметром

Этот метод заключается к сведе́нию исходной задачи к уравнению, неравенству или системе, содержащей **только одну неизвестную** величину (например, x) и **только один** параметр (например, a). Условие на решение исходной задачи также формулируем в терминах x и a.

Получим $\begin{cases} f_1(x,a)=0 \\ f_2(x,a)\ge 0 \\ f_3(x,a)\le 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$. (*)

Далее в декартовой системе координат Oxa изображаем множество точек B, координаты которых удовлетворяют всем полученным уравнениям и неравенствам (*). При каждом фиксированном значении параметра $a = a_0$ искомое решение системы (*) есть проекция на ось OX пересечения множества B с прямой $a = a_0$. Графически легко увидеть и число и расположение корней уравнения $f(x, a) = 0$ при различных значениях параметра a. Например, уравнение $f(x, a) = 0$, график которого изображен на рисунке 51, имеет при $a = a_0$ четыре решения.

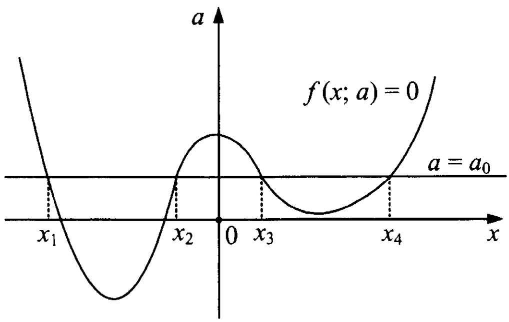


Рис. 51

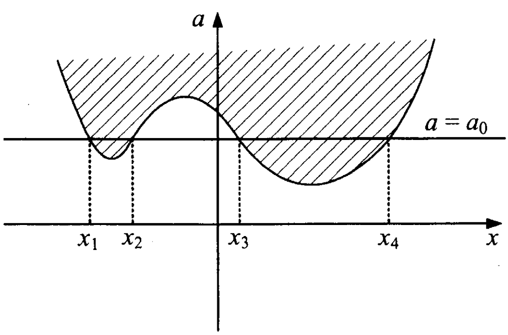


Рис. 52

Неравенство $f(x, a) \ge 0$, графически изображенное в виде области B на рисунке 52, выполняется для $a = a_0$ при $x \in [x_1;\, x_2] \cup [x_3;\, x_4]$.

Пример 1. Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение имеет решения.

Найдите эти решения.

а) $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$;

б) $\cos^4 x - (a + 1)\cos^2 x - (a + 2) = 0$;

в) $\sin 2x - (a + 2)(\sin x + \cos x) + 2a + 1 = 0$.

Решение.

а) $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$.

Пусть $\sin x = t$, тогда $a = -t^2 + 3t$; $-1 \le t \le 1$.

Получим систему $\begin{cases} a = -t^2 + 3t \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$

Изобразим на плоскости (Ota) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе. Горизонтальные прямые ($a = a_0$) пересекают полученное множество точек при $-4 \le a_0 \le 2$. Таким образом, уравнение имеет решения при $-4 \le a \le 2$.

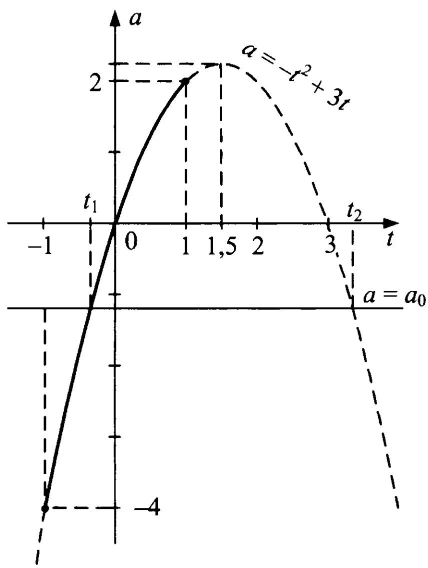


Рис. 53, а

Найдем эти решения.

$t^2 - 3t + a = 0$;

$t_1 = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4a}}{2}$; $t_2 = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 4a}}{2}$ (не удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$).

$$\sin x=\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2};\qquad x=(-1)^n\arcsin\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

О т в е т : при $-4\le a\le 2$; $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{3-\sqrt{9-4a}}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

б) $\cos^4 x-(a+1)\cos^2 x-(a+2)=0.$

Пусть $\cos^2 x=t$, тогда $t^2-(a+1)t-(a+2)=0$ и

$$a=\frac{t^2-t-2}{t+1}=\frac{(t+1)(t-2)}{t+1}=t-2,\ t\ne-1.$$

Получим систему $\begin{cases}a=t-2,\\0\le t\le 1.\end{cases}$ Изобразим на плоскости (Ota) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе.

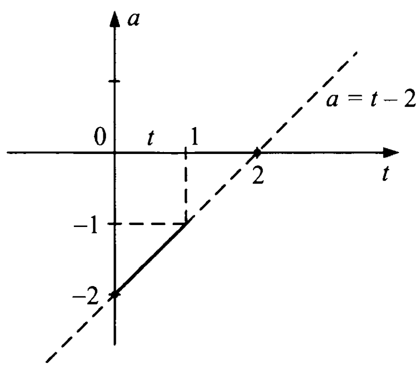


Рис. 53, б

Уравнение имеет решения при $-2\le a\le-1$. Найдем эти решения: $t=a+2$, $\cos^2 x=a+2$, $1+\cos 2x=2a+4$, $\cos 2x=2a+3$,

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+3)+\pi n,\ n\in Z.$$

О т в е т : при $-2\le a\le-1$; $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos(2a+3)+\pi n,\ n\in Z.$

в) $\sin 2x-(a+2)(\sin x+\cos x)+2a+1=0.$

Пусть $\sin x+\cos x=t$, тогда, возведя обе части данной подстановки в квадрат, получим $\sin 2x=t^2-1$. Исходное тригонометрическое уравнение примет вид: $t^2-(a+2)t+2a=0$, откуда $a=t$. Найдем ограничения значений t. Разделим обе части равенства $\sin x+\cos x=t$ на $\sqrt{2}$, получим $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$, откуда $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, так как $-1 \le \frac{t}{\sqrt{2}} \le 1$.

Получим систему $\begin{cases} a = t, \\ -\sqrt{2} \le t \le 2. \end{cases}$

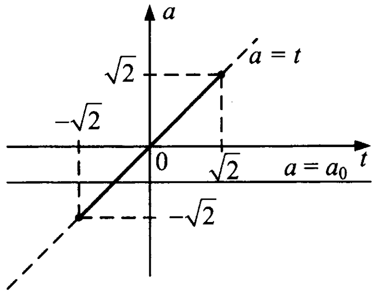


Рис. 54

Таким образом, исходное уравнение имеет решения при $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$, все решения находим по формуле $x = (-1)^n \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

О т в е т: $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение (неравенство) (a — параметр).

а) $4^{-|x-1|} - 2^{2-|x-1|} - a = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}\left(4^x + a\right) + (x+1)\log_5 2 = 0$;

в) $\sqrt{a\left(2^x - 2\right) + 1} = 1 - 2^x$;

г) $4^x - (a + 1)2^x + a \le 0$;

д) При каких значениях параметра функция

$y = \ln\left(\left(p-1\right)\cdot 2^x - 4\cdot 2^{\frac{x}{2}} + \left(p+2\right)\right)$ определена при всех $x \in R$?

Р е ш е н и е.

а) $4^{-|x-1|} - 2^{2-|x-1|} - a = 0$. Пусть $2^{-|x-1|} = t$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 4t - a = 0$, где $0 < t \le 1$.

В системе координат Ota изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} a = t^2 - 4t, \\ 0 < t \le 1. \end{cases}$

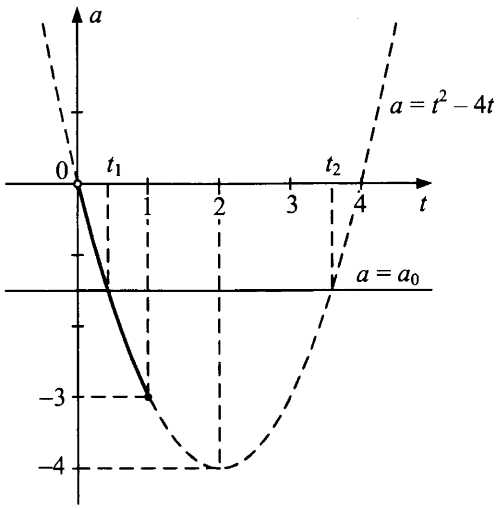


Рис. 55

При $a < -3$, $a \ge 0$ решений нет.

При $-3 \le a < 0$ $\quad t_1 = 2 - \sqrt{4 + a}$, (меньший корень уравнения $t^2 - 4t - a = 0$).

$$2^{-|x-1|} = 2 - \sqrt{4+a},$$

$$-|x-1| = \log_2\left(2 - \sqrt{4+a}\right), \quad |x-1| = -\log_2(2 - \sqrt{4+a}),$$

$$|x-1| = \log_{0,5}(2 - \sqrt{4+a}), \quad x = 1 \pm \log_{0,5}\left(2 - \sqrt{4+a}\right).$$

Ответ: при $-3 \le a < 0$ $\quad x = 1 \pm \log_{0,5}\left(2 - \sqrt{4+a}\right)$;

при $a < -3$, $a \ge 0$ решений нет.

б) $\log_{\frac{1}{5}}\left(4^x + a\right) + (x+1)\log_5 2 = 0,$

$$-\log_5\left(4^x + a\right) + \log_5 2^{x+1} = 0,$$

$$\log_5 2^{x+1} = \log_5\left(4^x + a\right),$$

$$2^{x+1} = 4^x + a.$$

Пусть $2^x = t$, тогда $a = -t^2 + 2t$.

Получим систему

$$\begin{cases} a = -t^2 + 2t, \\ t > 0. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости Ota множество точек, координаты которых удовлетворяют этой системе.

При $a > 1$ корней нет, так как горизонтальные прямые не пересекают множество точек, координаты которых удовлетворяют системе.

При $0 < a \le 1$ из уравнения $a = -t^2 + 2t$ получим уравнение $t^2 - 2t + a = 0$, которое имеет два корня $t = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Возвратимся к переменной x: $2^x = 1 \pm \sqrt{1-a}$, $x = \log_2\left(1 \pm \sqrt{1-a}\right)$.

При $a \le 0$ $x = \log_2\left(1 + \sqrt{1-a}\right)$.

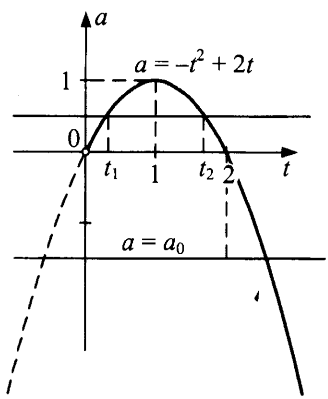


Рис. 56

Ответ: при $a > 1$ корней нет;

при $0 < a \le 1$ $x = \log_2\left(1 \pm \sqrt{1-a}\right)$;

при $a \le 0$ $x = \log_2\left(1 + \sqrt{1-a}\right)$.

в) $\sqrt{a\left(2^x - 2\right) + 1} = 1 - 2^x$.

При $2^x = t$ уравнение примет вид $\sqrt{a(t-2)+1} = 1 - t$.

Сведем это уравнение к системе $\begin{cases} a\left(t-2\right) + 1 = \left(1-t\right)^2, \\ 0 < t \le 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} a(t-2) = t(t-2), \\ 0 < t \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = t, \\ 0 < t \le 1. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости Ota множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе.

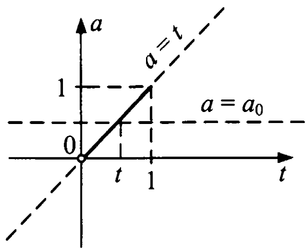


Рис. 57

При $0 < a \le 1$ $t = a$, $2^x = a$, $x = \log_2 a$.

При остальных значениях a уравнение не имеет корней.

Ответ: при $0 < a \le 1$ $x = \log_2 a$; при остальных значениях a корней нет.

г) $4^x - (a+1)2^x + a \le 0$

Пусть $2^x = t$, $t > 0$.

Неравенство примет вид: $t^2 - (a+1)t + a \le 0$,

$t(t-1) \le a(t-1)$.

Значение $t = 1$ является решением при любом значении параметра a.

При $0 < t < 1$ $a \le t$; при $t > 1$ $a \ge t$.

Таким образом: $(1)\begin{cases} 0 < t \le 1 \\ a \le t \end{cases}$ (рис. 58) или $(2)\begin{cases} t \ge 1 \\ a \ge t \end{cases}$ (рис. 59).

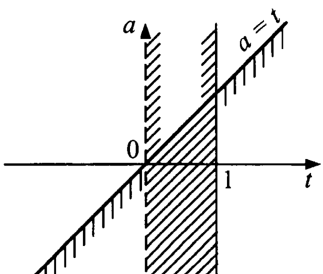


Рис. 58

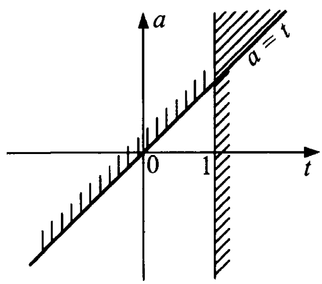


Рис. 59

Множество точек плоскости (Ota), координаты которых удовлетворяют совокупности систем (1) и (2), имеет вид (рис. 60):

при $0 < a < 1$ $\quad t \in [a; 1]$, $\quad x \in [\log_2 a; 0]$;.

при $a > 1$ $\quad t \in [1; a]$, $\quad x \in [0; \log_2 a]$;.

при $a = 1$ $\quad t = 1$; $\quad x = 0$;

при $a \le 0$

$0 < t \le 1$, $\quad x \le 0$.

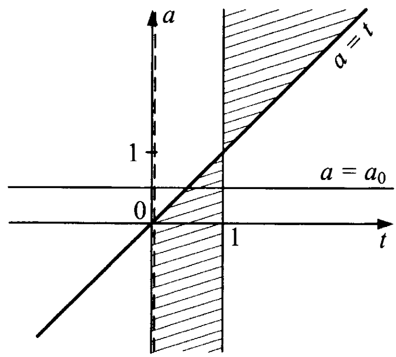


Рис. 60

Ответ: при $0 < a < 1$ $\quad \log_2 a \le x \le 0$;

при $a > 1$

$0 \le x \le \log_2 a$; при $a = 1$ $\quad x = 0$;

при $a \le 0$ $\quad x \le 0$.

д) При каких значениях параметра функция

$y = \ln\left((p-1)\cdot 2^x - 4\cdot 2^{\frac{x}{2}} + (p+2) \right)$ определена при всех $x \in R$?

Данная функция определена при всех $x \in R$, если неравенство $(p-1)\cdot 2^x - 4\cdot 2^{\frac{x}{2}} + (p+2) > 0$ выполняется всегда.

Пусть $2^{\frac{x}{2}} = t$, тогда $\begin{cases} (p-1)\cdot t^2 - 4t + (p+2) > 0, \\ t > 0. \end{cases}$

При $p = 1$ $\quad \begin{cases} -4t + 3 > 0, \\ t > 0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t < \frac{3}{4}, \\ t > 0, \end{cases}$ $\quad 0 < t < \frac{3}{4}$, $\quad 0 < 2^{\frac{x}{2}} < \frac{3}{4}$.

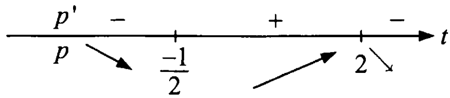
Последнее неравенство выполняется не при всех $x \in R$.

При $p \ne 1$

$$\begin{cases} pt^2 - t^2 - 4t + p + 2 > 0, \\ t > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} p(t^2 + 1) > t^2 + 4t - 2, \\ t > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} p > \dfrac{t^2 + 4t - 2}{t^2 + 1}, \\ t > 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $p = \dfrac{t^2 + 4t - 2}{t^2 + 1}$ исследуем ее на монотонность, найдем экстремумы, асимптоты.

$$p' = \frac{-4(t-2)\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t^2 + 1\right)^2};$$



$t = -\dfrac{1}{2}$ — точка минимума; $t = 2$ — точка максимума, $p = 1$ — горизонтальная асимптота.

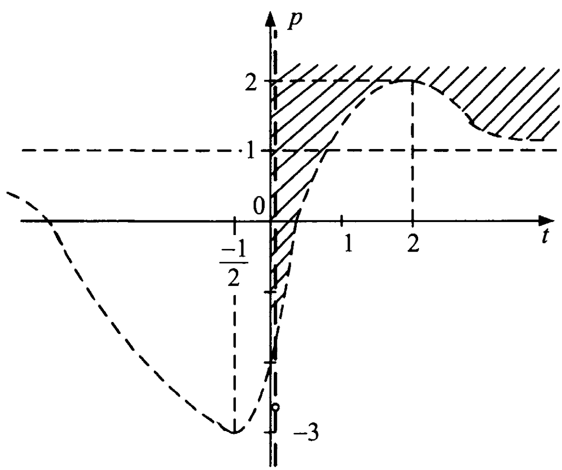


Рис. 61

На рисунке 61 заштриховано множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} p > \dfrac{t^2 + 4t - 2}{t^2 + 1}, \\ t > 0. \end{cases}$

При $p > 2$

$t > 0$,

$2^{\frac{x}{2}} > 0$, x — любое действительное число.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Пример 3.

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \lg y = \lg\left(1 - \frac{4}{x}\right), \\ (y - x)a = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Найдите это решение.

Решение.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y = 1 - \frac{4}{x}, \\ y > 0, \\ (y - x)a = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{1 - y}, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ \frac{y - y^2 - 4}{1 - y}a = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{1 - y}, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ a = \frac{1 - y}{-y^2 + y - 4}. \end{cases}$$

Для построения графика функции $a = \frac{1 - y}{-y^2 + y - 4}$ найдем асимптоты, интервалы монотонности, точки экстремума.

$\lim\limits_{y \to \infty} \frac{1 - y}{-y^2 + y - 4} = 0$, $a = 0$ — горизонтальная асимптота;

$y^2 - y + 4 \neq 0$ — вертикальных асимптот нет;

$$a' = \frac{-(1 + y)(y - 3)}{\left(-y^2 + y - 4\right)^2}$$

y		-1		3	
a'	$-$		$+$		$-$
a	↘		↗		↘

$y = -1$ — точка минимума; $y = 3$ — точка максимума.

Интервалы знакопостоянства:

y		1	
a	$-$		$+$

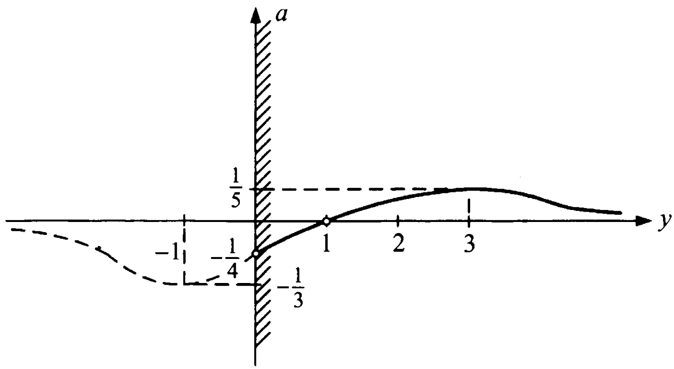


Рис. 62

Единственное решение получим при $-\frac{1}{4} < a < 0$, $a = \frac{1}{5}$. Найдем решение системы при указанных значениях параметра a.

Так как $a = \frac{1-y}{-y^2+y-4}$, то $ay^2 - (a+1)y + (4a+1) = 0$,

$D = (a+1)^2 - 4a(4a+1) = -15a^2 - 2a + 1;$

$$y = \frac{a+1+\sqrt{-15a^2-2a+1}}{2a};$$

$$x = \frac{4}{1-y} = \frac{8a}{a-1-\sqrt{-15a^2-2a+1}}.$$

Ответ: при $a \in \left(-\frac{1}{4};\, 0\right) \cup \left\{\frac{1}{5}\right\}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{8a}{a-1-\sqrt{-15a^2-2a+1}}, \\ y = \dfrac{a+1+\sqrt{-15a^2-2a+1}}{2a}. \end{cases}$$

Пример 4.

При каких значениях параметра a система

$\begin{cases} 1+\log_2(a-2-y) = \log_2(a-x) \\ y+2\sqrt{x} = 1 \end{cases}$ имеет решение?

Решение.

Система примет вид:

$$\begin{cases} 2a-4-2y=a-x, \\ a-2-y>0, \\ y+2\sqrt{x}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a-4-2y=a-\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2, \\ y<a-2, \\ x=\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4}y^2+\dfrac{5}{2}y+\dfrac{15}{4}, \\ a>y+2, \\ x=\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2. \end{cases}$$

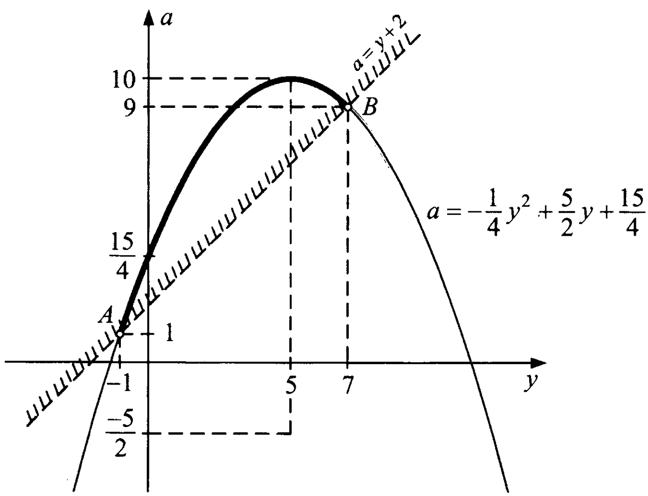


Рис. 63

Ответ: (1; 10].

