К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

14 ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

ЕГЭ 2020

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

14 вариантов заданий
Ответы и решения
Критерии оценок
Бланки ответов

Издательство ЭКЗАМЕН®

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

14 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

Издательство

«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА

2020

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ** 2020. Математика. 14 вариантов. Профильный уровень. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; **под ред. И. В. Ященко**. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020. — 71, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Тесты от разработчиков»)

ISBN 978-5-377-14958-3 (Издательство «Экзамен»)
ISBN 978-5-4439-4004-5 (МЦНМО)

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

Пособие содержит 14 типовых вариантов экзаменационных заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2020 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2020 г. по математике профильного уровня, степени трудности заданий.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 3,45.
Усл. печ. л. 10. Тираж 8000 экз. Заказ 6093/19.

ISBN 978-5-377-14958-3 (Издательство «Экзамен»)
ISBN 978-5-4439-4004-5 (МЦНМО)

© Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э., 2020
© Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Единый государственный экзамен - 2020

Бланк ответов № 1

Код региона | Код предмета | Название предмета

С порядком проведения единого государственного экзамена ознакомлен(-а).

Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Резерв - 4

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ и ЦИФРАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , –

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 À Â Ä Ö Ô È É Ê Ë Î Ï Ù Û Ü ß Ç

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте***

Результаты выполнения заданий с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

Замена ошибочных ответов на задания с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

Заполняется ответственным организатором в аудитории:

Количество заполненных полей «Замена ошибочных ответов»

Подпись ответственного организатора строго внутри окошка

Единый государственный экзамен - 2020

Бланк ответов № 2 лист 1

Код региона

Код предмета

Название предмета

Резерв - 5

Бланк ответов № 2 (лист 2)

Лист

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания с РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, 31.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! *Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте*

Оборотная сторона бланка НЕ ЗАПОЛНЯЕТСЯ. Используйте бланк ответов № 2 (лист 2).

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

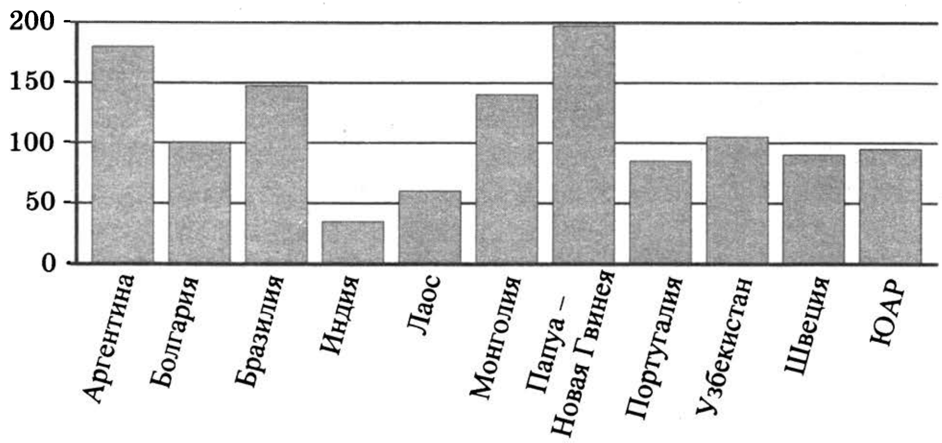
ВАРИАНТ 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

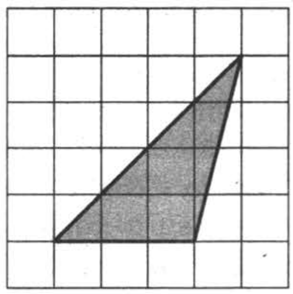
Часть 1

1. Футболка стоит 160 рублей. Какое наибольшее число футболок можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20%?

2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?