Пример 5.

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y=\sqrt{ax-2} \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.

Выразим из второго уравнения системы x: $x=\dfrac{y^2+2}{a}$. Система примет вид: $\begin{cases} \dfrac{y^2+2}{a}-2y+1=0, \\ y\ge 0, \\ x=\dfrac{y^2+2}{a}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a=\dfrac{y^2+2}{2y-1}, \\ y\ge 0, \\ x=\dfrac{y^2+2}{a}. \end{cases}$

$\left(0; \frac{1}{2}\right)$ не является решением исходной системы ни при каком значении параметра.

a'	$+$		$-$		$-$		$+$	
								y
a	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$$a' = \frac{2(y+1)(y-2)}{(2y-1)^2},$$

$y=-1$ — точка максимума функции $a = \frac{y^2+2}{2y-1}$;

$y = 2$ — точка минимума функции $a = \frac{y^2+2}{2y-1}$. $a = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$ — наклонная асимптота, $y = \frac{1}{2}$ — вертикальная асимптота.

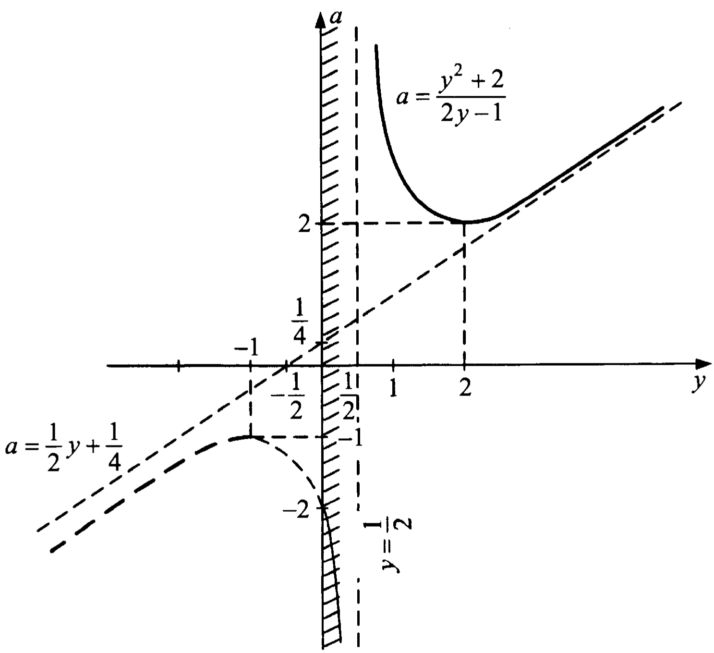


Рис. 64

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{2\}$.

Пример 6.

При каких значениях параметра a имеет решение система $\begin{cases} x^2 + y = 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2y? \end{cases}$

Решение.

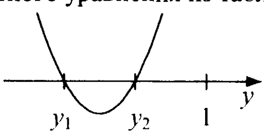
Преобразуем исходную систему:

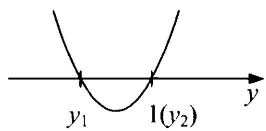
$$\begin{cases} x^2 - 2x = -y, \\ \left(x^2 - 2x\right) + y^2 - 2y + a^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x = -y, \\ y^2 - 3y + a^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x + y = 0, \\ y^2 - 3y + a^2 = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы система имела решение, недостаточно потребовать, чтобы дискриминант второго уравнения D_2 был неотрицателен. Мы сможем найти значение x из первого уравнения, если его дискриминант $D_1 = 4 - 4y \geq 0$, то есть $y \leq 1$.

Таким образом, система исходная имеет решение, если имеет решение система $\begin{cases} y^2 - 3y + a^2 = 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$ Используем необходимые и достаточные условия для реализации нужного расположения корней квадратного уравнения из таблицы на стр. 224.

1)

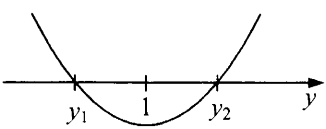




$\begin{cases} f(1) \geq 0, \\ D_2 \geq 0, \\ y_0 < 1, \end{cases}$ где $f(y) = y^2 - 3y + a^2;$ $D_2 = 9 - 4a^2;$ $y_0 = 1{,}5.$

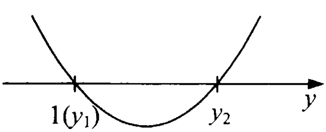
Первый случай не имеет места, так как $y_0 = 1{,}5;$ $1{,}5 > 1$.

2)



$f(1) < 0;$ $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + a^2;$ $a^2 - 2 < 0;$ $a \in \left(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right).$

3)



$$\begin{cases} f(1)=0, \\ D_2 \ge 0, \\ y_0 > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-2=0, \\ 9-4a^2 \ge 0, \\ 1{,}5>1, \end{cases} \quad a=\pm\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x-a}=2x-1$;

б) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=a$;

в) $\dfrac{\left(\left(a^2-7a+10\right)x-a^2+25\right)\sqrt{2^x-0{,}125}}{x-6}=0$;

г) $(a-3)\cdot 9^x-6^{x+1}+(a+5)\cdot 4^x=0$

уравнение имеет решение;

д) $\log_2^2 \cos x-2a\cdot\log_2 \cos x+2-a^2=0$.

2. Решить неравенства:

а) $\log_a(x-2)+\log_a x>1,\quad a>0,\quad a\ne 1$;

б) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+7}>a$;

в) $4^x-(a+1)\cdot 2^x+a\le 0$;

г) $\log_a\left(1-x^2\right)\ge 1,\quad (a>0,\ a\ne 1)$;

д) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{8+\log_a x}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x},\quad (a>0,\ a\ne 1)$.

3. Найти значения параметра a, при которых система имеет решение:

а) $\begin{cases} y=x^2-2x+a, \\ x^2-2x+y^2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+2y=4x, \\ x^2+y^2+a^2=4x+2ay; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=2\sqrt{x-2}, \\ y=ax+1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_2(1-x)+\log_2(1-y)=2, \\ y=a-x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log_2(y+a-2)=\log_2(a+x)-1, \\ y=2\sqrt{1-x}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 1+\log_2(a-2-y)=\log_2(a-x), \\ y+2\sqrt{x}=1. \end{cases}$

4. При каком значении параметра p уравнение $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение?

5. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^2 - x - 2\right| = a \cdot (x+1)$ имеет два различных корня? Найдите эти корни.

6. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \lg y = \lg\left(1 - \frac{4}{x}\right), \\ (y-x)a = 1 \end{cases}$ имеет два различных решения?

7. Найдите все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $\log_2 x^2 \le \log_2(x+1) - 1$ является решением неравенства $16x^2 - a^4 \le 0$.

8. Найдите все значения a, при которых уравнение
$4^x + 4^{-x} - (a+1)(2^x + 2^{-x}) + a + 2 = 0$ имеет единственное решение.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение
$2\cos^2 3x + \left(4a^2 - 7\right)\cos 3x + 2a^2 - 4 = 0$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ ровно пять корней.

10. Решить систему $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a < 0, \\ 2x + a + 6 > 0. \end{cases}$

Ответы:

1) а) при $a > \frac{9}{16}$ решений нет;

при $a < 0{,}5$ $x = \frac{5 + \sqrt{9 - 16a}}{8}$;

при $0{,}5 \le a < \frac{9}{16}$ $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9 - 16a}}{8}$;

при $a = \frac{9}{16}$ $x = \frac{5}{8}$;

б) при $|a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ решений нет;

при $|a| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $x = 7{,}5$;

при $|a| > \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x_{1,2} = 3a^2 - 6 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 9}$;

в) при $a < \frac{1}{4}$, $2 < a < \frac{17}{5}$; $\frac{17}{5} < a < 5$; $a > 5$ $x = \frac{a+5}{a-2}$; $x = -3$;

при $\frac{1}{4} \le a \le 2$, $a = \frac{17}{5}$ $\quad x = -3$;

при $a = 5$ $\quad x \in [-3; 6) \cup (6; +\infty)$;

г) при $-5 < a \le 4$;

д) при $a < -\sqrt{2}$, $a \ge \sqrt{2}$ $\quad x = \pm \arccos 2^{a-\sqrt{2(a^2-1)}} + 2\pi n$, $n \in Z$;

при $-\sqrt{2} \le a \le -1$ $x = \pm \arccos 2^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}} + 2\pi n$, $n \in Z$;

при $-1 < a < \sqrt{2}$ решений нет;

2) а) при $0 < a < 1$ $\quad x \in \left(2;\ 1+\sqrt{1+a}\right)$;

при $a > 1$ $\quad x \in \left(1+\sqrt{1+a};\ +\infty\right)$;

б) при $a < 3$ $\quad x \ge 2$;

при $a \ge 3$ $\quad x \in \left(3a^2 - 2a\sqrt{2a^2+18} + 11;\ +\infty\right)$;

в) при $a > 1$ $\quad 0 \le x \le \log_2 a$;

при $a = 1$ $\quad x = 0$; при $0 < a < 1$

$\log_2 a \le x \le 0$; при $a \le 0$ $\quad x \le 0$;

г) при $a > 1$ решений нет;

при $0 < a < 1$ $\quad -1 < x \le -\sqrt{1-a}$; $\sqrt{1-a} \le x < 1$;

д) при $a > 1$ $\quad 0 < x < \frac{1}{a^4}$; $x > a^8$;

при $0 < a < 1$ $\quad 0 < x < a^8$; $\quad x > \frac{1}{a^4}$;

3) а) $\left[-\frac{1}{4};\ 2\right]$;

б) $\left[-\frac{1}{2};\ 4\right]$;

в) $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$;

г) $(-\infty; -2]$;

д) $(0; 5]$;

е) $(-1; 5)$.

4) при $p \le 0$; $\quad p = \frac{25}{4}$;

5) при $a < -3$, $a \ge 3$ $\quad x_1 = 2 + a$, $x_2 = -1$;

при $a = 0$ $\quad x_1 = -1$; $x_2 = 2$;

6) при $a \in \left(0; \frac{1}{5}\right)$;

7) $|a| \geq 2$;

8) $a = 2$;

9) $\pm\sqrt{2}$;

10) при $a \leq -8$ или $a \geq 1$ решений нет;

при $-8 < a \leq 0$ $\quad -\frac{a+6}{2} < x < -2 + \sqrt{1-a}$;

при $0 < a < 1$ $\quad -2 - \sqrt{1-a} < x < -2 + \sqrt{1-a}$.

Второй графический метод решения задач с параметром

Изложим суть второго графического метода. Исходная система уравнений с параметром и (или) неравенств с двумя и более переменными сводится к системе уравнений (неравенств) только с двумя переменными, причем единственный параметр входит только в одно уравнение или неравенство системы:

$$\begin{cases} f(x, y, p) \gtrless 0, \\ g_1(x, y) \gtrless 0, \\ g_2(x, y) \gtrless 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Далее на плоскости XOY строятся:

(1) семейство линий или областей $M_1(p)$, заданных уравнением (неравенством) системы $(*)$, содержащим параметр p;

(2) линия или область M_2, заданная остальными уравнениями (неравенствами) системы $(*)$, не содержащими параметр p.

Анализируя пересечение двух полученных множеств $M_1(p) \cap M_2$ при различных значениях параметра p, делаем выводы о виде и характере решений системы.

Пример 1.

Исследовать число решений системы

$$\begin{cases} y + \sqrt{2p - 5 - x^2 + px - (p+2)y} = 1, \\ x + y + 6 - p = 0 \end{cases}$$ при различных значениях p.

Р е ш е н и е .

Возведем первое уравнение в квадрат и оставим параметр лишь в одном уравнении:

$$\begin{cases} 2p-5-x^2+px-(p+2)y=(1-y)^2, \\ 1-y\ge 0, \\ p=x+y+6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x-y+2)=x^2+y^2+6, \\ y\le 1, \\ p=x+y+6; \end{cases} \qquad \begin{cases} y\le 1, \\ (x+y+6)(x-y+2)=x^2+y^2+6, \\ y=p-6-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=p-6-x, \\ y\le 1, \\ x=\frac{1}{4}(y+1)^2-1. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы задает семейство параллельных друг другу прямых с угловым коэффициентом $k=-1$ и пересекающих ось OY в точке $(0;\ p-6)$, а остальные (уравнение и неравенство) — часть параболы с вершиной в точке $A\ (-1;\ -1)$ с ветвями, направленными вправо, пересекающей ось OY в точках $B\ (0;\ -3)$ и $C\ (0;\ 1)$ и расположенной в полуплоскости $y\le 1$.

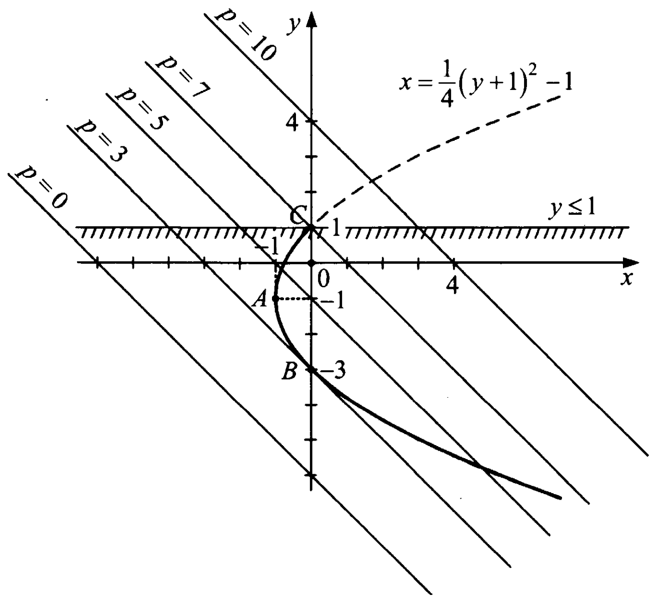


Рис. 65

Найдем значения p, при которых прямая $y = p - 6 - x$ касается параболы $x = \frac{1}{4}(y+1)^2 - 1$, решив систему уравнений прямой и параболы:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(y+1)^2 - 1, \\ x = p - 6 - y. \end{cases}$$

$$p - 6 - y = \frac{1}{4}(y+1)^2 - 1,$$
$$y^2 + 6y + 21 - 4p = 0,$$
$$D = 36 - 4(21 - 4p) = 0,$$
$$p = 3.$$

Прямая $y = p - 6 - x$ проходит через точку $C\,(0;\ 1)$ при $p = 7$, (так как $1 = p - 6 - 0, p = 7$).

Значит, при $p > 7$ и при $p = 3$ прямая и часть параболы имеют одну общую точку, а при $3 < p \le 7$ — две.

Ответ: при $p < 3$ решений нет;
при $p = 3$ и $p > 7$ одно решение;
при $3 < p \le 7$ два решения.

Пример 2.

Исследовать количество решений уравнения $a \cdot e^{2x} + (2 - 3a) \cdot e^x + 2 = 0$ в зависимости от параметра a.

Решение.

Пусть $e^x = t$, $t > 0$. Исходное уравнение примет вид $at^2 + (2 - 3a)t + 2 = 0$,

$2t + 2 = 3at - at^2$.

Обозначим $2t + 2 = y$.

Получим систему $\begin{cases} y = 2t + 2, \\ y = a\left(3t - t^2\right), \\ t > 0. \end{cases}$

Второе уравнение системы задает семейство парабол (при $a \ne 0$), пересекающих ось Ot при $t = 0$ и $t = 3$. Ветви парабол направлены вниз (при $a > 0$) или вверх (при $a < 0$). При $a = 0$ получаем прямую $y = 0$. Так как $t > 0$, то прямая $y = 2t + 2$ и семейство парабол интересуют нас в полуплоскости $t > 0$.

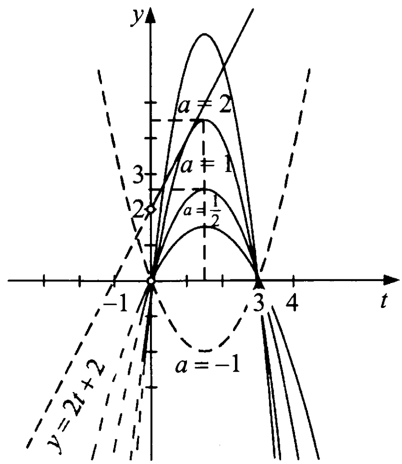


Рис. 66

Найдем значение параметра, при котором прямая $y = 2t + 2$ касается параболы $y = a(3t - t^2)$. Дискриминант квадратного уравнения

$at^2 + (2 - 3a)t + 2 = 0$ приравняем к нулю.

$D = (2-3a)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 9a^2 - 20a + 4;$

$D = 0$ при $a_1 = 2;\ a_2 = \frac{2}{9}.$

При $a = 2$ абсцисса точки касания равна $t_0 = \frac{3a-2}{2a} = 1 > 0.$

При $a = \frac{2}{9}$ $t_0 = -3 < 0$ (не подходит).

Полупрямая $y = 2t + 2$, $t > 0$ и парабола $y = a(3t - t^2)$ имеют при $a > 2$ две общие точки; при $a = 2$ — одну общую точку; при $0 \le a < 2$ — ни одной общей точки; при $a < 0$ — одну общую точку.

Ответ: при $0 \le a < 2$ решений нет;

при $a < 0$ и $a = 2$ одно решение;

при $a > 2$ два решения.

Пример 3.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$\sqrt{2(|x| - x)} = 1 + a \cdot (x - 6)$ имеет единственный корень. Выпишите этот корень при каждом из найденных a.

Р е ш е н и е.

Исходное уравнение имеет вид $f(x)=1+a(x-6)$, где $f(x)=\sqrt{2(|x|-x)}$. Уравнение $y = 1 + a(x - 6)$ задает семейство прямых, проходящих через точку A (6; 1) и имеющих угловой коэффициент a.

Построим на плоскости $0xy$ график

$$f(x)=\sqrt{2(|x|-x)}=\left[\begin{array}{l}0, \text{ если } x\ge 0,\\ 2\sqrt{-x}, \text{ если } x\le 0.\end{array}\right.$$

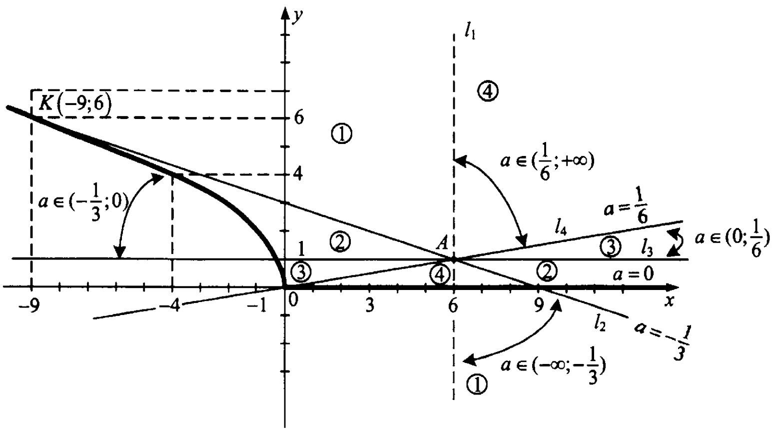


Рис. 67

Через точку A (6; 1) проводим:

1) прямую l_1, параллельную оси $0y$;
2) касательную l_2 к графику $y=2\sqrt{-x},\ x\le 0$.

Соответствующее значение параметра для прямой l_2 ищем из уравнения

$2\sqrt{-x}=1+ax-6a,\ x\le 0;$

$a^2x^2 + (4 + 2a - 12a^2)\,x + (1 + 36a^2 - 12a) = 0;$

$D=-16(6a^2-a-1)=0$; $D = 0$ при $a=-\frac{1}{3}(x\le 0)$, или $a=\frac{1}{2}$ (соответствующее значение x не удовлетворяет условию $x\le 0$).

Прямая l_2: $y = 3 -\frac{1}{3}x$ касается графика $y=2\sqrt{-x},\ x\le 0$ в точке $K(-9;6)$.

3) прямую, параллельную оси Ox (являющейся осью параболы $x=-\frac{y^2}{4}$, ветвью которой является $y=2\sqrt{-x}$);

4) прямую l_4, соединяющую точку A с точкой стыка $y = f(x)$. Этой прямой соответствует значение $a=\frac{1}{6}$.

Эти прямые разбивают плоскость на области, такие, что в пределах каждой из них количество точек пересечения прямой $y = 1 + ax - 6a$ с графиком $y = 0$ $(x \geq 0)$ и $y=2\sqrt{-x}$ $(x \leq 0)$ остается неизменным. Определяем число решений уравнения в каждой области, учитывая, что прямая, не параллельная оси параболы, пересекает параболу строго в одной точке в том и только в том случае, когда она является касательной к этой параболе.

Уравнение имеет единственное решение при:

1) $a\in\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, что определяет x из уравнения $0 = 1 + a(x - 6)$; $x=\frac{6a-1}{a}$ (область 1).

2) $a\in\left(0; \frac{1}{6}\right)$ — область (3), x определяется как $x=-\frac{y^2}{4}$,

где y — больший корень уравнения $y=1+a\left(-\frac{y^2}{4}-6\right)$,

$$ay^2+4y+(24a-4)=0$$

$$D = 16 - 4a(24a - 4) = -96a^2 + 16a + 16 = 16(-6a^2 + a + 1);$$

$$y=\frac{-4+4\sqrt{-6a^2+a+1}}{2a}=\frac{-2+2\sqrt{-6a^2+a+1}}{a};$$

$$x=-\frac{y^2}{4}=-\left(\frac{-1+\sqrt{-6a^2+a+1}}{a}\right)^2.$$

3) $a\in\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$ — область (4); x определяется из уравнения $0 = 1 + a(x - 6)$.

Ответ:

$a\in\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)\cup[0; +\infty)$.

При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$; $x = \frac{6a-1}{a}$.

При $a \in \left(0; \frac{1}{6}\right)$; $x = -\left(\frac{-1+\sqrt{1+a-6a^2}}{a}\right)^2$.

При $a = 0$ $\quad x = -\frac{1}{4}$.

Пример 4.

Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(2p-1)\cos x + (p-2)\sin x = 3p$ имеет два решения на отрезке $[0; \pi]$.

Решение.

Пусть $\cos x = y$, $\sin x = z$, тогда $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и $y^2 + z^2 = 1$ — окружность с центром (0; 0) и $R = 1$, а условие $x \in [0; \pi]$ означает $Z \geq 0$ (верхнюю половину плоскости YOZ).

Исходное уравнение принимает вид системы:

$$\begin{cases} (2p-1)y + (p-2)z = 3p, \\ y^2 + z^2 = 1, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Система должна иметь единственное решение.

Применим второй графический метод. Уравнение $(2p-1)y + {}$ $+ (p-2)z = 3p$ задает семейство прямых. При $p = 2$ получаем прямую $y = 2$, параллельную OZ, при $p \neq 2$ — прямую $z = \frac{2p-1}{2-p}y + \frac{3p}{p-2}$ с угловым коэффициентом $k = \frac{2p-1}{2-p} = \; = -2 + \frac{3}{2-p}$, который принимает любые значения, кроме $k = -2$. Перепишем уравнение прямой в виде $p(2y + z - 3) = y + 2z$.

Решив систему $\begin{cases} 2y + z - 3 = 0, \\ y + 2z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2, \\ z = -1, \end{cases}$ получаем, что через точку A (2; –1) проходит все семейство прямых.

Система $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ z \geq 0 \end{cases}$ задает полуокружность с центром в точке (0; 0) и $R = 1$, расположенную в верхней полуплоскости.

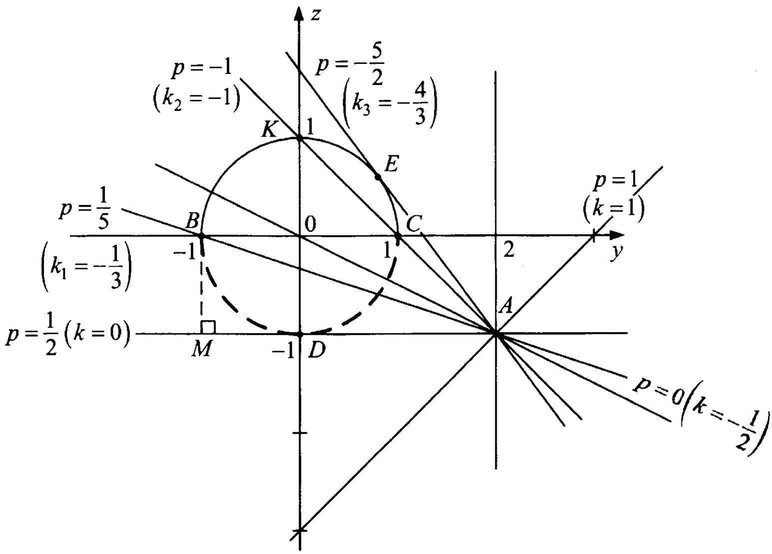


Рис. 68

Найдем угловой коэффициент прямой AB:

$k_1=-\frac{1}{3}$ $\left(\text{из } \Delta BAM:\ \operatorname{tg}\angle BAM=\frac{BM}{MA}=\frac{1}{3}\right)$.

Угловой коэффициент прямой AK: $k_2=-1$ (из ΔKOC).

Угловой коэффициент прямой AE:

$$k_3=-\operatorname{tg}\angle DAE=-\operatorname{tg}(2\cdot\angle DAO)=-\frac{2\operatorname{tg}\angle DAO}{1-\operatorname{tg}^2\angle DAO}=-\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}.$$

Найдем значения параметра, соответствующие найденным коэффициентам:

для $k_1=-\frac{1}{3}$ $\quad\frac{2p-1}{2-p}=-\frac{1}{3};\quad 6p-3=-2+p;\ \ p=\frac{1}{5};$

для $k_2=-1$ $\quad\frac{2p-1}{2-p}=-1;\quad 2p-1=p-2;\ \ p=-1;$

для $k_3=-\frac{4}{3}$ $\quad\frac{2p-1}{2-p}=-\frac{4}{3};\quad 6p-3=4p-8;\ \ p=-\frac{5}{2}.$

Ответ: $p\in\left(-\frac{5}{2};-1\right]$.

Пример 5. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y=\sqrt{16-6x-x^2}, \\ x=ay-4a \end{cases}$ имеет два различных решения?

Р е ш е н и е . Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} y \ge 0, \\ y^2 = 16-6x-x^2, \\ x=a(y-4); \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 0, & (1) \\ y^2+(x+3)^2=25, & (2) \\ x=a(y-4). & (3) \end{cases}$$

Уравнение $x = a\,(y-4)$ задает семейство прямых на плоскости Oyx (Oy — ось абсцисс, Ox — ось ординат), проходящих через точку $A\,(4;\,0)$ с угловым коэффициентом a.

При изменении углового коэффициента a происходит вращение прямой вокруг точки A.

Уравнение (2) задает окружность радиуса $R = 5$ с центром в точке $K\,(0;\,-3)$. Так как в системе присутствует ограничение (1), то подсистема (1)–(2) описывает полуокружность, лежащую правее оси Ox, и ее граничные точки B и C на оси Ox. Количество пересечений прямой (3) с полуокружностью равно числу решений исходной системы при каждом значении a.

Точка A лежит на окружности. Следовательно, одно решение $x = 0, y = 4$ есть всегда.

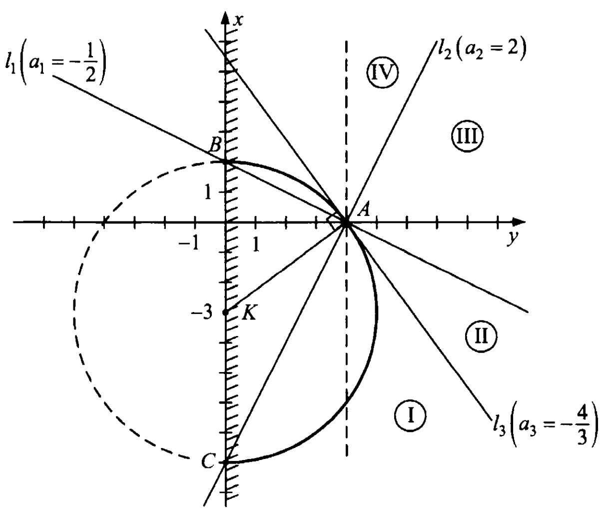


Рис. 69

Проведем прямую l_1, соединяющую A с точкой B (0; 2): $a_1 = -\frac{1}{2}$.

Проведем прямую l_2, соединяющую точку A с точкой C (0; –8): $a_2 = 2$.

Проведем прямую l_3, касательную к окружности в точке A: $a_3 = -\frac{4}{3}$.

На рисунке 69 показаны 4 области. При вращении прямой (3) вокруг точки A в пределах каждой из полученных областей I, II, III и IV количество пересечений прямой с полуокружностью не меняется.

Таким образом, исходная система имеет решения:

в области I: $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$ — два различных решения;

в области II: $a \in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ — два различных решения;

в области IV: $a \in (2; +\infty)$ — два различных решения;

на границе II и III областей: $a = -\frac{1}{2}$ — два различных решения;

на границе III и IV областей: $a = 2$ — два различных решения.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Пример 6.

Найдите все значения параметра p, при которых неравенство $(x - p + 3) \cdot |x - p| + 1 \le \log_2 x$ имеет решение.

Решение.

Пусть $x - p = t$, тогда $x = p + t$ и исходное неравенство примет вид $(t + 3) \cdot |t| + 1 \le \log_2 (t + p)$, $\begin{cases} y = \log_2(t + p), \\ y \ge (t + 3) \cdot |t| + 1. \end{cases}$

На плоскости tOY уравнение $y = \log_2 (t + p)$ задает семейство линий, получающихся из графика $y = \log_2 t$ сдвигом на $(-p)$ вдоль оси t (рис. 70).

Неравенство $y \ge (t + 3) \cdot |t| + 1$ задает часть плоскости, лежащей выше графика $y = (t + 3) \cdot |t| + 1 = \begin{cases} t^2 + 3t + 1, & \text{при } t \ge 0, \\ -t^2 - 3t + 1, & \text{при } t < 0, \end{cases}$ и сам график $y = (t + 3) \cdot |t| + 1$, так как неравенство нестрогое.

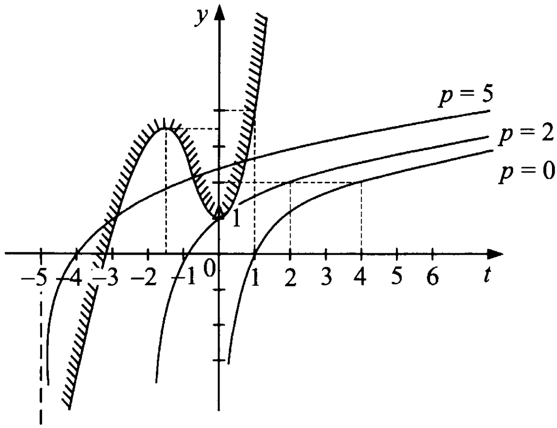


Рис. 70

О т в е т: $p \geq 2$.

Пример 7.

При каких значениях параметра a уравнение $(x+3)^2 = 3a(2|x|-3)$ имеет два различных решения? Выпишите эти решения при найденных a.

Р е ш е н и е.

Обратим внимание на преобразование: $x = |x|$, если $x \geq 0$; $x = -|x|$, если $x \leq 0$.

Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (|x|+3)^2 = 6a\left(|x| - \frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 0 \\ (|x|-3)^2 = 6a\left(|x| - \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Пусть $|x| = t$, тогда

$$(1) \quad \begin{cases} x = t \\ t \geq 0 \\ \frac{1}{6}(t+3)^2 = a\left(t - \frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ или } (2) \quad \begin{cases} x = -t \\ t \geq 0 \\ \frac{1}{6}(t-3)^2 = a\left(t - \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Количество решений системы (1) равно числу пересечений прямой из семейства прямых $y = a\left(t - \frac{3}{2}\right)$ с графиком функции $f(t) = \frac{1}{6}(t+3)^2$, которая определена при $t \geq 0$.

Количество решений системы (2) равно числу точек пересечений прямой семейства $y = a\,(t - 1{,}5)$ с графиком функции $g(t) = \frac{1}{6}(t-3)^2$, $t \geq 0$. Таким образом, количество решений совокупности систем (1) и (2) равно числу пересечений прямой из семейства $y = a\,(t - 1{,}5)$ с графиками функций $f(t) = \frac{1}{6}(t+3)^2$ и $g(t) = \frac{1}{6}(t-3)^2$, $t \geq 0$.

Графики функций $y = f(t)$, $y = g(t)$, $t \geq 0$ не зависят от параметра: они являются частями соответствующих парабол.

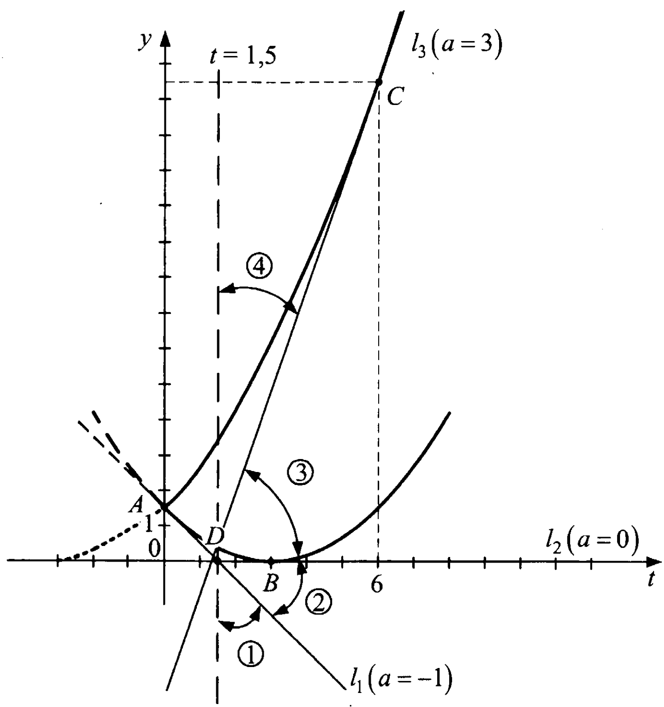


Рис. 71

Все прямые семейства $y = a(t - 1{,}5)$ проходят через точку D (1,5; 0) и имеют угловой коэффициент a.

Прямая l_1 этого семейства проходит через точку A при $a = -1$.

Прямая l_2 этого семейства проходит через точку B при $a = 0$.

Прямая l_3 этого семейства проходит через точку C, она касается графика $y = f(t)$ при $a = 3$.

Эти прямые делят плоскость на области, в каждой из которых число пересечений с каждой из кривых $f(t)$ и $g(t)$ неизменно.

Каждое пересечение определяет единственное значение $x = t$, если прямая пересекается с $f(t)$, и $x = -t$, если она пересекается с $g(t)$.

Поэтому исходное уравнение имеет два различных решения в области 1 и в области 3, то есть при $a \in (-\infty; -1)$ и $a \in (0; 3)$. Мы уже напоминали свойство параболы: прямая, не параллельная оси симметрии параболы, пересекается с параболой в единственной точке в том и только в том случае, когда эта прямая является касательной к параболе.

Поэтому в области 4 точек пересечения прямой и парабол — четыре, так как прямые, лежащие в этой зоне, пересекают обе параболы и не являются касательными к ним.

Аналогично прямая l_3, разделяющая области 3 и 4, касается $f(t)$ и пересекает $g(t)$ в двух точках, лежащих на $[0; +\infty)$. Значит, условию удовлетворяют лишь $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$.

Найдем значение x.

При $a \in (-\infty; -1)$:

1) $(t + 3)^2 = 6at - 9a$; $t^2 + (6 - 6a)t + (9 + 9a) = 0$,

   $t = -3 + 3a \pm 3\sqrt{a^2 - 3a}$.

   Так как $t \geq 0$ и $x = t$, то $x = 3\left(-1 + a + \sqrt{a^2 - 3a}\right)$.

2) $(t - 3)^2 = 6at - 9a$; $t^2 - (6 + 6a)t + (9 + 9a) = 0$; $t = 3 + 3a \pm \sqrt{a^2 + a}$.

   Так как $t \geq 0$ и $x = -t$, то $x = -3\left(1 + a + \sqrt{a^2 + a}\right)$.

При $a \in (0; 3)$ $\qquad x = -3\left(a + 1 \pm \sqrt{a^2 + a}\right)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$.

При $a \in (-\infty; -1)$: $\left[\begin{array}{l} x = 3\left(a - 1 + \sqrt{a^2 - 3a}\right) \\ x = -3\left(a + 1 + \sqrt{a^2 + a}\right); \end{array}\right.$

при $a \in (0; 3)$: $\qquad x = -3\left(a + 1 \pm \sqrt{a^2 + a}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1) При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \log_3\left(1+\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-4|}{x-4}\right) \\ (y-a)^2 - x^2 = 9 \end{cases}$ имеет единственное решение?

   Ответ: $a \in (-\infty; -5] \cup [-4; 3) \cup (3; 5) \cup (6; +\infty)$.

2) При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \log_3\left(1+\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-12|}{x-12}\right) \\ (y-a)^2 - x^2 = 25 \end{cases}$ имеет единственное решение?

   Ответ: $a \in (-\infty; -13] \cup [-12; -5) \cup (5; 13) \cup (14; +\infty)$.

3) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2(|x|-x)} = 1 + a(x-2)$ имеет единственное решение. Выпишите это решение при найденных a.

   Ответ: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$;

   при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ $\quad x = \dfrac{2a-1}{a}$

   при $a \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$ $\quad x = -\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+a-2a^2}}{a}\right)^2$;

   при $a = 0$ $\quad x = -\dfrac{1}{4}$.

4) При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ ax + (a+1)y = 15 \end{cases}$ имеет решения?

   Ответ: $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

5) Исследовать число решений системы $\begin{cases} \dfrac{y+1-|3x-y+4|}{x+1} = 1 \\ \dfrac{(y+1)^2}{x} = p \end{cases}$ в зависимости от параметра p.

О т в е т:

при $p \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ четыре решения;

при $p = -\frac{1}{2}$ три решения;

при $p \in \{0\} \cup (24; +\infty)$ два решения;

при $p = -1$; $p = 24$ одно решение;

при $0 < p < 24$ нет решений.

Использование свойств функций при решении задач с параметрами

«Симметрия» в задачах с параметром

Определенную группу задач с параметром составляют задачи, в формулировке которых ключевым является слово «единственное». В этих задачах требуется найти все значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) имеет единственное решение. Эти задачи имеют особенность: их условия не изменяются при замене знака одной или нескольких переменных («симметрия» относительно знака) или при перестановке нескольких переменных («симметрия» относительно перестановки переменных). Эта особенность — ключ к решению задачи.

Пример 1.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a \cdot \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Р е ш е н и е .

Если число x_0 является решением данного уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением. Поэтому для единственности решения необходимо, чтобы $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$.

При $x = 0$ исходное уравнение примет вид $a^2 - 2a \cdot \sin 1 = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 2\sin 1$. Эти значения 0 и 2 sin1 являются допустимыми значениями параметра. Проверим, являются ли условия $a = 0$ и $a = 2\sin 1$ достаточными для единственности решения.

Пусть $a = 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $x^2 = 0$, $x = 0$ — единственный корень. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 2\sin 1$. Тогда исходное уравнение примет вид:
$x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x)$.

Оценим обе части полученного уравнения. Так как $\cos x \in [-1; 1]$ при любом x, а на отрезке $[-1; 1]$ функция $\sin t$ является возрастающей, то $4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) \le 4\sin 1 \cdot \sin 1 = 4\sin^2 1$ при любом x.

Левая часть $x^2 + 4\sin^2 1 \ge 4\sin^2 1$.

Поэтому уравнение $x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1, \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы является $x = 0$. Значит, $a = 2\sin 1$ также удовлетворяет условию задачи.

О т в е т : $a = 0, a = 2\sin t$.

Пример 2.

Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y + \left(3+2\sqrt{2}\right)^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - \left(a^2 - 5a + 6\right)x^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Р е ш е н и е .

$$3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}},$$

так как $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2}$.

Следовательно, $3-2\sqrt{2} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}$.

Поэтому если пара $(x_0; y_0)$ является решением исходной системы, то и пара $(x_0; -y_0)$ также является ее решением. Значит, для того чтобы решение было единственным, необходимо равенство $y_0 = -y_0$, то есть $y_0 = 0$. При $y = 0$ исходная система примет вид: $\begin{cases} x^2 + 6x + 3a + 3 = 0, \\ \left(a^2 - 5a + 6\right)x^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$

Из этой системы находим допустимые значения параметра: $a = -1$; $a = 2$; $a = 3$.

Проверим, какие из этих допустимых значений удовлетворяют условию задачи.

При $a = -1$ исходная система примет вид

$$\begin{cases} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y + \left(3+2\sqrt{2}\right)^y = x^2+6x+2, \\ y^2-2x^2=0, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$$

Оценим обе части первого уравнения системы. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^y + \left(3+2\sqrt{2}\right)^y \ge 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных величин.

$x^2 + 6x + 2 \le 2$, если $-6 \le x \le 0$.

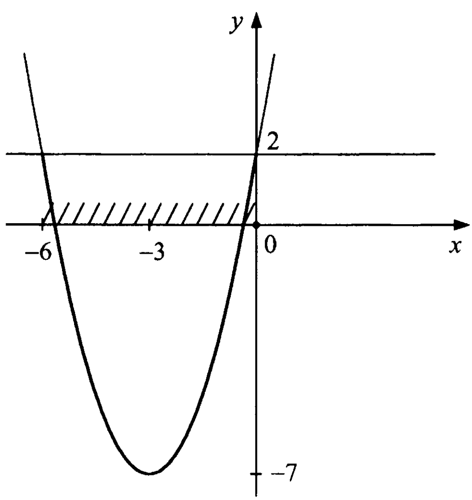


Рис. 72

Поэтому последняя система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y + \left(3+2\sqrt{2}\right)^y = 2, \\ x^2+6x+2=2, \\ y^2-2x^2=0, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -6, \end{array}\right. \\ -6 \le x \le 0, \\ y^2 - 2x^2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Значит, при $a = -1$ исходная система имеет единственное решение (0; 0).

Пусть $a = 2$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^y + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^y = x^2 + 6x + 11, \\ y^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 6x + 9 = 0, \\ y = 0, \\ -6 \le x \le 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x = -3. \end{cases}$$

Следовательно, при $a = 2$ исходная система имеет единственное решение (–3; 0).