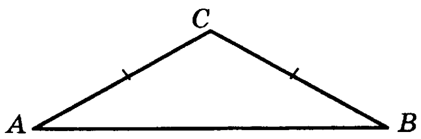
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



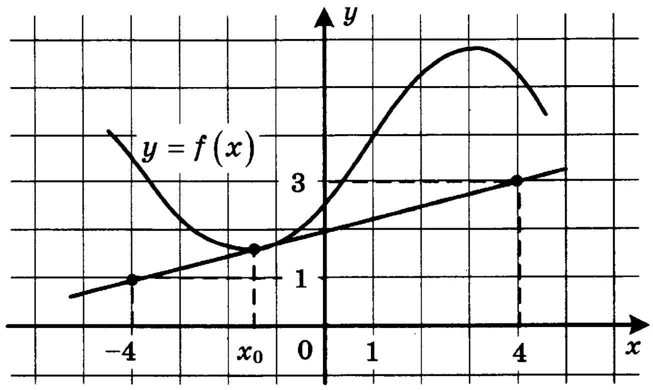
4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

5. Найдите корень уравнения $4^{3+5x} = 0{,}8 \cdot 5^{3+5x}$.

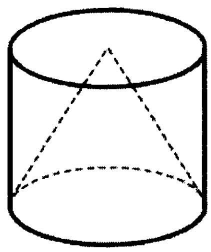
6. В треугольнике ABC угол A равен 29°, $AC = BC$. Найдите угол C.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Объём цилиндра равен 12. Чему равен объём конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

10. Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наименьшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

12. Найдите точку минимума функции $y = (x+17)^2 e^{30-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5^{x^2-4x+1}+5^{x^2-4x}=30$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причём $BP : PB_1 = 1 : 3$.

а) Пусть M — середина A_1C_1. Докажите, что прямые MP и AC перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

15. Решите неравенство $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}\le x$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 60 и 80.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t-\sin t}=2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

19. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили так же и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

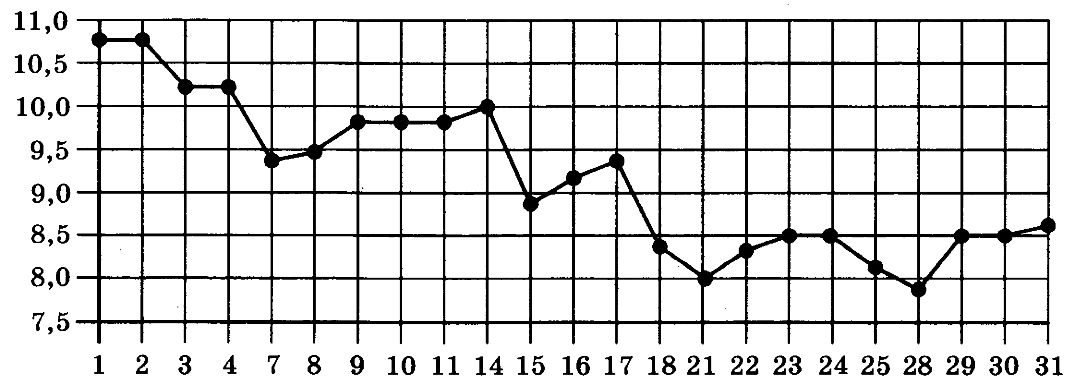
ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

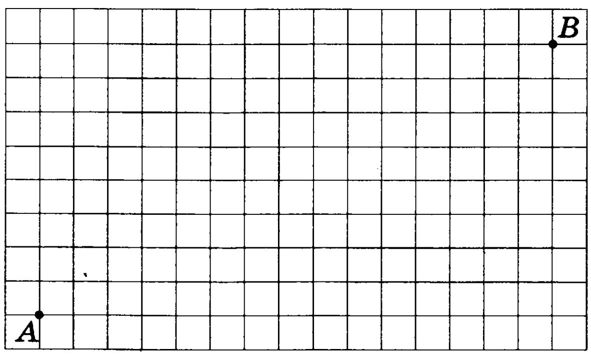
Часть 1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.



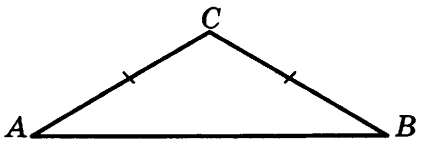
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.