При $a = 3$ исходная система примет вид:

$$\begin{cases} \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^y + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^y = x^2 + 6x + 14, \\ y^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 6x + 12 = 0, \\ y = 0, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$$

Система не имеет решения.

О т в е т: $a = -1, a = 2$.

Пример 3.

Найти значения параметра t, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4t, \\ xy = t^2 - 3 \end{cases}$ имеет два решения.

Р е ш е н и е.

Если (x_0, y_0) — решение системы, то (y_0, x_0), $(-x_0, -y_0)$, $(-y_0, -x_0)$ также будут решениями системы. Два решения будут в случае $x_0 = y_0$ или $x_0 = -y_0$.

При $x = y$ исходная система примет вид: $\begin{cases} 2x^2 = 4t, \\ x^2 = t^2 - 3. \end{cases}$ Из уравнения $t^2 - 2t - 3 = 0$ найдем допустимые значения параметра t; $t = -1$; $t = 3$.

При $x = -y$ исходная система примет вид: $\begin{cases} x^2 + x^2 = 4t, \\ -x^2 = t^2 - 3. \end{cases}$ Из уравнения $t^2 + 2t - 3 = 0$ найдем допустимые значения параметра t; $t = 1$; $t = -3$.

Выполним проверку.

При проверке $t = -1$ исходная система примет вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ xy = -2. \end{cases}$ Система не имеет решения при $t = -1$. Значение $t = -1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $t = 3$ исходная система примет вид: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ xy = 6. \end{cases}$ Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение, умноженное на 2. Затем вычтем из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2.

Система примет вид: $\begin{cases} (x + y)^2 = 24, \\ (x - y)^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2 = 24, \\ x = y; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -\sqrt{6}, \\ y = -\sqrt{6}. \end{cases}$

При $t = 3$ система (исходная) имеет два решения: $\left(\sqrt{6}; \sqrt{6}\right)$; $\left(-\sqrt{6}; -\sqrt{6}\right)$.

При $t = -3$ исходная система примет вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = -12, \\ xy = 6. \end{cases}$ Система не имеет решений при $t = -3$. Значит, $t = -3$ не удовлетворяет условию задачи.

При $t = 1$ исходная система примет вид

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x + y)^2 = 0, \\ (x - y)^2 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 2\sqrt{2}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = -2\sqrt{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$ При $t = 1$ система (исходная) имеет два решения: $\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Ответ: $t = 1, t = 3$.

Пример 4.

Найти значения параметра a, при которых система $\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x_0, y_0) — решение системы, тогда ($-x_0$; y_0) — также решение системы.

Система будет иметь единственное решение при $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$.

При $x = 0$ исходная система примет вид: $\begin{cases} a=y+1, \\ y^2=1, \end{cases}$ откуда найдем допустимые значения параметра $a = 0$, $a = 2$.

Проверка.

При $a = 0$ исходная система примет вид

$\begin{cases} y+1-|x|=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ $\begin{cases} y+1=|x|, \\ |x|^2+y^2=1, \end{cases}$ $\begin{cases} y+1=|x|, \\ (y+1)^2+y^2=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$ или

$\begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=0, \\ y=-1 \end{cases}$ — три решения.

Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a = 2$ исходная система примет вид $\begin{cases} 2x^4+|x|=y-1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ Из (1) уравнения системы $y \geq 1$, из второго уравнения $y \leq 1$. Следовательно, $y = 1$, тогда $x = 0$. Система имеет единственное решение (0; 1).

Ответ: $a = 2$.

Пример 5.

При каких значениях параметра a уравнение

$x^4 - 2x^2 + a(7\cos x - 2x^2) + 7a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение.

Если x_0 — решение данного уравнения, то и $-x_0$ также является его решением в силу четности функции в левой части уравнения. Следовательно, $x_0 = 0$.

При $x = 0$ исходное уравнение примет вид $7a + 7a^2 = 0$; $a = 0$ или $a = -1$. Таким образом, 0 и -1 — допустимые значения параметра.

П р о в е р к а. При $a=0$ уравнение примет вид: $x^4-2x^2=0$, $x^2(x^2-2)=0$, $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$ (три решения). Следовательно, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a=-1$ исходное уравнение примет вид: $x^4-2x^2-7\cos x+$ $+2x^2+7=0$,

$x^4+7=7\cos x$. Левая часть уравнения $x^4+7\geq 7$, правая $7\cos\leq 7$. Следовательно, решением уравнения является решение системы $\begin{cases}7\cos x=7,\\ x^4+7=7,\end{cases}$ $x=0$ — единственное решение.

О т в е т: $a=-1$.

Пример 6.

Найти значения параметра a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a),\\ (x+y)^2=14\end{cases}$ имеет два решения.

Р е ш е н и е.

Если $(x_0;\ y_0)$ — решение данной системы, то $(-x_0;\ -y_0)$, $(y_0;\ x_0)$, $(-y_0;\ -x_0)$ также являются решениями этой системы. Два решения будут, если $x_0=y_0$ или $x_0=-y_0$.

При $x=y$ система примет вид: $\begin{cases}2x^2=2(1+a),\\ 4x^2=14;\end{cases}$ $\begin{cases}a=2{,}5\\ 2x^2=7.\end{cases}$

Допустимое значение параметра a равно 2,5.

При $x=-y$ система примет вид $\begin{cases}x^2=1+a,\\ 0=14\end{cases}$ и не имеет решения.

П р о в е р к а: при $a=2{,}5$ исходная система примет вид:
$\begin{cases}x^2+y^2=7,\\ (x+y)^2=14;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=7,\\ 2xy=7;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)^2=14,\\ (x-y)^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=\frac{7}{2},\\ x=y;\end{cases}$ $\left(\sqrt{\frac{7}{2}};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$;

$\left(-\sqrt{\frac{7}{2}};-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ — два решения.

О т в е т: $a=2{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (система) имеет единственное решение:

а) $2x^2 - a \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + a^2 = 0$;

б) $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + \left(2 - a - a^2\right)y^2 = 0, \\ 0 \le y \le 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Ответ: а) 0; tg 1;

б) –3; –2;

в) $\frac{4}{3}$.

г) $\begin{cases} z \cdot \cos(x - y) + (2 + xy)\sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ \left(x + y + a \cdot \sin^2 z\right)\left((1-a)\ln(1 - xy) + 1\right) = 0. \end{cases}$

Ответ: 1.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет два решения:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - 0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-y)^2 = \frac{2}{3}, \\ xy = 5a - \frac{1}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-y)^2 = 6a - 14, \\ x^2 + y^2 = 3(2 + a); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{30}$; в) $\frac{7}{3}$; г) $a = \pm\sqrt{2}$, $a = 0$.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

Указание: обозначить $u=\sqrt{|x-1|}$ и $v=\sqrt{7|y|}$.

Ответ: $-\frac{1}{32}$; $-\frac{1}{4}$.

Задачи, в которых параметр (переменная) может принимать любые значения из данного множества

Из формулировки таких задач следует основная идея их решения: поскольку параметр (переменная) может принимать любые значения из некоторого множества, то нужно подобрать такое его (ее) значение из этого множества, что при подстановке этого значения в исходное уравнение, неравенство, систему удастся упростить задачу.

Пример 1.

Найти все x, удовлетворяющие уравнению

$\log_2\left(a^2x^3-5a^2x^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{a^2+2}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$ при любом значении параметра a.

Решение.

Так как нужно найти все значения x, которые будут удовлетворять данному уравнению при любом значении параметра a, то такие x должны удовлетворять этому уравнению при $a = 0$.

При $a = 0$ уравнение примет вид $\log_2\sqrt{6-x}=\log_2\left(3-\sqrt{x-1}\right)$;

$$\begin{cases}6-x=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2,\\ 3-\sqrt{x-1}>0;\end{cases}\qquad \begin{cases}3\sqrt{x-1}=x+1,\\ 0\le x-1<9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-7x+10=0,\\ 1\le x<10;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=5.\end{array}\right.$$

Таким образом, при $a = 0$ исходное уравнение может иметь два решения: $x = 2$ и $x = 5$. Сделаем проверку: какие из этих значений x являются решениями исходного уравнения при любых значениях параметра a.

Пусть $x = 2$. Тогда уравнение примет вид:

$\log_2\left(2-12a^2\right)=\log_{a^2+2}2$. Оно выполняется не при любом значении a, например при $a = 1$ левая часть уравнения теряет смысл.

Пусть $x = 5$. Тогда исходное уравнение примет вид:
$\log_2 1 = \log_{a^2+2} 1$. Последнее равенство справедливо при любых значениях a.

О т в е т: $x = 5$.

Пример 2.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого b система имеет по крайней мере одно решение:
$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by = 4z + 4. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

Рассмотрим данную систему как линейную относительно x и y:

$$\begin{cases} bx - y = az^2, \\ (b-6)x + 2by = 4z + 4. \end{cases}$$

Эта система не имеет решения, если $\frac{b}{b-6} = \frac{-1}{2b} \neq \frac{az^2}{4z+4}$.

Таким образом, $b = -2$ и $b = 1{,}5$

$\left(2b^2 + b - 6 = 0;\ D = 49;\ b = -2;\ b = 1{,}5\right)$.

Но по условию система должна иметь решения для любых значений b. Найдем такие значения a, для которых при найденных «критических» значениях $b = -2$ и $b = 1{,}5$ система будет иметь бесконечно много решений. Для этого должно выполняться равенство $\frac{b}{b-6} = \frac{-1}{2b} = \frac{az^2}{4z+4}$.

1) при $b = -2$ $\quad \frac{az^2}{4z+4} = \frac{1}{4}$; $\quad 4az^2 - 4z - 4 = 0$, $(a \neq 0)$, $D_1 = 1 + 4a$.

2) при $b = 1{,}5$ $\quad \frac{az^2}{4z+4} = -\frac{1}{3}$; $\quad 3az^2 + 4z + 4 = 0$,
$(a \neq 0)$, $D_2 = 16 - 48a$.

$\begin{cases} 1 + 4a \geq 0, \\ 16 - 48a \geq 0, \end{cases}$ $\quad \frac{-1}{4} \leq a \leq \frac{1}{3}$. Исходная система уравнений будет иметь хотя бы одно решение для любого b при $\frac{-1}{4} \leq a \leq \frac{1}{3}$.

О т в е т: $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

1) Найти все значения параметра a, для которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система $\begin{cases} \left(x^2+1\right)^a+\left(b^2+1\right)^y=2, \\ a+bxy+x^2y=1. \end{cases}$

   Ответ: 1.

2) Найти все x, удовлетворяющие при любом значении параметра a уравнению:

   а) $2\log_{a^2+2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2}\left(4-3x\right).$

   Ответ: 1.

   б) $2\log_{3a^2+2}\left(7-\sqrt{34+x}\right)=\log_{2a^2+3}\left(3-x\right).$

   Ответ: 2.

3) Найти все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b имеет хотя бы одно решение неравенство

$$\left|\log_4\frac{x}{16}-\frac{7b+10a-11}{5}x^2-49b^2+21b-1\right|\le$$

$$\le\log_4\frac{16}{x}-\frac{7b+10a-21}{5}x^2+\left(14b-2\right)x+49b^2-35b+3.$$

   Ответ: $a\le 1{,}5$.

§7. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (МОДУЛЯ)

Определение 1.

Абсолютной величиной числа a, или его модулем, называется само число, если оно неотрицательное, и ему противоположное, если число отрицательное, то есть

$|a| = a$, если $a \geq 0$,

$|a| = -a$, если $a < 0$.

Пример.

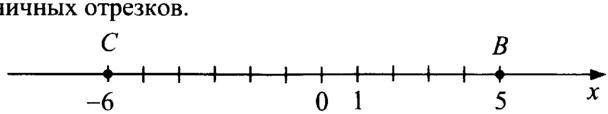
$|-7| = -(-7) = 7$; $|13| = 13$; $|0| = 0$.

Определение 2.

Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки A (a).

Пример.

1) $|5| = 5$, так как точка B (5) удалена от начала отсчета на пять единичных отрезков.
2) $|-6| = 6$, так как точка C (-6) удалена от начала отсчета на шесть единичных отрезков.



Свойства модуля

1) $|a| = |-a|$
2) $|a|^2 = a^2$
3) $|a| \geq 0$
4) $|a| \geq a$
5) $|a| \geq -a$
6) $|u| \cdot |v| = |u \cdot v|$
7) $\dfrac{|u|}{|v|} = \left|\dfrac{u}{v}\right|$

8) Утверждения, позволяющие переходить от любого неравенства к равносильному уравнению:

$$m < 0 \Leftrightarrow \frac{|m|}{m} + 1 = 0,$$

$$m \le 0 \Leftrightarrow |m| + m = 0,$$

$$m \ge 0 \Leftrightarrow |m| - m = 0,$$

$$m > 0 \Leftrightarrow \frac{|m|}{m} - 1 = 0.$$

При решении уравнений (неравенств), содержащих знак модуля, следует разбить область определения уравнения (неравенства) на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение (неравенство) нужно записать без знака модуля и решить его на этом множестве. Объединение множеств решений, найденных на всех частях ОДЗ уравнения (неравенства), составляет множество всех решений уравнения (неравенства).

Пример.

Решить уравнение

$|x| = x^2 + x - 3.$

Решение.

Уравнение равносильно совокупности систем $\begin{cases} x \ge 0, \\ x = x^2 + x - 3, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x = x^2 + x - 3. \end{cases}$$

Решим первую систему $\begin{cases} x \ge 0, \\ x = x^2 + x - 3, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 = 3, \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}, \end{array} \right. \end{cases} \qquad x = \sqrt{3}.$$

Решим вторую систему.

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x = x^2 + x - 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3, \end{array} \right. \end{cases} \quad x = -3.$$

Ответ: $-3; \sqrt{3}.$

Рассмотрим уравнения (неравенства) вида

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+|f_3(x)|+\ldots+|f_n(x)| \vee g(x),$$

где $f_1(x), f_2(x), \ldots, g(x)$ — некоторые функции.

Знак $\vee$ — знак сравнения ($=, \geq, \leq, >, <$).

Если последовательно раскрывать модули, то получится совокупность большого количества систем, решение будет громоздким. Такие уравнения проще решать методом интервалов. Для этого находим все точки, в которых хотя бы одна из функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ меняет знак. Эти точки делят область определения уравнения (неравенства) на промежутки, на каждом из которых все функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ сохраняют знак.

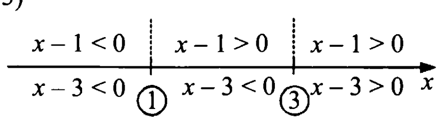
Затем, используя определение абсолютной величины, переходим от уравнения к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.

Пример 1.

Решить уравнение $|x-1| + |x-3| = 3$.

Решение.

Область определения данного уравнения — вся числовая прямая. Методом интервалов находим интервалы знакопостоянства выражений $(x-1)$, $(x-3)$



Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<1, \\ -(x-1)-(x-3)=3, \end{cases} \\ &\begin{cases} 1\leq x<3, \\ (x-1)-(x-3)=3, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geq 3, \\ (x-1)+(x-3)=3, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<1, \\ -2x=-1, \end{cases} \\ &\begin{cases} 1\leq x<3, \\ 2=3, \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geq 3, \\ 2x=7, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x<1, \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\begin{cases} x\geq 3, \\ x=3{,}5, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &x=0{,}5, \\ &x=3{,}5. \end{aligned}\right.$$

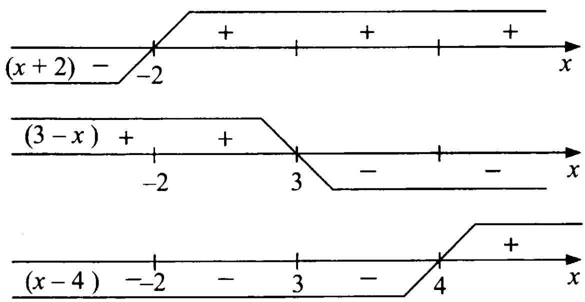
Ответ: 0,5; 3,5.

Пример 2.

Решить уравнение $|3-x| + |x+2| - |x-4| = 3$.

Решение.

Найдем значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю: $x = -2$; $x = 3$; $x = 4$. Эти точки делят область определения уравнения на промежутки, на каждом из которых выражения $(3 - x)$, $(x + 2)$, $(x - 4)$ сохраняют свой знак. Затем, используя определение абсолютной величины, перейдем от исходного уравнения к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ (3-x)-(x+2)+(x-4)=3 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<3, \\ (3-x)+(x+2)+(x-4)=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3\le x<4, \\ -(3-x)+(x+2)+(x-4)=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ -(3-x)+(x+2)-(x-4)=3 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ x=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<3, \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3\le x<4, \\ x=2\frac{2}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ x=0 \end{cases} \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: -6; 2.

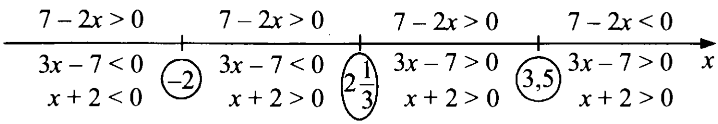
Пример 3.

Решить неравенство

$$|7-2x| < |3x-7| + |x+2|.$$

Решение.

Точки $x = -2$, $x = 2\frac{1}{3}$, $x = 3{,}5$ делят числовую ось (область определения неравенства) на четыре промежутка: $x < -2$; $-2 \le x < 2\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3} \le x < 3{,}5$; $x \ge 3{,}5$. Методом интервалов определим интервалы знакопостоянства выражений $(x + 2)$, $(3x - 7)$, $(7 - 2x)$:



Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ 7-2x<-(3x-7)-(x+2) \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<2\frac{1}{3}, \\ 7-2x<-(3x-7)+(x+2) \end{cases} \\ \begin{cases} 2\frac{1}{3}\le x<3{,}5, \\ 7-2x<(3x-7)+(x+2) \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3{,}5, \\ -(7-2x)<(3x-7)+(x+2); \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ x<-1 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<2\frac{1}{3}, \\ 0x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2\frac{1}{3}\le x<3{,}5, \\ x>2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3{,}5, \\ x>-1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ -2\le x<2\frac{1}{3}, \\ 2\frac{1}{3}\le x<3{,}5, \\ x\ge 3{,}5 \end{array}\right. \quad x\in R$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

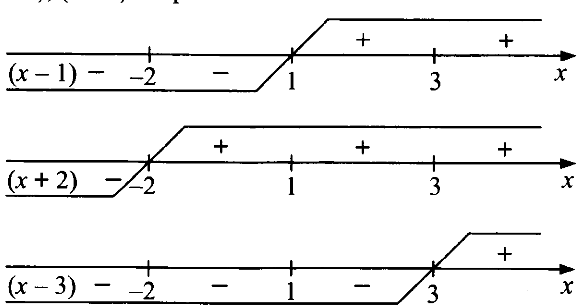
Пример 4.

Решить неравенство

$|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4.$

Решение.

Точки $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ делят числовую ось (область определения неравенства) на четыре промежутка, на которых выражения $(x - 1)$, $(x + 2)$, $(x - 3)$ сохраняют свой знак.



Используя определение абсолютной величины, перейдем от исходного неравенства к совокупности систем, не содержащих знак модуля:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\-(x-1)-(x+2)+(x-3)>4\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<1,\\-(x-1)+(x+2)+(x-3)>4\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<3,\\(x-1)+(x+2)+(x-3)>4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\(x-1)+(x+2)-(x-3)>4;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\x<-8\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<1,\\x>4,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<3,\\x>2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\x>0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x<-8,\\2<x<3,\\x\ge 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнения:

а) $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

Ответ: 2.

б) $|x-3|+2|x+1|=4$.

Ответ: -1.

в) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.

Ответ: -2.

г) $|7x-12|-|7x-11|=1$.

Ответ: $x\le\frac{11}{7}$.

д) $|x|+|7-x|+2|x-2|=4$.

Ответ: $\varnothing$.

2. Решите неравенства:

а) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|<9$.

Ответ: $(1; 5{,}5)$.

б) $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

в) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

Ответ: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

г) $|x+2|+|x+1|+|x-4|\ge 9$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right]\cup[2;+\infty)$.

д) $|x-1|+|2-x|>3+x$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

Использование некоторых равносильных преобразований основных неравенств с модулем

Приведем таблицу равносильных преобразований основных неравенств с модулем и покажем применение их при решении неравенств.

Неравенство	$\|f\|<g$	$\|f\|\le g$	$\|f\|>g$	$\|f\|\ge g$	f и g функции
Равносильное ему преобразование	$\begin{cases}-f<g,\\ f<g\end{cases}$	$\begin{cases}-f\le g,\\ f\le g\end{cases}$	$\left[\begin{array}{l}-f>g\\ f>g\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}-f\ge g\\ f\ge g\end{array}\right.$	

Примечание.

Любое уравнение или неравенство определяет множество его решений. Пусть даны два неравенства или уравнения, либо и то, и другое. M_1 и M_2 — множества их решений.

Решить систему — значит найти все общие элементы множеств M_1 и M_2, то есть найти пересечение множеств M_1 и M_2.

Решить совокупность — значит найти все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств M_1 и M_2, то есть найти объединение множеств M_1 и M_2.

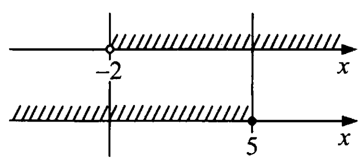
Пример 1.

Найти решение системы

а) $\begin{cases}x>-2,\\ x\le 5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x<4,\\ x\le 1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x>3,\\ x<0.\end{cases}$

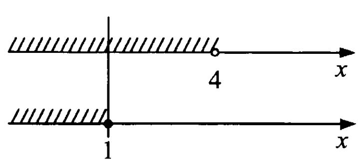
Решение.

а) $\begin{cases}x>-2,\\ x\le 5\end{cases}$



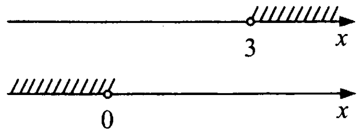
Ответ: $(-2; 5]$.

б) $\begin{cases}x<4,\\ x\le 1\end{cases}$



Ответ: $(-\infty; 1]$.

в) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 0 \end{cases}$



О т в е т : решений нет.

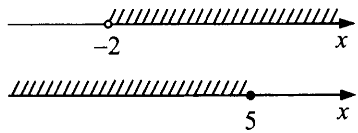
Пример 2.

Найдите решение совокупности

а) $\left[\begin{array}{l} x > -2, \\ x \le 5; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x < 4, \\ x \le 1; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 0. \end{array}\right.$

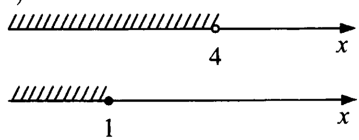
Р е ш е н и е .

а) $\left[\begin{array}{l} x > -2, \\ x \le 5 \end{array}\right.$



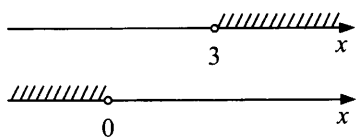
О т в е т : $(-\infty; +\infty)$.

б) $\left[\begin{array}{l} x < 4, \\ x \le 1 \end{array}\right.$



О т в е т : $(-\infty; 4)$.

в) $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 0 \end{array}\right.$



О т в е т : $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3.

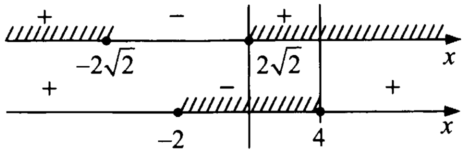
Решить неравенство $|x^2 - x - 8| \le x$.

Р е ш е н и е .

$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) \le g(x), \\ f(x) \le g(x), \end{cases}$ поэтому

$\begin{cases} -x^2 + x + 8 \le x, \\ x^2 - x - 8 \le x, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 8 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 8 \le 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) \ge 0, \\ (x-4)(x+2) \le 0, \end{cases}$



О т в е т : $\left[2\sqrt{2}; 4\right]$.

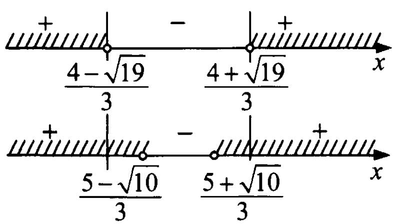
Пример 4.

Решить неравенство $3x^2 - |x - 3| > 9x - 2$.

Р е ш е н и е .

Приведем неравенство к виду $|x - 3| < 3x^2 - 9x + 2$ и заменим его равносильной ему системой, так как неравенство $|f| < q \Leftrightarrow \begin{cases} -f < q, \\ f < q. \end{cases}$

$$\begin{cases} -x + 3 < 3x^2 - 9x + 2, \\ x - 3 < 3x^2 - 9x + 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 8x - 1 > 0, \\ 3x^2 - 10x + 5 > 0, \end{cases}$$



О т в е т : $\left(-\infty; \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$.

Пример 5.

Решить неравенство $x^2 - 7x + 12 < |x - 4|$.

Р е ш е н и е .

Неравенство имеет вид $|f(x)| > g(x)$ и равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -x + 4 > x^2 - 7x + 12, \\ x - 4 > x^2 - 7x + 12, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 < 0, \\ x^2 - 8x + 16 < 0. \end{array}\right.$$

Поскольку второе неравенство совокупности решений не имеет, а $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$, то множество решений совокупности и исходного неравенства есть интервал $(2; 4)$.

О т в е т : $(2; 4)$.

Пример 6.

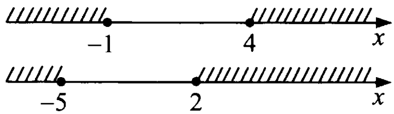
Решить неравенство

$3\,|x-1| + x^2 \geq 7.$

Р е ш е н и е.

Данное неравенство можно переписать в виде $|3x-3| \geq 7-x^2$, и следовательно, оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} -3x+3 \geq 7-x^2, \\ 3x-3 \geq 7-x^2, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4 \geq 0, \\ x^2+3x-10 \geq 0. \end{array}\right.$$



Поскольку $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$, а $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$, то решение полученной совокупности, а следовательно, и исходного неравенства состоит из объединения двух промежутков $(\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

О т в е т: $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

Пример 7.

Решить неравенство $\big|3x-|x-4|\big| \leq 2$.

Р е ш е н и е.

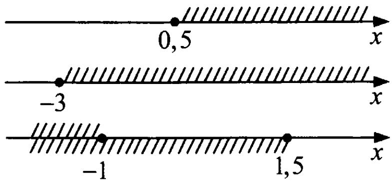
Так как $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) \leq g(x), \\ f(x) \leq g(x), \end{cases}$ то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} -3x+|x-4| \leq 2, \\ 3x-|x-4| \leq 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-4| \leq 3x+2, \\ |x-4| \geq 3x-2. \end{cases}$$

Первое неравенство в системе относительно $|x-4|$ имеет вид $|f(x)| \leq g(x)$, а второе имеет вид $|f(x)| \geq g(x)$.

Применяя равносильные преобразования, получим:

$$\begin{cases} -x+4 \leq 3x+2, \\ x-4 \leq 3x+2, \\ \left[\begin{array}{l} -x+4 \geq 3x-2 \\ x-4 \geq 3x-2, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x \geq 2, \\ 2x \geq -6, \\ \left[\begin{array}{l} 4x \leq 6 \\ 2x \leq -2, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \geq -3, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1{,}5 \\ x \leq -1. \end{array}\right. \end{cases}$$



О т в е т : [0,5; 1,5].

Пример 8.

Решить неравенство $|3x+5| + |2x-1| < 11$.

Р е ш е н и е .

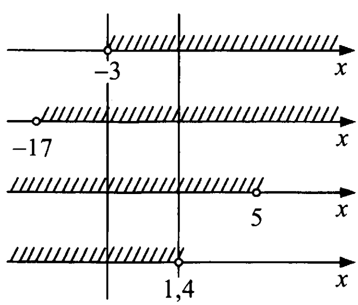
Перепишем неравенство в виде

$|3x+5| < 11 - |2x-1|$.

Так как $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < g(x), \end{cases}$ то исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} -3x-5 < 11-|2x-1|, \\ 3x+5 < 11-|2x-1|. \end{cases}$ Перепишем последнюю систему в виде

$\begin{cases} |2x-1| < 3x+16, \\ |2x-1| < 6-3x \end{cases}$ и применим равносильные преобразования.

В результате получим: $\begin{cases} -2x+1 < 3x+16, \\ 2x-1 < 3x+16, \\ -2x+1 < 6-3x, \\ 2x-1 < 6-3x, \end{cases}$ $\begin{cases} 5x > -15, \\ x > -17, \\ x < 5, \\ 5x < 7. \end{cases}$



(–3; 1,4).

О т в е т : (–3; 1,4).

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенства:

а) $\left|x^2-6x+8\right| \le 4-x.$

Ответ: $[1;3] \cup \{4\}.$

б) $\left|x^2-2x-3\right| < 3x-3.$

Ответ: $(2;5).$

в) $|3x+2|-7x \le x^2+4.$

Ответ: $\left(-\infty;-5-\sqrt{19}\right) \cup \left[\sqrt{2}-2;+\infty\right).$

г) $|x-6| \ge x^2-5x+9.$

Ответ: $[1;3].$

д) $\left|2x^2-9x+15\right| \ge 20.$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup [5;+\infty).$

2. Решить неравенства:

а) $\left|2x-|x-2|\right| \le 3.$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right].$

б) $|5-x| < |2-x|+|2x-7|.$

Ответ: $(-\infty;2) \cup (3{,}5;+\infty).$

в) $|x-2| > 2+x-|3-x|.$

Ответ: $(-\infty;1) \cup (7;+\infty).$

г) $\left||x|-1\right| < 1-x.$

Ответ: $(-\infty;0).$

д) $\left||x-1|-5\right| \le 2.$

Ответ: $[-6;-2] \cup [4;8].$

Рассмотрим несколько примеров задач **с модулем и параметром**, решение которых упрощается с использованием равносильностей, рассмотренных выше.

Пример 1.

При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - |x-a| - |x-1| + 3 \geq 0$ выполняется при всех значениях x?

Р е ш е н и е.

Перепишем неравенство в виде $|x-1| \leq x^2 - |x-a| + 3$. Оно имеет вид $|f(x)| \leq g(x)$. Воспользуемся равносильным переходом

$$\begin{cases} -f(x) \leq g(x), \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \qquad (*)$$

Получим систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} -x+1 \leq x^2 - |x-a| + 3, \\ x-1 \leq x^2 - |x-a| + 3. \end{cases}$$

Перепишем последнюю систему в виде $\begin{cases} |x-a| \leq x^2 + x + 2, \\ |x-a| \leq x^2 - x + 4. \end{cases}$

Воспользовавшись равносильным переходом $(*)$ еще раз, получим

$$\begin{cases} -x+a \leq x^2 + x - 2, \\ x-a \leq x^2 + x + 2, \\ -x+a \leq x^2 - x + 4, \\ x-a \leq x^2 - x + 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x + (2-a) \geq 0, \\ x^2 + (2+a) \geq 0, \\ x^2 + (4-a) \geq 0, \\ x^2 - 2x + (4+a) \geq 0. \end{cases}$$

Выполнение для всех x исходного неравенства равносильно выполнению для всех x всех неравенств последней системы. А это равносильно тому, что дискриминанты всех четырех квадратных трехчленов неположительны:

$$\begin{cases} D_1 \leq 0, \\ D_2 \leq 0, \\ D_3 \leq 0, \\ D_4 \leq 0, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} 4 - 4(2-a) \leq 0, \\ -4(2+a) \leq 0, \\ -4(4-a) \leq 0, \\ 4 - 4(4+a) \leq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $-2 \leq a \leq 1$.

О т в е т: $-2 \leq a \leq 1$.

Пример 2.

Найдите все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции

$y = x^2 + |x-a| + |x-1|$ больше 2.

Решение.

По условию задачи для всех x должно выполняться неравенство

$$x^2 + |x-a| + |x-1| > 2. \qquad (**)$$

Относительно обоих модулей последнее неравенство имеет вид $|f(x)| > g(x)$.

Воспользуемся равносильным переходом

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -f(x) > g(x), \\ f(x) > g(x). \end{array}\right.$$

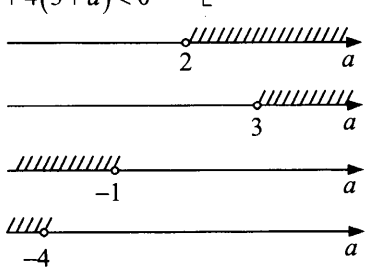
Неравенство $|x-a| > 2 - x^2 - |x-1|$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -x+a > 2-x^2-|x-1| \\ x-a > 2-x^2-|x-1| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| > -x^2+x+2-a, \\ |x-1| > -x^2-x+2+a \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -x+1 > -x^2+x+2-a, \\ x-1 > -x^2+x+2-a, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -x+1 > -x^2-x+2+a, \\ x-1 > -x^2-x+2+a \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+(a-1) > 0, \\ x^2+(a-3) > 0, \\ x^2-(1+a) > 0, \\ x^2+2x-(3+a) > 0. \end{array}\right.$$

Неравенство $(**)$ должно выполняться для всех x. Это равносильно тому, что для всех x выполняется хотя бы одно квадратное неравенство последней совокупности. То есть хотя бы один из четырех дискриминантов отрицательный.

$$\left[\begin{array}{l} D_1 < 0, \\ D_2 < 0, \\ D_3 < 0, \\ D_4 < 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-4(a-1) < 0, \\ -4(a-3) < 0, \\ 4(1+a) < 0, \\ 4+4(3+a) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-a < 0, \\ a-3 > 0, \\ a+1 < 0, \\ a+4 < 0 \end{array}\right.$$



Ответ: все $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3.

Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $4x^2 - 20(x-1) + 3 \cdot |4x - p| - p \leq 0$ максимально.

Р е ш е н и е .

Перепишем неравенство в виде $|12x - 3p| \leq -4x^2 + 20(x-1) + p$ и заменим его равносильной системой.

$$\begin{cases} -12x + 3p \leq -4x^2 + 20(x-1) + p, \\ 12x - 3p \leq -4x^2 + 20(x-1) + p, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 32x + 2p + 20 \leq 0, \\ 4x^2 - 8x - 4p + 20 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -2x^2 + 16x - 10, \\ p \geq x^2 - 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 \leq p \leq -2x^2 + 16x - 10. \qquad (***)$$

Чтобы параметр p существовал, должно выполняться неравенство

$x^2 - 2x + 5 \leq -2x^2 + 16x - 10,$

$3x^2 - 18x + 15 \leq 0,$

$1 \leq x \leq 5.$

Таким образом, решениями исходного неравенства **хотя бы при одном** значении параметра могут быть все x из отрезка $[1; 5]$. Следовательно, целочисленными решениями исходного неравенства могут быть только числа 1, 2, 3, 4, 5 из отрезка $[1; 5]$. Поочередно подставим выбранные целые числа в двойное неравенство $(***)$.

Получим

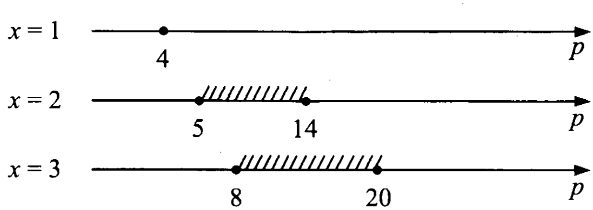
$x = 1$ при $4 \leq p \leq 4$,

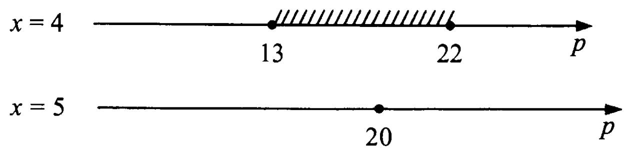
$x = 2$ при $5 \leq p \leq 14$,

$x = 3$ при $8 \leq p \leq 20$,

$x = 4$ при $13 \leq p \leq 22$,

$x = 5$ при $20 \leq p \leq 20$.





Значения параметра p	$(-\infty; 4)$	4	(4; 5)	5	(5; 8)	8	(8; 13)	13	(13; 14)	14	(14; 20)	20	(20; 22)	22	$(22; +\infty)$
Целочисленные решения	—	1	—	2	2	2; 3	2; 3	2; 3; 4	2; 3; 4	2; 3; 4	3; 4	3; 4; 5	4	4	—
Количество целочисленных решений	0	1	0	1	1	2	2	3	3	3	2	3	1	1	0

Очевидно, что максимальное количество целочисленных решений равно трем и это достигается при $13 \le p \le 14$ или $p = 20$.

Ответ: $13 \le p \le 14$; $p = 20$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для всех a решить неравенство $|x - 3a| - |x + a| < 2a$.

   Ответ: при $a < 0$ $x < 2a$; при $a = 0$ решений нет; при $a > 0$ $x > 0$.

2. Для всех a решить неравенство $|x - a| - 2a > |x - 3a|$.

   Ответ: при $a < 0$ $x < a$; при $a \ge 0$ решений нет.

3. Для всех a решить неравенство $|x + 2a| + |x - a| < 3x$.

   Ответ: при $a < 0$ $x > -a$; при $a \ge 0$ $x > a$.

4. Найти все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $y = 2|x-1| + |x+3| - 2|x - a^2 - a|$ больше 1.

   Ответ: $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < a < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

5. Для любого значения параметра p решить неравенство $|2x + 21p| - 2 \cdot |2x - 21p| < x - 21p$.

   Ответ: при $p < 0$ $x \in (-\infty; 42p) \cup (6p; +\infty)$; при $p = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; при $p > 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (28p; +\infty)$.

Использование специальных схем равносильности

Сумма модулей

Иногда уравнение с модулями можно решить быстрее, если удастся использовать правило: **сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных величин тогда и только тогда, когда каждая величина имеет тот знак, с которым она входит в алгебраическую сумму**.

Пример 1.

Решить уравнение

$$\left|x^2-3\right|+\left|x^2-7x+12\right|-7x+15=0.$$

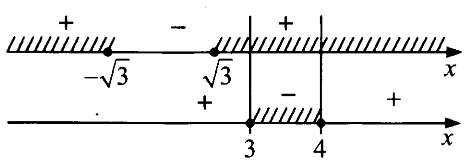
Р е ш е н и е.

Выделим сумму модулей:

$$\left|x^2-3\right|+\left|x^2-7x+12\right|=7x-15.$$

Выясним, можно ли $7x-15$ представить в виде алгебраической суммы подмодульных величин.

Так как $7x-15=(x^2-3)-(x^2-7x+12)$, то исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-3\geq 0, \\ x^2-7x+12\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\geq 0, \\ (x-3)(x-4)\leq 0 \end{cases}$



О т в е т: $3\leq x\leq 4$.

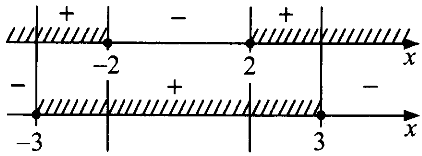
Пример 2.

Решить уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|9-x^2\right|=5.$

Р е ш е н и е.

Так как $(x^2-4)+(9-x^2)=5$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0, \\ 9-x^2\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)\geq 0, \\ (3-x)(3+x)\geq 0 \end{cases}$$



О т в е т : $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

Пример 3.

Решить уравнение

$|2x-1|+|2x+1|+|2x-2|+|2x+2|+\ldots+|2x-100|+|2x+100|=400x.$

Р е ш е н и е .

Так как алгебраическая сумма подмодульных выражений равна сумме модулей, т.е.: $(2x-1)+(2x+1)+\ldots+(2x-100)+(2x+100) =$ $= 400x$, то исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 2x+1\ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x-100\ge 0 \\ 2x+100\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\ge 50.$

О т в е т : $x \ge 50$.

Сформулируем еще одно свойство суммы модулей.

Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных величин тогда и только тогда, когда одновременно все величины имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все величины имеют противоположный знак.

Например, $|a_1|+|a_2|+|a_3|=|a_1-a_2+a_3| \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\ge 0, \\ a_2\le 0, \\ a_3\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1\le 0, \\ a_2\ge 0, \\ a_3\le 0. \end{cases}$

Пример 1.

Решить уравнение $2|x-5|+|4-x|-|2x-1|+5|x-3|=0.$

Р е ш е н и е .

Внесем коэффициенты 2 и 5 под знак модуля и выделим сумму модулей:

$$|2x-10|+|4-x|+|5x-15|=|2x-1|.$$

Найдем комбинацию знаков подмодульных выражений $(2x-10)$, $(4-x)$, $(5x-15)$, при которой алгебраическая сумма этих выражений равна подмодульному выражению правой части уравнения, то есть $2x-1$.

В данном примере это проще обнаружить по константам:

$-(-10)+4+(-15)=-1$.

Итак, $-(2x-10)+(4-x)+(5x-15)=2x-1$.

То есть уравнение имеет вид $|a_1|+|a_2|+|a_3|=|-a_1+a_2+a_3|$.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем по правилу, приведенному выше.

Получим $\begin{cases}2x-10\le 0,\\ 4-x\ge 0,\\ 5x-15\ge 0\end{cases}$ или $\begin{cases}2x-10\ge 0,\\ 4-x\le 0,\\ 5x-15\le 0,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}x\le 5,\\ x\le 4,\\ x\ge 3\end{cases}$ или $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\ge 4,\\ x\le 3,\end{cases}$ то есть $3\le x\le 4$.

Ответ: $3\le x\le 4$.

Пример 2.

Решить уравнение $|3x-15|+|4-x|+|2x-6|=|4x-17|$.

Решение.

Так как $(3x-15)+(4-x)+(2x-6)=4x-17$, то уравнение имеет вид $|a_1|+|a_2|+|a_3|=|a_1+a_2+a_3|$ и исходное уравнение равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases}3x-15\ge 0,\\ 4-x\ge 0,\\ 2x-6\ge 0\end{cases}$ или $\begin{cases}3x-15\le 0,\\ 4-x\le 0,\\ 2x-6\le 0,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\le 4,\\ x\ge 3\end{cases}$ или $\begin{cases}x\le 5,\\ x\ge 4,\\ x\le 3,\end{cases}$ то есть решений нет.

Ответ: решений нет.

В некоторых случаях упрощают решение уравнений с модулем следующие утверждения.

1. **Равенство $|a|+|b|=a+b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a\ge 0$ и $b\ge 0$.**
2. **Равенство $|a+b|=|a|+|b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $ab\ge 0$.**
3. **$|a|+|b|=a-b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a\ge 0$ и $b\le 0$.**

Пример 1.

Решить уравнение $|x-1| + |x-3| = 2x-4$.

Решение.

Так как $|a| + |b| = a + b$, то заменим исходное уравнение равносильной ему системой $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$ Получим $x \geq 3$.

Ответ: $x \geq 3$.

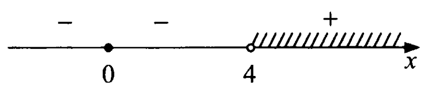
Пример 2.

Решить уравнение $\left|\dfrac{4x}{x-4}\right| + |x| = \dfrac{x^2}{|x-4|}$.