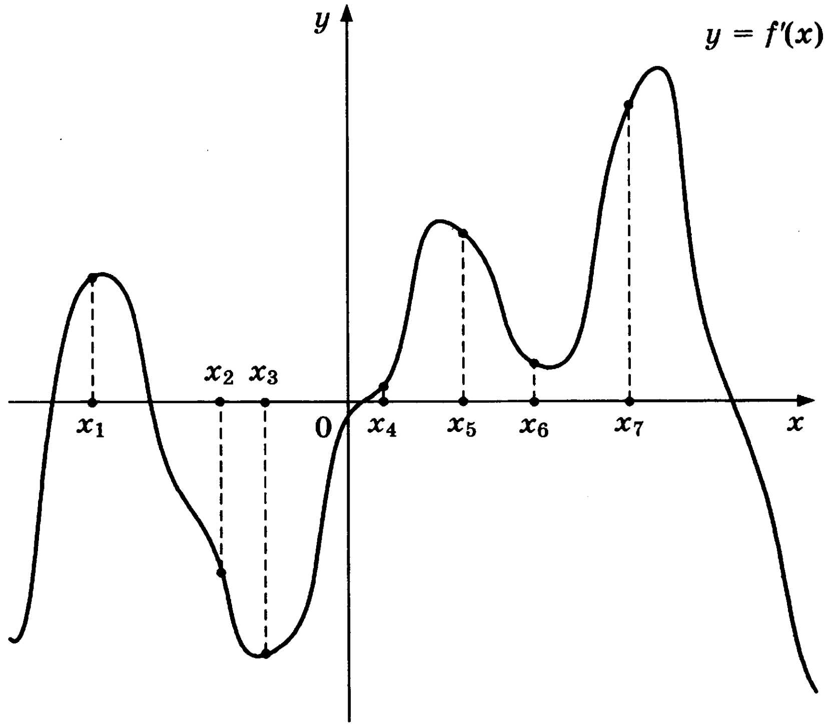
4. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{14+5x}=7$.

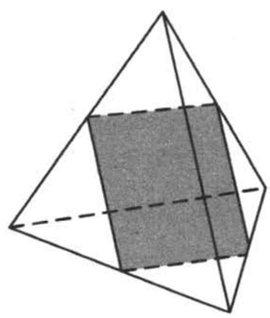
6. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120°, $AB = \sqrt{3}$. Найдите AC.



7. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



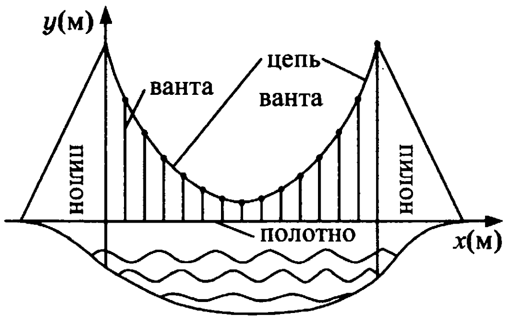
8. Рёбра правильного тетраэдра равны 14. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.



Часть 2

9. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi;\ 2\pi)$.

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0013x^2 - 0{,}35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении $1 : 3$, считая от вершины B.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

15. Решите неравенство $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \geq 0$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30°$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

18. Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4\log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log^2_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

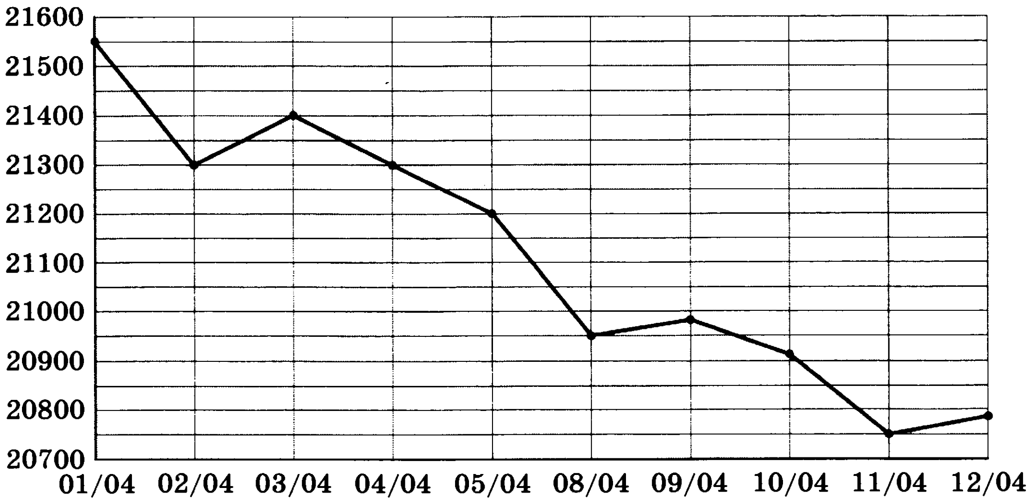
ВАРИАНТ 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

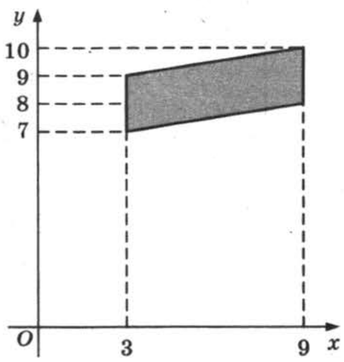
1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Какое наименьшее количество пачек нужно купить на все дни конференции?