Решение.

Поскольку $\dfrac{4x}{x-4} + x = \dfrac{4x + x^2 - 4x}{x-4} = \dfrac{x^2}{x-4}$, то исходное уравнение может быть переписано в виде $\left|\dfrac{4x}{x-4}\right| + |x| = \left|\dfrac{4x}{x-4} + x\right|$.

Данное уравнение равносильно неравенству $\dfrac{4x}{x-4} \cdot x \geq 0$, то есть $\dfrac{x^2}{x-4} \geq 0$.



Ответ: $(4; +\infty) \cup \{0\}$.

Пример 3.

Решить уравнение $|x-3||x-1| + |x-4||x-5| - 5x + 17 = 0$.

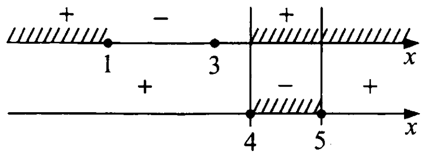
Решение.

Приведем уравнение к виду

$$|(x-3)(x-1)| + |(x-4)(x-5)| = 5x-17,$$

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 9x + 20| = 5x - 17.$$

Так как $(x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 9x + 20) = 5x - 17$, то уравнение имеет вид $|a| + |b| = a - b$ и равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 9x + 20 \leq 0 \end{cases}$



О т в е т : $4 \le x \le 5$.

Покажем использование еще одной равносильности:

$|a| \vee |b| \Leftrightarrow a^2 \vee b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \vee 0$.

Пример 4.

Решить неравенство $\dfrac{(|x-5|-|x-1|)(|2x-8|-|x+2|)}{|8-x|-|x-2|} < 0$.

Р е ш е н и е .

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\left(|x-5|^2-|x-1|^2\right)\left(|2x-8|^2-|x+2|^2\right)}{|8-x|^2-|x-2|^2} < 0.$$

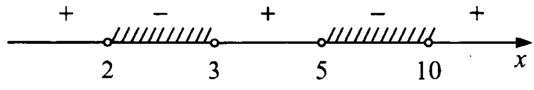
Так как $|a|^2 = a^2$, то неравенство примет вид

$$\frac{\left((x-5)^2-(x-1)^2\right)\left((2x-8)^2-(x+2)^2\right)}{(8-x)^2-(x-2)^2} < 0.$$

Раскладывая на множители все разности квадратов, имеем

$$\frac{-4(2x-6)(x-10)(3x-6)}{6\cdot(10-2x)} < 0.$$

Решим методом интервалов последнее неравенство.



О т в е т : (2; 3) ∪ (5; 10).

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $|x^2+4x+1| + |x^2-3x+2| = 7x-1$.

О т в е т : $1 \le x \le 2$.

2) $|x^2+2x-3| + |8-x^2-2x| = 5.$

О т в е т: $[-4; -3] \cup [1; 2].$

3) $|x^2-1| + |x^2-5x+6| - 5x + 7 = 0.$

О т в е т: $2 \le x \le 3.$

4) $2\,|x-4| + 3\,|3-x| - |1+2x| + 5\,|x-2| = 0.$

О т в е т: 3.

5) $|6x-12| + |3-2x| + |4x-4| = |8x-13|.$

О т в е т: решений нет.

6) $|3x+5| + |3x+3| = 6x+8.$

О т в е т: $x \ge -1.$

7) $\left|\frac{4x+4}{x-3}\right| + |x+1| = \frac{x^2+2x+1}{|x-3|}.$

О т в е т: $(3; +\infty) \cup \{-1\}.$

8) $|x+2| \cdot |x+4| + |x+1| \cdot |x| - 5x - 8 = 0.$

О т в е т: $-1 \le x \le 0.$

9) $\frac{\left(|x^2-4|-5\right)\cdot\left(|x+5|-8\right)}{\left(|x-3|-|x-1|\right)\cdot|x|} > 0.$

О т в е т: $(-\infty; -13) \cup (-3; 0) \cup (0; 2).$

Использование геометрического смысла модуля

Напомним, что модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки A (a).

Этому утверждению равносильно утверждение, что $|a - b|$ — расстояние между точками A (a) и B (b).

Сумма $|x-a| + |x-b|$ — сумма расстояний от точки X (x) до точек A (a) и B (b) на числовой прямой Ox. Эта сумма не может быть меньше расстояния между точками A (a) и B (b), то есть $|x-a|+|x-b| \ge |a-b|$.

Если $|x-a|+|x-b|=|a-b|$, то x — любая точка отрезка $[a; b]$ или $[b; -a]$.

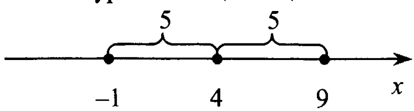
И если отрезок не выврожден в точку, то есть $a \ne b$, то таких точек x бесконечно много.

Если $|x-a|+|x-b|>|a-b|$, то существуют ровно две различные точки вне отрезка, симметрично расположенные относительно середины отрезка $[a; b]$ или $[b; a]$.

Итак, решить уравнение $|x-a|=c(c>0)$ — значит найти все точки на числовой прямой Ox, которые отстоят от точки с координатой a на расстояние c. Таких точек две: точка с координатой $(c+a)$ и точка с координатой $(a-c)$.

Пример 1.

Решить уравнение $|x-4|=5$.



Ответ: $9; -1$.

Пример 2.

Решить уравнение $|x-5|+|x-6|=18$ — значит найти все такие точки на числовой прямой Ox, для каждой из которых сумма расстояний от нее до точек с координатами 5 и 6 равна 18.

Так как $|x-5|+|x-6|>|6-5|$, то существует ровно две различные точки вне отрезка, симметрично расположенные относительно середины отрезка [5; 6], координаты которых являются решениями исходного уравнения. Это $x=-3{,}5$ и $x=14{,}5$.

Ответ: $-3{,}5; 14{,}5$.

Решить уравнение $|x-a|-|x-b|=c$ $(a>0, b>0, c>0)$ — значит найти на числовой прямой Ox все такие точки, для каждой из которых разность расстояния от нее до точки с координатой a и расстояния от нее до точки с координатой b равна c.

Пример 1.

Решить уравнение $|x-2|-|x-5|=3$.

Решение.

На числовой прямой Ox нужно найти все такие точки, для каждой из которых разность расстояний от нее до точки с координатой (2) и расстояния от нее до точки с координатой (5) равна 3. Так как длина отрезка [2; 5] равна 3, то ясно, что любая точка с координатой $x \geq 5$ удовлетворяет, а любая точка с координатой $x<5$ не удовлетворяет ему. Таким образом, решением исходного уравнения является множество всех чисел из промежутка $[5; +\infty)$.

О т в е т: $[5; +\infty)$.

Пример 2.

Для любого значения параметра a решить неравенство

$|x-a^2| \le 5 - |4a-x-9|$.

Р е ш е н и е.

Приведем неравенство к виду $|x-a^2| + |x-(4a-9)| \le 5$.

Таким образом, на числовой прямой Ox требуется найти точки x, сумма расстояний от которых до двух данных точек с координатами a^2 и $(4a - 9)$ не больше 5. Найдем расстояние между точками a^2 и $(4a-9)$:

$$\left|a^2-(4a-9)\right|=\left|a^2-4a+9\right|=\left|(a-2)^2+5\right|=(a-2)^2+5\ge 5.$$

Так как сумма расстояний до двух точек не может быть меньше расстояния между этими точками, то при $a \ne 2$ решений нет.

Если $a = 2$, то исходное неравенство переходит в равенство, решениями которого являются все значения x из промежутка $[4a - 9; a^2] = [-1; 4]$.

О т в е т: при $a \ne 2$ решений нет;

при $a = 2$ $\quad -1 \le x \le 4$.

Пример 3.

Решить уравнение $|x| + |x+2| = 2$.

Р е ш е н и е.

$|x| + |x+2|$ — сумма расстояний от точки с координатой (x) на числовой прямой Ox до точек с координатами (0) и (–2).

Так $|x| + |x+2| = 2$, то есть сумма расстояний от точек (0) и (–2) равна длине отрезка $[-2; 0]$, то x — любая точка данного отрезка, то есть $-2 \le x \le 0$.

О т в е т: $-2 \le x \le 0$.

Пример 4.

Исследовать количество решений уравнения в зависимости от параметра a.

$|x-a| + |4a^2-x| = 3-a$.

Р е ш е н и е .

Левая часть уравнения $|x-a|+|x-4a^2|$ — сумма расстояний от точки с координатой (x) до точек с координатами (a) и ($4a^2$) на числовой прямой Ox.

Рассмотрим 1-й случай, когда сумма расстояний равна длине отрезка, то есть исходное уравнение имеет бесконечно много решений. Искомые значения параметра найдем из системы

$$\begin{cases} 3-a>0, \\ \left|a-4a^2\right|=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3, \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2-a=3-a, \\ a-4a^2=3-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3, \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2=3, \\ 4a^2-2a+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

2-й случай. Если сумма расстояний меньше длины отрезка, то есть $3-a<\left|a-4a^2\right|$, то уравнение не будет иметь решений.

Найдем соответствующие значения a.

$$\left|a-4a^2\right|>3-a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a^2-a>3-a, \\ a-4a^2>3-a \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 4a^2>3, \\ 4a^2-2a+3<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a<-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } a>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3-й случай. Если сумма расстояний больше длины отрезка, т.е. $3-a>\left|a-4a^2\right|$, то уравнение будет иметь два решения.

Найдем значения параметра, соответствующие этому случаю.

$$\left|a-4a^2\right|<3-a \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-a<3-a, \\ a-4a^2<3-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2<3, \\ 4a^2-2a+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

О т в е т : при $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение имеет бесконечно много решений; при $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение имеет два решения; при $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение не имеет решений.

Задачи для самостоятельного решения

1) Решить неравенство $|x-1|+|x+2|\le 3$.
   Ответ: $-2\le x\le 1$.
2) $|5x+1|+|2-3x|>2\frac{3}{5}$.
   Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$.
3) $|3x+2|+|2x-3|\le 11$.
   Ответ: $-2\le x\le 2{,}4$.
4) При каких значениях параметра p уравнение
   $\left|x-p^2\right|+|2p-x|=6-p$ имеет бесконечно много решений?
   Ответ: $p=-2; p=3$.

§8. МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Замена множителя осуществляется только при условии приведения неравенства к виду $\dfrac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots v_n} \vee 0, \quad (*)$, где символ «$\vee$» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<, \le, \ge, >$.

Основная часть замен обусловлена следующими утверждениями.

1. Функция $f(x)$ — строго возрастающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $t_1 - t_2$ совпадает по знаку с разностью $f(t_1) - f(t_2)$.
2. Функция $f(x)$ — строго убывающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $t_1 - t_2$ совпадает по знаку с разностью $f(t_2) - f(t_1)$.

Если при решении неравенства (*) нам неудобно работать с каким-либо множителем, мы можем заменить его на другой знакосовпадающий с ним в области определения неравенства (и имеющий с ним в области определения неравенства те же корни).

Наиболее часто встречающиеся замены **(без учета области допустимых значений)**:

1) $|t| \leftrightarrow t^2$ ($\leftrightarrow$ означает знакосовпадение);
2) $|t_1| - |t_2| \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2$;
3) $at^2 + bt + c \leftrightarrow a$ при $D = b^2 - 4ac < 0$;
4) $\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2$;
5) $|t_1| - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1^2 - t_2$;
6) $|t| - (at^2 + bt + c) \leftrightarrow t^2 - (at^2 + bt + c)^2$ при $D = b^2 - 4ac \le 0$;
7) $a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1)$;
8) $a^t - 1 \leftrightarrow t \cdot (a - 1)$;
9) $f - g \leftrightarrow f^2 - g^2$ при $f \ge 0$ и $g \ge 0$;
10) $\log_a f \leftrightarrow (f - 1)(a - 1)$;
11) $\log_a f - g \leftrightarrow (f - a^g) \cdot (a - 1)$;
12) $\log_a f - \log_a g \leftrightarrow (f - g) \cdot (a - 1)$;
13) $\sqrt{t} \leftrightarrow t$ (на ОДЗ);
14) $\sqrt{f} + \sqrt{g} \Leftrightarrow f + g$ (на ОДЗ).

Пример.

Решить неравенство:

1) $\left(x^2+x-12\right)\sqrt{x^2-2x-8}\geq 0;$

2) $\dfrac{x^2-8|x|+15}{x^2-8x+16}<0;$

3) $\left(5x^2+3x+1\right)^{x^2-2x}>1;$

4) $\log_{x+1}(x+2)<\log_{\frac{1}{x+1}}(1-x);$

5) $\left(2x^2+x+1\right)^{\frac{x+8}{x+5}}\geq\left(2x^2+x+1\right)^4;$

6) $\log_{|x-5|}\left(2x^2-13x+15\right)>1;$

7) $\dfrac{\left(|x-4|-5-x^2\right)\left(|x+6|-\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{\left(|2-x|-6\right)\cdot\left(|1+x|-|x-3|\right)}>0;$

8)

$$\frac{\left(8-(x+1)^3\right)\cdot\left(\sqrt{x+21}-\sqrt{2x+32}\right)\left(|x+3|-4-(x+1)^2\right)}{\left(|x+1|^{2x+1}-|x+1|^{4-x}\right)\cdot\left(\log_{x+21}\left(12-|x+1|\right)-\log_{x+21}\left(20-2|x+1|\right)\right)\cdot\log_5^3(x+1)^2}<0.$$

Р е ш е н и е.

1) $\left(x^2+x-12\right)\sqrt{x^2-2x-8}\geq 0.$

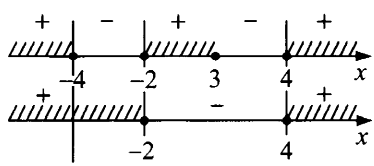
$\sqrt{x^2-2x-8}\leftrightarrow x^2-2x-8$ на области допустимых значений (см. замену 13).

Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\left(x^2+x-12\right)\left(x^2-2x-8\right)\geq 0,\\ x^2-2x-8\geq 0.\end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases}(x+4)(x-3)(x+2)(x-4)\geq 0,\\ (x+2)(x-4)\geq 0.\end{cases}$$



$(-\infty;-4]\cup\{-2\}\cup[4;+\infty)$ — множество решений исходного неравенства.

2) $\dfrac{x^2-8|x|+15}{x^2-8x+16}<0.$

$x^2 = |x|^2$. Исходное неравенство примет вид $\dfrac{|x|^2-8|x|+15}{(x-4)^2}<0.$

Разложив числитель на множители, получим $\dfrac{(|x|-3)(|x|-5)}{(x-4)^2}<0.$

Выполним замену множителей:

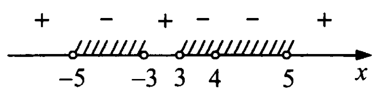
$|x|-3=|x|-|3| \leftrightarrow x^2-3^2$ (см. замену 2);

$|x|-5=|x|-|5| \leftrightarrow x^2-25.$

Исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{(x^2-3^2)(x^2-5^2)}{(x-4)^2}<0.$

Решим это неравенство методом интервалов.

$\dfrac{(x-3)(x+3)(x-5)(x+5)}{(x-4)^2}<0$



$(-5;-3)\cup(3;4)\cup(4;5)$ — множество решений исходного неравенства.

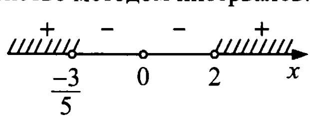
3) $(5x^2+3x+1)^{x^2-2x}>1.$

Преобразуем неравенство к виду $(5x^2+3x+1)^{x^2-2x}-1>0$ и выполним замену $(5x^2+3x+1)^{x^2-2x}-1 \leftrightarrow (x^2-2x)((5x^2+3x+1)-1)$ (см. замену 8).

Исходное неравенство равносильно неравенству

$x^2(x-2)(5x+3)>0.$

Решим это неравенство методом интервалов.



$\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(2;+\infty)$ — множество решений исходного неравенства.

4) $\log_{x+1}(x+2) < \log_{\frac{1}{x+1}}(1-x)$. Применим к правой части формулу

$\log_b a = \log_{b^n} a^n$: $\qquad \log_{\frac{1}{x+1}}(1-x) = \log_{x+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Перенесем все в левую часть неравенства:

$\log_{x+1}(x+2) - \log_{x+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) < 0$.

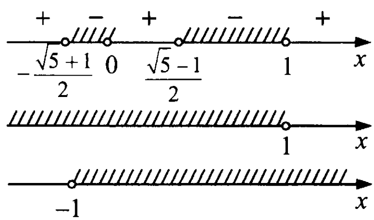
Выполним замену $\log_a f - \log_a g \leftrightarrow (f-g)(a-1)$.

Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \left(x+2-\frac{1}{1-x}\right)\left((x+1)-1\right) < 0, \\ 1-x > 0, \\ x+2 > 0, \\ x+1 > 0; \\ x+1 \neq 1. \end{cases}$$

Решим полученную систему.

$$\begin{cases} \frac{\left(-x^2-x+1\right)x}{1-x} < 0, \\ x < 1, \\ x > -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{-\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)x}{1-x} < 0, \\ x < 1, \\ x > -1. \end{cases}$$



$(-1;\,0) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\,1\right)$ — множество решений исходного неравенства.

5) $\left(2x^2+x+1\right)^{\frac{x+8}{x+5}} \geq \left(2x^2+x+1\right)^4$.

Перенесем все в левую часть неравенства и выполним замену:

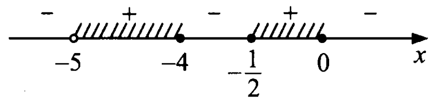
$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1-t_2)(a-1)$.

Исходное неравенство равносильно неравенству

$\left(\frac{x+8}{x+5}-4\right)\left(\left(2x^2+x+1\right)-1\right) \geq 0$.

Решим полученное неравенство

$$\frac{(-3x-12)x(2x+1)}{x+5}\ge 0$$



$(-5;-4]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right]$ — множество решений исходного неравенства.

6) $\log_{|x-5|}\left(2x^2-13x+15\right)>1.$

Перенесем все в левую часть неравенства и выполним замену

$\log_a f-g\leftrightarrow\left(f-a^g\right)(a-1).$

Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\left(2x^2-13x+15-|x-5|\right)\cdot\left(|x-5|-1\right)>0,\\ 2x^2-13x+15>0,\\ |x-5|\ne 0;\\ |x-5|\ne 1.\end{cases}$$

В первом неравенстве полученной системы выполним замены

$f-g\leftrightarrow f^2-g^2$ (при $f\ge 0$, $g\ge 0$) и $|t_1|-|t_2|\leftrightarrow t_1^2-t_2^2$.

$\left(2x^2-13x+15\right)-|x-5|\leftrightarrow\left(\left(2x^2-13x+15\right)^2-(x-5)^2\right)$, так как второе неравенство системы $2x^2-13x+15>0$;

$|x-5|-1=|x-5|-|1|\leftrightarrow(x-5)^2-1^2.$

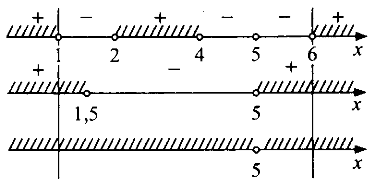
Получим систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases}\left(\left(2x^2-13x+15\right)^2-(x-5)^2\right)\left((x-5)^2-1\right)>0,\\ 2x^2-13x+15>0,\\ x\ne 5.\end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases}\left(2x^2-14x+20\right)\left(2x^2-12x+10\right)(x-6)(x-4)>0,\\ 2x^2-13x+15>0,\\ x\ne 5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-5)^2(x-2)(x-1)(x-6)(x-4)>0,\\ (x-5)(x-1{,}5)>0,\\ x\ne 5;\end{cases}$$



$(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$ — множество решений исходного неравенства.

7) $$\frac{\left(|x-4|-5-x^2\right)\left(|x+6|-\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{\left(|2-x|-6\right)\left(|1+x|-|x-3|\right)} > 0.$$

Исходное неравенство имеет вид $\dfrac{u_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_2} > 0.$

Все множители имеют вид $t_1 - t_2$, где $t_1 \geq 0$ и $t_2 \geq 0$. Заменим эти множители на знакосовпадающие с ними множители: $t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2$.

Получим неравенство, равносильное исходному.

$$\frac{\left(|x-4|^2-\left(5+x^2\right)^2\right)\left(|x+6|^2-\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)^2\right)}{\left(|2-x|^2-6^2\right)\left(|1+x|^2-|x-3|^2\right)} > 0.$$

Так как $|x-4|^2 = (x-4)^2$ и $\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)^2 = x^2-2x-3$, то с учетом неотрицательности подкоренного выражения, получим систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{\left((x-4)^2-\left(5+x^2\right)^2\right)\left((x+6)^2-\left(x^2-2x-3\right)\right)}{\left((2-x)^2-6^2\right)\left((1+x)^2-(x-3)^2\right)} > 0, \\ x^2-2x-3 \geq 0. \end{cases}$$

Решим эту систему.

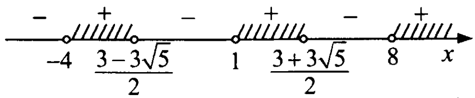
$$\begin{cases} \dfrac{\left(x-4-5-x^2\right)\left(x-4+5+x^2\right)\left(x+6-x^2+2x+3\right)\left(x+6+x^2-2x-3\right)}{(2-x-6)(2-x+6)(1+x-x+3)(1+x+x-3)} > 0, \\ x^2-2x-3 \geq 0; \end{cases}$$

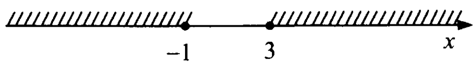
$$\begin{cases} \dfrac{\left(x^2-x+9\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-3x-9\right)\left(x^2-x+3\right)}{-(x+4)(8-x)(2x-2)} > 0, \\ x^2-2x-3 \geq 0. \end{cases}$$

Квадратные трехчлены $(x^2 - x + 9)$, $(x^2 + x + 1)$, $(x^2 - x + 3)$ — знакопостоянны, так как их $D < 0$.

Применим замену $at^2 + bt + c \leftrightarrow a$ при $b^2 - 4ac < 0$, получим систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 9}{(x+4)(x-8)(x-1)} > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \ge 0; \end{cases}$$





$\left(-4; \dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[3; \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}\right) \cup (8; +\infty)$ — множество решений исходного неравенства.

8) $$\frac{\left(8-(x+1)^3\right)\left(\sqrt{x+21}-\sqrt{2x+32}\right)\left(|x+3|-4-(x+1)^2\right)}{\left(|x+1|^{2x+1}-|x+1|^{4-x}\right)\cdot\left(\log_{x+21}(12-|x+1|)-\log_{x+21}(20-2|x+1|)\right)\cdot\log_5^3(x+1)^2} < 0.$$

Множитель $\left(8-(x+1)^3\right) = \left(2^3-(x+1)^3\right)$ знакосовпадает с разностью $\left(2-(x+1)\right)$. Поэтому заменим первый множитель на $(1 - x)$.

Множитель $\left(\sqrt{x+21}-\sqrt{2x+32}\right)$ имеет вид $\left(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}\right)$, который знакосовпадает с $(t_1 - t_2)$. Поэтому его заменим на $\left((x+21)-(2x+32)\right) = (-x-11)$.

Множитель $\left(|x+3|-4-(x+1)^2\right)$ имеет вид $t_1 - t_2$, где $t_1 \ge 0$ и $t_2 = 4 + (x + 1)^2 > 0$. Поэтому $(t_1 - t_2)$ знакосовпадает с $\left(t_1^2 - t_2^2\right)$.

И так как $|x + 3|^2 = (x + 3)^2$, то указанный множитель заменяем на

$$\left((x+3)^2 - \left(4+(x+1)^2\right)^2\right) =$$

$$= \left((x+3) - \left(4+(x+1)^2\right)\right)\cdot\left((x+3) + (4+(x+1)^2)\right) =$$

$$= (x + 3 - 4 - x^2 - 2x - 1)(x + 3 + 4 + x^2 + 2x + 1) =$$

$$= (-x^2 - x - 2)(x^2 + 3x + 8) = -(x^2 + x + 2)(x^2 + 3x + 8).$$

Квадратные трехчлены $x^2 + x + 2$, $x^2 + 3x + 8$ знакопостоянны, так как их $D < 0$.

В знаменателе первый множитель $\left(|x+1|^{2x+1} - |x+1|^{4-x}\right)$ имеет вид $a^{t_1} - a^{t_2}$, который знакосовпадает с $(t_1 - t_2)(a-1)$.

Поэтому этот множитель знакосовпадает с произведением $\left((2x+1)-(4-x)\right)\cdot\left(|x+1|-1\right)$.

И так как $\left(|x+1|-1\right)$ знакосовпадает с $\left(|x+1|^2 - 1\right) = x^2 + 2x$, то окончательно первый множитель знаменателя можно заменить на $(3x-3)\,(x^2+2x)$.

Второй множитель в знаменателе имеет вид $\log_a t_1 - \log_a t_2$, который знакосовпадает с произведением $(t_1 - t_2)(a-1)$.

Поэтому заменим этот множитель на
$\left((12-|x+1|)-(20-2|x+1|)\right)\cdot(x+21-1) = \left(|x+1|-8\right)\cdot(x+20)$.

И так как $|x+1|-8$ знакосовпадает с $|x+1|^2 - 8^2 = (x+1)^2 - 8^2$, то окончательно получим замену второго множителя в знаменателе:
$\left((x+1)^2 - 8^2\right)(x+20) = (x+9)(x-7)(x+20)$.

Последний множитель в знаменателе $\log_5^3 (x+1)^2$ имеет вид a^3, который знакосовпадает с a. И так как $a = \log_5 (x+1)^2 - \log_5 1$, то $\log_5^3 (x+1)^2$ знакосовпадает с $\left((x+1)^2 - 1\right)$.

Следовательно, последний множитель знаменателя заменим на $\left((x+1)^2 - 1\right) = x^2 + 2x$.

Итак, исходное неравенство равносильно в своей области определения неравенству $\dfrac{(1-x)(-x-11)(-1)}{(3x-3)\left(x^2+2x\right)(x+9)(x-7)(x+20)\left(x^2+2x\right)} < 0$,

$$\frac{-(x-1)(x+11)}{(x-1)x^2(x+2)^2(x+9)(x-7)(x+20)} < 0.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

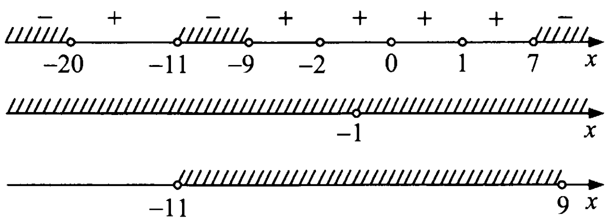
$$\begin{cases} \dfrac{-(x+11)(x-1)}{(x-1)x^2(x+2)^2(x+9)(x-7)(x+20)} < 0, \\ x+1 \neq 0, \\ 20-2|x+1| > 0; \end{cases}$$

$20-2|x+1|>0$

$|x+1|<10$

$-10<x+1<10$

$-11<x<9.$



$(-11;-9)\cup(7;9)$ — множество решений исходного неравенства.

Ответ: 1) $(-\infty;-4]\cup\{-2\}\cup[4;+\infty)$;

2) $(-5;-3)\cup(3;4)\cup(4;5)$; 3) $\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(2;+\infty)$;

4) $(-1;0)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right)$; 5) $(-5;-4]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right]$;

6) $(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$;

7) $\left(-4;\frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[3;\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right)\cup(8;+\infty)$;

8) $(-11;-9)\cup(7;9)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$;

2) $\left(x^2+x-6\right)\cdot\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0$;

3) $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1;$

4) $\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x);$

5) $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\ge\left(x^2+x+1\right)^3;$

6) $\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>1;$

7) $\dfrac{\left(|x-2|-4-x^2\right)\cdot\left(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(|1-x|-4\right)\cdot\left(|3+x|-|x-5|\right)}>0;$

8) $\dfrac{\left(8-x^3\right)\left(2^x-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+20}-\sqrt{2x+30}\right)\left(|x-2|-4-x^2\right)}{\left(|x|^{2x-1}-|x|^{5-x}\right)\cdot\left(\log_{x+20}\left(12-|x|\right)-\log_{x+20}\left(20-2|x|\right)\right)\cdot\log_5^3 x^2}<0.$

Ответ:

1) $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5);$

2) $(-\infty;-3]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty);$

3) $(-\infty;-0{,}5)\cup(1;+\infty);$

4) $(0;1)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};2\right);$

5) $(-2;-1]\cup[-0{,}5;0];$

6) $(-\infty;0)\cup(5;+\infty);$

7) $(-3;-2)\cup[2;5);$

8) $(-8;-1)\cup(-1;0)\cup(8;10).$

§9. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКА

Случайное событие, связанное с некоторым опытом (испытанием, экспериментом), — это всякое событие, которое при осуществлении этого опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти.

Например, выпадение орла или решки при подбрасывании монеты; поражение мишени или промах при выстреле.

Случайные события **обозначают** буквами A, B, C, ...

Пусть при n-кратном осуществлении опыта интересующее нас событие A произошло k раз.

Число k называют **частотой события**, а отношение $\frac{k}{n}$ — **относительной частотой события** A.

Например, по теории Менделя при скрещивании желтого гороха с желтым примерно в одном случае из четырех получается зеленый горох. Для проверки этого провели опыт 34 153 раза. Зеленый горох появился 8506 раз. Число 8506 — частота события «появление зеленого гороха», отношение $\frac{8506}{34153} \approx 0,25$ — относительная частота этого события.

Вообще, если в длинной серии одинаковых экспериментов со случайными исходами значения относительных частот появления одного и того же события близки к некоторому определенному числу, то это число принимают за **вероятность** данного **случайного события**. В приведенном выше примере вероятность появления зеленого гороха при скрещивании желтого гороха с желтым равна 0,25 или $\frac{1}{4}$.

Теория вероятностей изучает случайные события, обладающие статистической устойчивостью относительной частоты события.

Рассмотрим событие A, которое означает выпадение на игральном кубике числа очков, кратного 2.

Это событие происходит, когда выпало 2 очка, 4 очка, 6 очков, то есть лишь в трех исходах испытания. Исходы, при которых происходит событие, называют **благоприятными исходами** для этого события.

Таким образом, для события A благоприятными являются три исхода из шести равновозможных исходов. Отношение числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов в рассматриваемом примере равно $\frac{3}{6}$. Это отношение считают вероятностью события A и пишут $P(A)=\frac{3}{6}=0,5$.

Обозначение P исходит от французского слова *probabilite*, что означает вероятность.

Что означает на практике, что вероятность рассмотренного события A равна $\frac{3}{6}$? Это значит, что если провести большое число испытаний, то относительная частота появления события A будет мало отличаться от $\frac{3}{6}$, то есть от 0,5. Вообще при увеличении числа испытаний со случайными исходами относительная частота появления случайного события приближается к его вероятности.

Если все исходы какого-либо испытания равновозможны, то вероятность события в этом испытании равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.

Таким образом, чтобы найти вероятность некоторого события, не требуется, чтобы испытание было проведено в действительности и большое число раз. Надо правильно определить число равновозможных исходов испытания и число благоприятных для этого события исходов.

Пример 1.

Из 25 билетов по биологии ученик успел подготовить 16 первых и 3 последних билета. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?

Решение.

Пусть B — событие, заключающееся в том, что ученику на экзамене достанется билет, к которому он не подготовился. Число благоприятных для события B исходов равно 25 – (16 + 3), то есть 6. Значит, $P(B)=\frac{6}{25}=0,24$.

Ответ: 0,24.

Пример 2.

Какова вероятность того, что при бросании двух кубиков сумма выпавших на них очков равна 7? 9?

Р е ш е н и е .

Пусть C — событие, состоящее в том, что при бросании двух кубиков сумма выпавших на них очков равна 7, K — сумма выпавших очков равна 9.

Заполнив таблицу суммы очков, выпавших на двух кубиках, найдем искомую вероятность событий C; K.

Число очков, выпавших на II кубике / Число очков, выпавших на I кубике	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $\qquad P(K)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

О т в е т : $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{9}$.

Пример 3.

Для участия в игре 30 учеников должны разделиться произвольным образом на три группы одинаковой численности. Какова вероятность того, что подруги Оля и Ира окажутся в одной группе?

Р е ш е н и е .

В каждой из трех групп должно быть по 10 человек. Оля окажется в одной из этих групп. Для Иры останется 9 благоприятных исходов (попасть в ту же группу, что и Оля). Всего исходов — 29, так как одно место уже занято Олей. Вероятность того, что Оля и Ира окажутся в одной группе равна $\frac{9}{29}$.

О т в е т : $\frac{9}{29}$.

Пример 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что один раз выпадет решка, а другой — орел.

Решение.

Перебором определим возможные исходы. Их четыре: орел — орел, решка — решка, решка — орел, орел — решка. Все эти исходы равновозможны. Из них благоприятные исходы: решка — орел, орел — решка.

Вероятность того, что один раз выпадет решка, а другой — орел, равна $\frac{2}{4}$ или 0,5.

Ответ: 0,5.

Задачи для самостоятельного решения

1. Бросаем игральную кость. Какова вероятность того, что: а) число выпавших очков кратно 3; б) выпало простое число; в) выпало 7 очков; г) число выпавших очков меньше 7?
2. В коробке 2 белых и 3 черных шара. Наугад вынули 2 шара. Какова вероятность того, что: а) вынули 2 белых шара; б) вынули 2 черных шара; в) вынули 1 белый и 1 черный шар?
3. Брошено 2 игральных кубика: один — белого, другой — красного цвета. 1) Какова вероятность того, что: а) на белом кубике выпадет 5 очков; б) на красном кубике выпадет 4 очка; в) сумма выпавших очков на двух кубиках равна 7; г) на одном кубике — 6 очков, а на другом — нечетное количество очков; д) на белом кубике — 5 очков, а на красном — четное количество очков? 2) Вероятность выпадения какой суммы очков наибольшая?

Ответ:

1. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 0; г) 1.
2. а) 0,1; б) 0,3; в) 0,6.
3. 1) а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) 7; г) $\frac{1}{6}$; д) $\frac{1}{12}$. 2) 7.

Не всегда удается быстро с помощью перебора определить число благоприятных и всех возможных исходов. Составлять различные комбинации и подсчитывать число комбинаций помогает **комбинаторика**. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, что означает «соединять, сочетать».

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества являются **перестановки**.

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n.

$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

Пример.

Сколькими способами можно разместить 5 человек на пятиместной скамейке?

Решение.

Число способов равно числу перестановок из 5 элементов. По формуле числа перестановок находим, что $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

Пусть даны 3 элемента: a, b, c. Выберем из них 2 элемента. В результате получим ab, ba, ac, ca, bc, cb. Эти выборки отличаются друг от друга **составом** и **порядком**. Каждую упорядоченную пару, которую можно составить из трех элементов, называют размещением из трех элементов по два.

Размещениями из n элементов по k ($k \le n$) называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

То есть два размещения из n элементов по k считаются различными, если они различаются самими элементами или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k и находят по формуле:

$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (если $k = n$, то $0! = 1$).

Пример 1.

В классе 10 различных учебных предметов и 5 уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 5 различных предметов?

Решение.

Мы будем выбирать из 10 различных учебных предметов 5. Заметим, что важен и состав, и порядок. Следовательно, мы имеем дело с размещениями из 10 элементов по 5:

$$A_{10}^{5}=\frac{10!}{(10-5)!}=\frac{10!}{5!}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=30\,240.$$

Итак, расписание можно составить 30 240 способами.

Ответ: 30 240.

Пример 2.

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение.

Событие K — номер набран правильно. Число благоприятных исходов — 1. Найдем число всевозможных исходов. Из 10 различных цифр будут выбраны 2, причем важны и состав, и порядок. Следовательно, количество всевозможных исходов равно числу размещений из 10 элементов по 2, то есть $A_{10}^{2}=\frac{10!}{8!}=9\cdot 10=90$. Все эти исходы равновозможны, $P(K)=\frac{1}{90}$.

Ответ: $\frac{1}{90}$.

Пусть имеется три элемента: a, b, c. Нужно из этих трех элементов выбрать два так, чтобы они отличались лишь составом, порядок не важен (то есть ab и ba — один и тот же выбор). Получим ab, ac, bc. Говорят, что мы составили все возможные сочетания из 3 элементов по 2.

Сочетанием из *n* элементов по *k* называется любое множество, состоящее из *k* элементов, выбранных из данных *n* элементов. Порядок выбора предметов не существенен.

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы, важен лишь состав элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k и вычисляют по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 1.

Из десяти кандидатов на одну и ту же должность нужно выбрать трех. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Мы будем составлять выборки из 10 элементов по 3, причем порядок не важен, важен состав. Следовательно, число способов равно числу сочетаний из 10 элементов по 3.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Ответ: 120.

Пример 2.

Среди 100 электрических ламп 5 испорченых. Какова вероятность того, что выбранные на удачу 3 лампы окажутся исправными? Ответ округлите до сотых.

Решение.

Событие K — выбраные лампы исправны.

Число всевозможных исходов — C_{100}^3. Все эти исходы равновозможны. Число благоприятных исходов — C_{95}^3.

$$P(K) = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} \approx 0,86.$$

Ответ: 0,86.

Пример 3.

В лотерее «Спортлото» на специальной карточке отмечают 6 номеров из 49. Во время тиража открываются 6 выигравших номеров. Какова вероятность угадать в этой игре 3 счастливых номера?

Решение.

Событие A — угадать 3 счастливых номера.

Число всевозможных исходов равно числу сочетаний из 49 элементов по 6, так как важен состав элементов, а порядок заполнения карточки не важен. Все эти исходы равновозможны.

Благоприятные для события A исходы: на карточке отмечены 3 номера из 6 счастливых (количество таких способов равно C_6^3) и 3 номера из 43 несчастливых (количество этих способов равно C_{43}^3). Каждому выбору 3 счастливых номеров соответствует C_{43}^3 выборов 3 несчастливых номеров. Значит, число исходов, благоприятных для события A, равно $C_6^3 \cdot C_{43}^3$.

Таким образом, искомая вероятность $P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0{,}0176.$

Ответ: 0,0176.

Пример 4.

Из 18 собранных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Решение.

Событие A — выбранные наугад 2 велосипеда не имеют дефектов.

Общее число всех равновозможных исходов равно числу сочетаний из 18 по 2, то есть C_{18}^2.

Исходом, благоприятным для события A, является выбор двух исправных велосипедов из имеющихся 15 исправных. Следовательно, число благоприятных для события A исходов равно C_{15}^2. Отсюда получаем, что $P(A) = \frac{C_{15}^2}{C_{18}^2} = \frac{15!}{2!13!} : \frac{18!}{2!16!} = \frac{14 \cdot 15}{17 \cdot 18} \approx 0{,}69.$

Ответ: 0,69.

Пример 5.

Группа туристов, в которой 8 юношей и 3 девушки, выбирают по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юношей и 2 девушки?

Решение.

Событие A — выбраны 2 юноши и 2 девушки. Число всех исходов при выборе четырех дежурных равно C_{11}^4. Все эти исходы равновозможны.

Выбрать 2 юношей из 8 можно $C_8^2=\frac{8!}{2!6!}=28$ способами.

Выбрать 2 девушек из 3 можно $C_3^2=\frac{3!}{2!1!}=3$ способами.

Число благоприятных исходов:

$$C_8^2\cdot C_3^2=28\cdot 3=84,\ \ P(A)=\frac{C_8^2\cdot C_3^2}{C_{11}^4}=\frac{84}{330}=\frac{14}{55}.$$

Ответ: $\frac{14}{55}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

   Ответ: 120.

2. Из 16 туристов надо выбрать дежурного и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 240.

3. Из 9 книг и 6 журналов нужно выбрать 3 книги и 2 журнала. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

   Ответ: 1260.

4. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих специалиста одновременно уезжать не должны?

   Ответ: 15 368.

5. Сколькими способами могут быть присуждены 1-я, 2-я, 3-я премии трем лицам, если число соревнующихся равно 10?

   Ответ: 720.

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, не кратные пяти и не содержащие одинаковых цифр. Сколько существует таких чисел?

   Ответ: 96.

7. Двенадцать человек разбили на три группы по четыре человека в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

   Ответ: 34 650.

8. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?
Ответ: 544 320.

9. На плоскости отметили 6 точек. Их надо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать (в латинском алфавите 26 букв)?
Ответ: 165 765 600.

10. Из колоды в 32 карты берут 10 карт. Какова вероятность того, что из 10 выбранных таким образом карт 8 карт будут одной масти?
Ответ: 0,000004.

11. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые распределены по жребию для игры в двух группах по 10 человек. Какова вероятность того, что двое сильных участников будут играть в одной группе? Ответ округлите до сотых.
Ответ: 0,47.

12. В ящике имеется 10 белых и 5 черных шаров. Наудачу вынимают 3 шара. Какой состав шаров по цвету извлечь наиболее вероятно?
Ответ: 2 белых и 1 черный.

13. Шесть братьев живут вместе. Они решили тянуть жребий, кому идти в магазин. Из шести одинаковых бумажек на одной стоит знак «Х». Кто эту бумажку вытянет, тот и должен идти за покупкой. Вытянув бумажку, каждый возвращает ее обратно. Для кого из братьев, вытягивающих бумажку первым, вторым, ..., шестым, вероятность вытянуть знак «Х» будет наибольшей?
Ответ: для каждого вероятность одинакова.

14. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно? Ответ округлите до тысячных.
Ответ: 0,001.

Два основных правила комбинаторики

Правило суммы

Если элемент a можно выбрать m различными способами и независимо от него элемент b можно выбрать n различными способами, то выбрать либо элемент «a», либо элемент «b» (a или b) можно «$m + n$» способами.

Пример 1.

В двух коробках лежат шары. В одной — 15, в другой — 26. Сколькими способами можно взять один шар из этих коробок?

Р е ш е н и е .

Очевидно, что один шар можно взять $15 + 26 = 41$ способом.

О т в е т : 41.

Пример 2.

В группе 10 человек. Сколько разных подгрупп можно образовать при условии, что в подгруппу входит не менее 3 человек?

Р е ш е н и е .

По условию задачи можно получить комбинации: $3 + 7$, или $4 + 6$, или $5 + 5$ ($6 + 4$, $7 + 3$ — те же самые комбинации). Поскольку в каждой выборке важен лишь состав, так как члены подгруппы не различаются по ролям, то все выборки — сочетания.

Число выборок из трех человек $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!7!} = 120.$

Число выборок из четырех человек $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!} = 210.$

Число выборок из пяти человек $C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!5!} = 252.$

Применив правило сложения, получим

$C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 = 120 + 210 + 252 = 582$ способа.

О т в е т : 582.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать m различными способами и независимо от него элемент b можно выбрать n различными способами, тогда упорядоченную пару элементов «a и b» можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Правила суммы и произведения обобщаются и на случай комбинаций многих элементов.