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 1 по 12 апреля 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена олова в долларах США за тонну. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку наименьшую цену олова на момент закрытия торгов за данный период. Ответ дайте в долларах США за тонну.

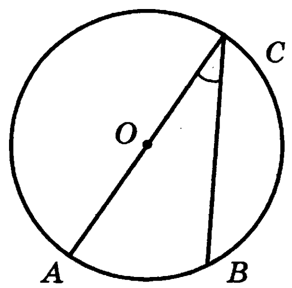
3. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (3; 7), (9; 8), (9; 10), (3; 9).



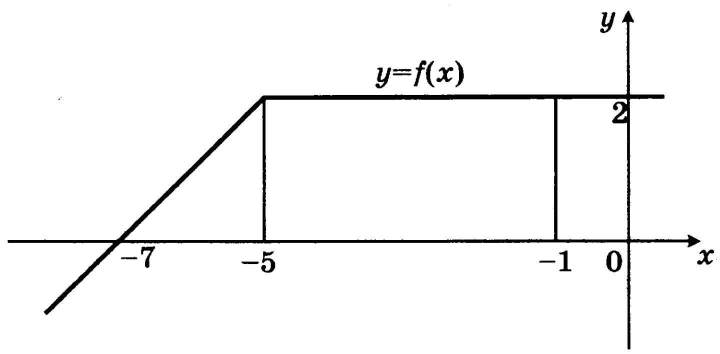
4. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

5. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

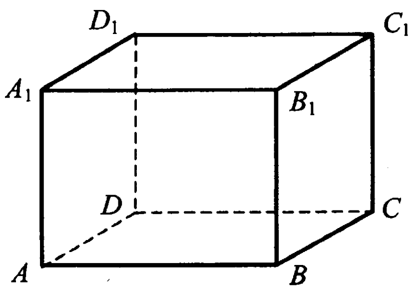
6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $1/5$ окружности. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, найдите интеграл $\int_{-7}^{-1} f(x)dx$.



8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C, C_1 и A.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3{,}5$.

10. Зависимость температуры (в кельвинах) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 11\operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

15. Решите неравенство $4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \le 0$.

16. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

19. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

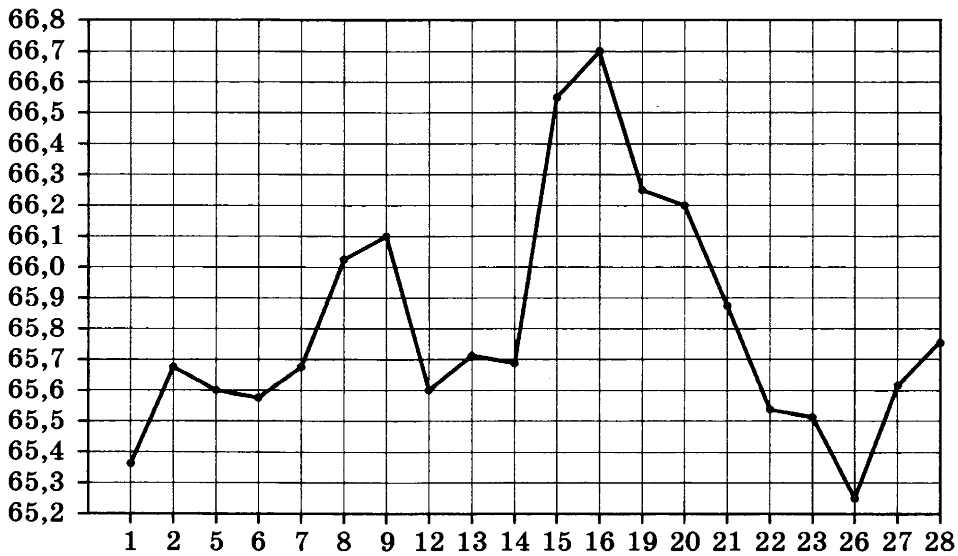
ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