Пример 1.

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Решение.

Первую цифру (элемент a) можно выбрать 9 способами, так как число не может начинаться с нуля. Вторую цифру (элемент b) можно выбрать 10 способами, так как у нас 10 цифр. Третью цифру (элемент c) можно выбрать 10 способами. По правилу произведения количество составленных трехзначных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Ответ: 900.

Пример 2.

Хоккейная команда состоит из двух вратарей, семи защитников и десяти нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Решение.

По условию задачи при выборе важен состав, порядок выбора не важен.

Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами.

Двух защитников — $C_7^2 = 21$ способами.

Трех нападающих — $C_{10}^3 = 120$ способами.

По правилу произведения найдем, сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку: $2 \cdot 21 \cdot 120 = 5040$.

Ответ: 5040.

Выборки с повторениями*

Рассмотрим выборки с повторениями, то есть такие, в которые любой из n элементов может входить более одного раза.

Размещения из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более m раз, называют **размещениями** из n элементов по m **с повторениями** и обозначают так: $\overline{A_n^m}$.

Количество таких выборок вычисляют по формуле $\overline{A_n^m} = n^m$.

Пример 1.

Из двух цифр 4 и 5 — составьте все возможные трехзначные числа и определите их количество.

Решение.

Мы должны разместить цифры 4 и 5 по трем местам: 444, 455, 454, 554, 545, 544, 555, 445. $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$.

Пример 2.

Сколькими способами можно разместить 9 пассажиров в 4 вагона?

Решение.

Эту задачу можно рассматривать как задачу о распределении четырех вагонов среди девяти пассажиров с повторениями.

$\overline{A_4^9} = 4^9 = 262\,144$ способа.

Ответ: 262 144.

Перестановки из n элементов, в каждую из которых входят n_1 одинаковых элементов одного типа, n_2 одинаковых элементов другого типа и т.д. до n_k одинаковых элементов k-го типа, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, называют **перестановками** из n элементов с **повторениями** и обозначают $P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k)$. Число перестановок с повторениями может быть вычислено по формуле

$$P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Пример.

Сколькими способами можно переставить буквы в слове: а) математика; б) абракадабра; в) стол, чтобы получить все возможные наборы букв?

Решение.

а) В слове «математика» 10 букв, из них две буквы «м», три буквы «а», две буквы «т», одна буква «е», одна буква «к», одна буква «и». Количество всех возможных наборов букв равно числу перестановок из 10 элементов с повторениями 2, 3, 2, 1, 1, 1 раз: $P_{10}(2;3;2;1;1;1)=\dfrac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!}=151\,200.$

б) $P_{11}(5;2;2;1;1)=83\,160$ наборов букв.

в) В слове «стол» четыре буквы. Все они различны. Поэтому можно получить $P_4=4!=24$ различных набора букв.

Ответ: а) 151 200; б) 83 160; в) 24.

Сочетаниями из n элементов по m с **повторениями** называются выборки, содержащие m элементов (без учета порядка следования), причем любой элемент может входить в выборку некоторое число раз, не больше m. Их число обозначают $\overline{C_n^m}=\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$.

Пример 1.

Запишите все сочетания из трех цифр: 6, 7, 8 — по два с повторениями и подсчитайте их количество.

Решение.

66; 67; 68; 77; 78; 88.

(76; 86; 87 — одинаковы с 67; 68; 78, так как важен состав, порядок следования не важен).

Таким образом, 6 сочетаний.

Этот же результат мы получим по формуле $\overline{C_3^2}=\dfrac{(3+2-1)}{2!(3-1)!}=\dfrac{4!}{2!\,2!}=6.$

Ответ: 6.

Пример 2.

В кондитерской имеется 6 различных видов пирожных. Сколькими способами можно составить набор из 5 пирожных?

Решение.

По условию задачи нам придется выбирать по 5 пирожных с повторениями из 6 различных видов.

Найдем количество всех возможных наборов по формуле:

$\overline{C_6^5}=\dfrac{(6+5-1)!}{5!(6-1)!}=\dfrac{10!}{5!\,5!}=252$ набора.

Ответ: 252.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из 33 букв русского алфавита составляют словосочетания из 4 букв так, что соседние буквы различны. Сколько таких словосочетаний можно составить?
2. Из города А в город Б ведут 3 дороги, а в город В — 5 дорог. В город Г из города Б ведут 2 дороги, а из города В — 4 дороги. Города Б и В дорогами не соединяются. Сколькими способами можно добраться из А в Г?
3. Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров в 3 вагона?
4. Каждый телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько существует номеров, не содержащих других цифр, кроме 2, 3, 5, 7?
5. Сколькими способами можно расположить в ряд две зеленые и четыре красные лампочки?
6. Запишите все сочетания из трех цифр: 3, 4, 5 — по две с повторениями и подсчитайте их количество.
7. В кондитерской имеется 5 различных сортов пирожных. Сколькими способами можно составить набор из четырех пирожных?
8. Имеется 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено 8 наименований, во второй — 7 наименований, в третий — 5 наименований товаров?
9. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?
10. Имеется 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?

Ответ: 1) 1 081 344; 2) 26; 3) 6561; 4) 16 384; 5) 15; 6) 33; 34; 35; 44; 45; 55. Всего 6 сочетаний. 7) 70; 8) 99 768 240; 9) 293 930; 10) 16807.

Сложение и умножение вероятностей

Сумма событий *A* и *B* — это такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий *A* или *B*.

Сумму событий обозначают знаком $\cup$: $A \cup B$.

Пример 1.

Событие A — выиграли по билету одной лотереи, событие B — выиграли по билету другой лотереи, событие $A \cup B$ — выиграли хотя бы по билету одной из лотерей.

Пример 2.

Имеется 25 экзаменационных билетов, пронумерованных от 1 до 25.

Событие A — номер билета оканчивается на 5, событие B — номер билета оканчивается на 7. Событие $A \cup B$ — номер билета оканчивается на 5 или на 7.

Произведение событий A и B — это событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B.

Произведение событий A и B обозначают так: $A \cap B$.

Пример 1.

Экзаменационные билеты пронумерованы от 1 до 25. Событие A — номер билета делится на 2, событие B — номер билета делится на 3. Событие $A \cap B$ — номер билета делится на 6.

Два события называются **несовместными**, если в одном и том же испытании они не могут произойти одновременно, то есть наступление одного из них исключает наступление другого.

Пример 2.

Пусть в коробке находится 5 шаров: 3 белых и 2 зеленых. Из коробки наугад вынимают один шар. Событие A — шар оказался белым, событие B — шар оказался зеленым. События A и B являются **несовместными**, так как не могут произойти одновременно.

Два события называются **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на возможность наступления другого события.

Пример 3.

В магазине стоят два платежных автомата. Событие A — первый автомат неисправен, событие B — второй автомат неисправен. События A и B — независимые.

Теорема 1.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. То есть $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместные события.

Теорема 2.

Вероятность суммы двух случайных произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения.

То есть $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, A и B не являются несовместными событиями.

Пример 1.

Из партии изделий ОТК (отдел технического контроля) проверяет половину изделий и признает годной всю партию, если из числа проверенных бракованных не более одного изделия. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий при двух бракованных будет признана годной?

Решение.

Событие A — партия изделий признана годной.

Событие B — нет брака среди отобранных изделий.

Событие C — среди отобранных изделий 1 бракованное.

События B и C несовместны. Событие $A = B \cup C$.

По теореме 1:

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}} + \frac{C_2^1 \cdot C_{18}^9}{C_{20}^{10}} = \frac{29}{38}.$$

Ответ: $\frac{29}{38}$.

Пример 2.

Из колоды в 36 карт наугад вынимается одна. Какова вероятность, что будет вынута пика или туз?

Решение.

Пусть событие A — вынута пика, событие B — появился туз. События A и B совместны, так как может появиться пиковый туз.

По теореме 2:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 3.

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков выпадет хотя бы на одном 6 очков.

Р е ш е н и е .

Событие A — выпадение 6 очков на первом кубике, событие B — выпадение 6 очков на втором кубике. События A и B совместны, так как 6 очков могут выпасть на двух кубиках.

По теореме 2:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

О т в е т: $\frac{11}{36}$.

Пример 4.

В ящике 40 деталей: 20 — первого сорта, 15 — второго сорта, 5 — третьего сорта.

Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь не третьего сорта.

Р е ш е н и е .

Событие A — извлеченная деталь не третьего сорта, событие B — извлеченная деталь первого сорта, событие C — извлеченная деталь — второго сорта.

События B и C несовместные.

По теореме 1: $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{20}{40} + \frac{15}{40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$.

О т в е т: $\frac{7}{8}$.

Теорема 3.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. То есть $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, если A и B — независимые события.

Теорема 4.

Вероятность произведения произвольных событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии того, что первое произошло.

То есть $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$, если A и B не являются независимыми событиями.

(P_A (B) — вероятность события B при условии, что событие A произошло,

P_B (A) — вероятность события A при условии, что событие B произошло.)

Пример 1.

На столе лежат 6 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон попадает в цель на стене с вероятностью 0,7, если он стреляет из пристрелянного револьвера. Если же он стреляет из непристрелянного револьвера, то попадает в цель на стене с вероятностью 0,15. Ковбой Джон наудачу хватает револьвер и стреляет по цели на стене. Найти вероятность того, что Джон поразит цель.

Решение.

Событие A — Джон схватил пристрелянный револьвер, событие B — Джон попадет из пристрелянного револьвера в цель. События $A \cap B$ — Джон схватил пристрелянный револьвер и поразил цель.

События A и B независимы. По теореме 3:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{6} \cdot 0{,}7 = \frac{7}{30}.$$

Событие C — Джон схватил непристрелянный револьвер, событие D — Джон поражает из непристрелянного револьвера цель. Событие $C \cap D$ — Джон схватил непристрелянный револьвер и поразил цель.

События C и D независимы. По теореме 3:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{6} \cdot 0{,}15 = \frac{1}{10}.$$

Событие K — Джон поразил цель.

По теореме 1: $P(K) = P(A \cap B) + P(C \cap D) = \frac{7}{30} + \frac{1}{10} = \frac{1}{3}.$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 2.

Игральный кубик бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз выпадает число очков: а) кратное двум; б) кратное 3?

Решение.

а) Событие A — каждый раз выпадает число очков, кратное двум.

События A_1, A_2, A_3 — выпадение числа очков, кратного двум, соответственно при первом, втором, третьем бросании. События A_1, A_2, A_3 — независимые.

По теореме 3

$$P(A)=P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{8}.$$

б) Событие B — каждый раз выпадает число очков, кратное трем.

События B_1, B_2, B_3 — выпадение числа очков, кратного трем, соответственно при первом, втором, третьем бросании. События B_1, B_2, B_3 — независимые.

По теореме 3

$$P(B)=P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{27}$.

Пример 3.

В мастерской изготавливают детали на двух станках. Вероятность изготовления детали на первом станке — 0,7. Вероятность изготовления годной детали на первом станке — 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Решение.

Событие A — деталь сделана на первом станке; событие B — деталь годная.

По теореме 4 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=0,7\cdot 0,8=0,56$.

При решении некоторых задач бывает удобно воспользоваться свойством вероятностей **противоположных событий**.

Пусть проводится некоторое испытание и рассматриваются два события: событие A и противоположное ему событие, которое принято обозначать $\bar{A}$. Например, при бросании симметричной монеты событие A — выпадение орла, событие $\bar{A}$ — выпадение решки.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Пример 4.

Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 10?

Решение.

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие A означает, что сумма очков, выпавших на двух кубиках меньше 10. Так как благоприятных для события A исходов большое число, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\overline{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 10.

Благоприятными для события $\overline{A}$ являются исходы (6; 4); (5; 5); (6; 5); (5; 6); (6; 6); (4; 6).

Так как события A и $\overline{A}$ являются противоположными, то $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Отсюда $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Пример 5.

В партии 10 деталей, 8 из них стандартные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад двух деталей хотя бы одна стандартная.

Решение. 1-й способ.

Событие B — среди взятых наугад двух деталей только одна стандартная.

Событие C — среди взятых наугад двух деталей две стандартные.

Событие A — среди взятых наугад двух деталей хотя бы одна стандартная.

События B и C несовместны.

Применим теорему 1.

$$P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}+\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{44}{45}.$$

2-й способ.

Событие $\overline{A}$ — среди взятых наугад двух деталей нет стандартных.

Тогда $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{44}{45}$.

Ответ: $\frac{44}{45}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В партии из 30 пар обуви 10 пар мужской, 8 пар женской, остальная обувь — детская. Найдите вероятность того, что взятая наугад пара окажется не детской.

   Ответ: 0,6.

2. Игральный кубик бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз выпадает число очков: а) кратное двум; б) кратное трем.

   Ответ: а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{27}$.

3. В зрительном зале кинотеатра имеется 9 рядов, пронумерованных от 1 до 9, а в каждом ряду — 9 кресел. Зритель наудачу занимает место. Что вероятнее: сумма номеров ряда и места окажется четной или нечетной?

   Ответ: четной.

4. Решите предыдущую задачу со зрительным залом 8×8.

   Ответ: нечетная.

5. Ваши приятели живут в одном из 50 домов с номерами от 1 до 50. В каждом из этих домов 100 квартир. В каком случае вероятность попасть в нужную вам квартиру больше, если вам известно, что: а) номер квартиры оканчивается на 3; б) номер дома делится на 5, номер квартиры делится на 2; в) сумма номеров дома и квартиры равна 100?

   Ответ: в третьем случае.

6. В ящике лежат 8 красных, 10 зеленых и 12 синих одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают три шара. Какова вероятность того, что на вынутых шарах будет отсутствовать хотя бы один цвет?

   Ответ: 0,763.

7. В мастерской работают три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0,15, второй станок — с вероятностью 0,1 и третий станок — с вероятностью 0,12. Считая, что все станки не могут одновременно потребовать наладки, найти вероятность того, что за смену хоть один станок потребует наладки.

   Ответ: 0,3268.

8. При изготовлении детали проводится четыре операции. Вероятность получения брака после каждой операции равна 0,01. Какова вероятность выпуска детали без брака, если операции независимы? Ответ округлите до сотых.

Ответ: 0,96.

9. На военных учениях три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,75, для третьего — 0,7. а) Какова вероятность хотя бы одного попадания? б) Какова вероятность ровно одного попадания? в) Какова вероятность ровно двух попаданий? Ответ округлите до сотых.

Ответ: а) 0,99; б) 0,14; в) 0,43.

Формула Бернулли

Если при проведении некоторого однократного испытания вероятность появления события A равна p, то вероятность того, что событие A не произойдет, равна $q=1-p$. Тогда вероятность появления события A в m случаях из n повторных испытаний находится по формуле Бернулли:

$$p(S_n=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}=C_n^m\cdot p^m(1-p)^{n-m}.$$

Пример 1.

Монету подбрасывали 9 раз. Какова вероятность трехкратного появления орла?

Решение.

В данной задаче $n=9$, $m=3$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$.

По формуле Бернулли найдем искомую вероятность:

$$p(S_9=3)=C_9^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 0{,}164.$$

Ответ: 0,164.

Пример 2.

Вероятность попадания в мишень одним выстрелом — $\frac{1}{8}$. Какова вероятность того, что при 12 выстрелах не будет ни одного попадания?

Р е ш е н и е .

В данной задаче $n = 12$, $m = 0$, $p = \frac{1}{8}$, $q = 1 - p = \frac{7}{8}$.

По формуле Бернулли

$$p(S_{12} = 0) = C_{12}^0 \cdot p^0 \cdot q^{12} = 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{12} = 0,2014.$$

О т в е т : 0,2014.

Задачи для самостоятельного решения (на формулу Бернулли)

1. На испытательный стенд поставлено 100 конденсаторов. Известно, что вероятность пробоя конденсатора до истечения 10 000 часов работы равна 0,01. Чему равны вероятности того, что за 10 000 часов откажут 0, 1, 2, 3 конденсатора? Ответ округлите до десятитысячных.

О т в е т : 0,3660; 0,3697; 0, 1848; 0,0611.

2. Два шахматиста условились сыграть 10 партий. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии: первым игроком — $\frac{2}{3}$, вторым игроком — $\frac{1}{3}$ (ничьи не считаются, а переигрываются).

Чему равна вероятность выигрыша всей игры: а) первым игроком; б) вторым игроком; в) сведения ее в ничью? Ответ округлите до десятитысячных.

О т в е т : а) 0,7869; б) 0,0765; в) 0,1366.

3. Какова вероятность того, что при 10 бросках игрального кубика число очков, кратное трем, появится ровно три раза; не более трех раз; ровно четыре раза? Ответ округлите до сотых.

О т в е т : 0,26; 0,54; 0,23.

Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления хотя бы одного из несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, равна сумме произведений вероятностей этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Пример.

В одной команде шахматистов 7 гроссмейстеров, 3 мастера спорта. В другой команде 4 гроссмейстера и 6 мастеров спорта. В сборную вошли 8 игроков из первой команды и 2 игрока из второй. Какова вероятность того, что случайно выбранный игрок из сборной — гроссмейстер?

Решение.

Событие A — наугад выбранный шахматист сборной — гроссмейстер.

Событие H_1 — шахматист из первой команды;

событие H_2 — шахматист из второй команды;

$P(H_1)$ — вероятность того, что случайно выбранный шахматист сборной — из первой команды;

$P(H_2)$ — вероятность того, что случайно выбранный шахматист сборной — из второй команды;

$P_{H_1}(A)$ — случайно выбранный шахматист из первой команды — гроссмейстер.

$P_{H_2}(A)$ — случайно выбранный шахматист из второй команды — гроссмейстер.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}64.$$

Ответ: 0,64.

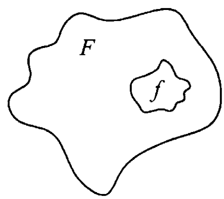
Задачи для самостоятельного решения (на формулу полной вероятности)

1. Из 50 деталей 18 деталей делают в первом цехе, 20 деталей делают во втором цехе, остальные детали делают в третьем цехе. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь будет отличного качества, если первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, а второй цех — с вероятностью 0,6?
Ответ: 0,78.
2. В тире из 10 винтовок, среди которых 6 снайперских и 4 обычных, наугад выбирается одна и из нее производится выстрел. Какова вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки — 0,9, а из обычной — 0,7?
Ответ: 0,82.

3. Имеются 4 одинаковых контейнера со следующим составом шаров: в первом контейнере 5 белых и 5 черных; во втором контейнере 1 белый и 2 черных; в третьем контейнере 2 белых и 5 черных; в четвертом контейнере 3 белых и 7 черных. Наудачу выбирается контейнер и из него — один шар. Чему равна вероятность того, что шар окажется черным? Ответ округлите до сотых.
Ответ: 0,65.

Геометрическое определение вероятности

Пусть на плоскости имеется некоторая область F и в ней подобласть f.



Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в область f не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения, а пропорциональна ее площади, определим вероятность попадания случайной точки M в заданную подобласть как отношение мер областей $P(M \in f) = \dfrac{mes\ f}{mes\ F}$ (mes — мера).

В одномерной области мерой является длина, в двухмерной — площадь, в трехмерной — объем.

Пример.

1. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет в квадрат?
Решение.
Событие А — точка попала в квадрат.
Пусть a — сторона квадрата. Площадь квадрата равна a^2, площадь описанного вокруг него круга равна $\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{2}$;

$$P(A) = \frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{a^2}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{\pi}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В шар вписан куб. Точка бросается наугад в шар. Какова вероятность того, что она попадет в куб?

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

2. На отрезок AB длиной 5 см бросают наудачу точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет на отрезок CD длиной 2 см, являющийся частью отрезка AB?

Ответ: 0,4.

Список использованной литературы к ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Высший балл / Т.М. Ерина. — М.: Издательство «Экзамен», 2020

1) Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. Справ. пособие по математике. — Мн.: «Асар»,1996. — 464с.
2) Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
3) Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
4) Голубев В.И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике. Журнал «Квант», 1991, №8.
5) Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М.: Илекса, 2010. — 252 с.
6) Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. — К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. — 290 с.
7) Рязановский А.Р., Мирошин В.В. Математика. Решение задач повышенной сложности. — М.: Интеллект-Центр, 2008. — 480 с.
8) Родионов Е.М. Решение задач с параметрами.: Пособие для поступающих в вузы. — М.: МП.: «Русь-90», 1995. — 160 с.
9) Родионов Е.М., Синякова С.Л. Математика. Часть I. Уравнения, неравенства. Параметры. Тригонометрия. Логарифмы. Функции. Прогрессии. — М.: Ориентир, 2006. — 632 с.
10) Сергеев И.Н., Панферов В.С. ЕГЭ: 1000 задач с ответами и решениями по математике. Все задания группы С «Закрытый сегмент». — М.: Издательство «Экзамен», 2014. — 301 с.
11) Ткачук В.В. Математика — абитуриенту. Том I. — М.: ТЕИС, 1995. — 499 с.
12) Ткачук В.В. Математика — абитуриенту. Том II. — М.: ТЕИС, 1995. — 553 с.
13) Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. Математики. — М.: Просвещение, 1995. — 176 с.
14) Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач : Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1991. — 384с.

Справочное издание

Ерина Татьяна Михайловна

ЕГЭ 100 БАЛЛОВ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.HA34.H08638 с 07.08.2018 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Е. В. Григорьева, И. А. Огнева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *М. А. Серова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 034-2014; 58.11.1 — книги печатные

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа»
Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495) 641-00-30 (многоканальный).