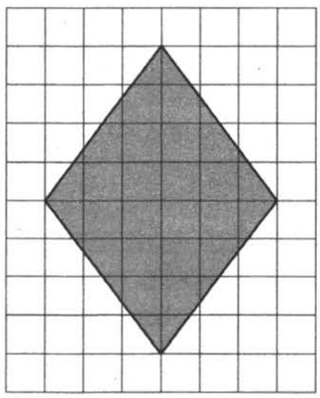
1. В университетскую библиотеку привезли новые учебники для трёх курсов, по 130 штук для каждого курса. В книжном шкафу 5 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Какое наименьшее количество шкафов потребуется, чтобы в них разместить все новые учебники?

2. На рисунке жирными точками показан курс доллара США, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 28 февраля 2019 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линиями.



Определите по рисунку наибольший курс доллара в период с 1 по 14 февраля. Ответ дайте в рублях.

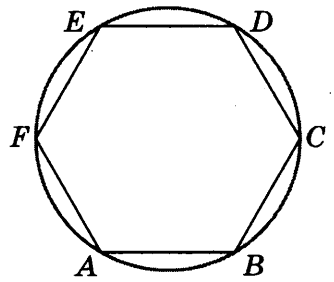
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



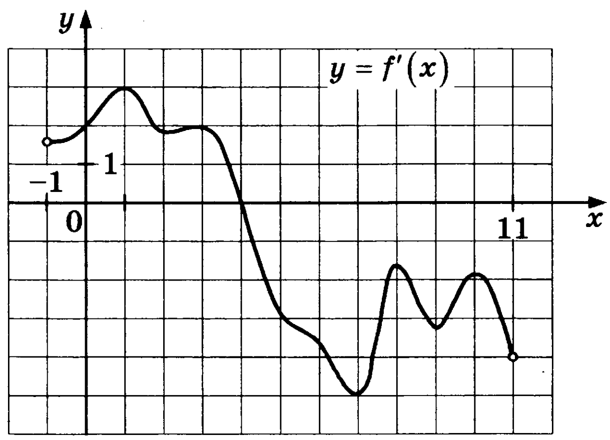
4. Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры состоят из двух повторяющихся групп по 2 различные цифры, например 0404 или 5252?

5. Решите уравнение $\frac{x+4}{5x+9} = \frac{x+4}{4x-5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

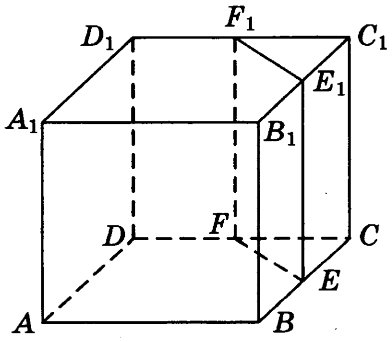
6. Периметр правильного шестиугольника равен 222. Найдите диаметр описанной окружности.



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 11)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[2; 8]$.



8. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 33. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $2\left(p(6x)-6p(x+5)\right)$, если $p(x)=x+2$.

10. Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением

$$v=\frac{0{,}0006\cdot\pi d\omega_{\text{двиг.}}}{kb},$$

где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 44 см. Водитель двигается на 3-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 3500 об/мин. Считайте, что $\pi = 3{,}14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

11. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 374 литра она заполняет на 5 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 462 литра?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 6\sin x + 12$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-1\right)\sqrt{64\pi^2-x^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-30; -20]$.

14. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Точка M — середина ребра B_1C_1, точка N лежит на ребре AC, причём $AN : NC = 8 : 1$. Катет AC втрое больше бокового ребра AA_1 призмы.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin\angle CBA = \frac{3}{5}$.

15. Решите неравенство $2x \geqslant \log_3\left(\frac{35}{2}\cdot 6^{x-1} - 3\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}\right)$.

16. Дан остроугольный треугольник ABC. Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M, а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N.

а) Докажите, что $2\angle CNM = \angle ABC$.

б) Найдите CN, если $AB = AC = 13$, $BC = 10$.

17. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 10 млн руб.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трёх корней.

19. Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 50 монет достоинством 1 дукат и 50 монет достоинством 3 дуката.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 20 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 40 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

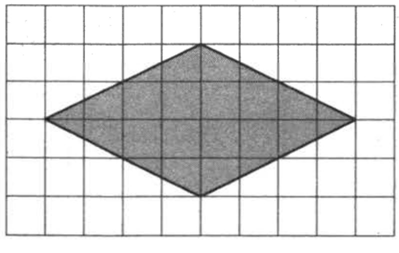
Часть 1

1. В университетскую библиотеку привезли новые учебники для двух курсов, по 110 штук для каждого курса. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 25 учебников. Какое наименьшее количество шкафов потребуется, чтобы в них разместить все новые учебники?

2. На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 28 февраля 2019 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линиями.

Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим курсом евро за этот период. Ответ дайте в рублях.

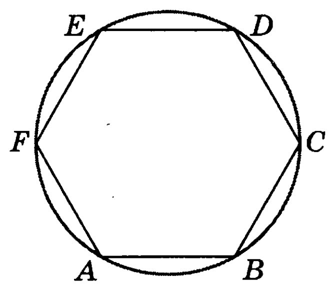
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



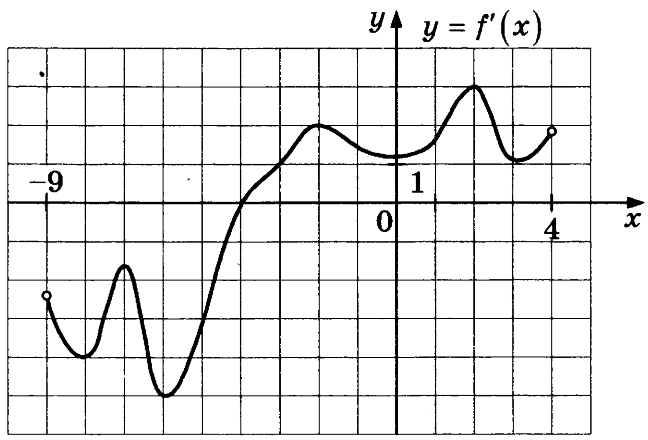
4. Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд в порядке возрастания, например 0123 или 4567?

5. Решите уравнение $\frac{x-7}{7x+9}=\frac{x-7}{x-3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

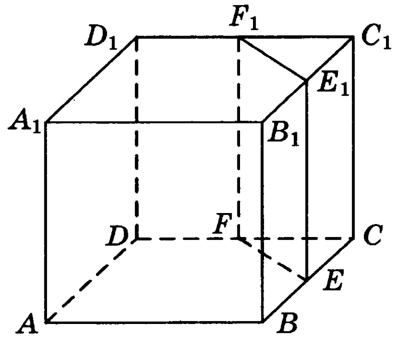
6. Периметр правильного шестиугольника равен 150. Найдите диаметр описанной окружности.



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;\ 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-5;\ 3]$.



8. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 19. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $4p(x-4)-p(4x)$, если $p(x)=2x+5$.

10. Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением

$$v=\frac{0{,}0006\cdot\pi d\omega_{\text{двиг.}}}{kb},$$

где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 58 см. Водитель двигается на 2-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 3000 об/мин. Считайте, что $\pi = 3{,}14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

11. Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 594 литра она заполняет на 5 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 648 литров?

12. Найдите наименьшее значение $y = 2x - 2\sin x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-3\right)\sqrt{x^2-36\pi^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [15; 20].

14. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Точка M — середина ребра B_1C_1, точка N лежит на ребре AC, причём $AN : NC = 15 : 1$. Катет AC в четыре раза больше бокового ребра AA_1 призмы.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\cos\angle CBA=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

15. Решите неравенство $2x \geqslant \log_5\left(29 \cdot 10^{x-1} - 4^x\right)$.

16. Дан остроугольный треугольник ABC. Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M, а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N.

а) Докажите, что $\angle CNM = \angle MBC$.

б) Найдите CN, если $AB = AC = 15$, $BC = 18$.

17. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 10 млн руб.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 + 4x^3 + 4ax - 16x - 16 + 8a - a^2 = 0$$

имеет не менее трёх корней.

19. Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 60 монет достоинством 1 дукат и 60 монет достоинством 5 дукатов.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 18 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 40 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

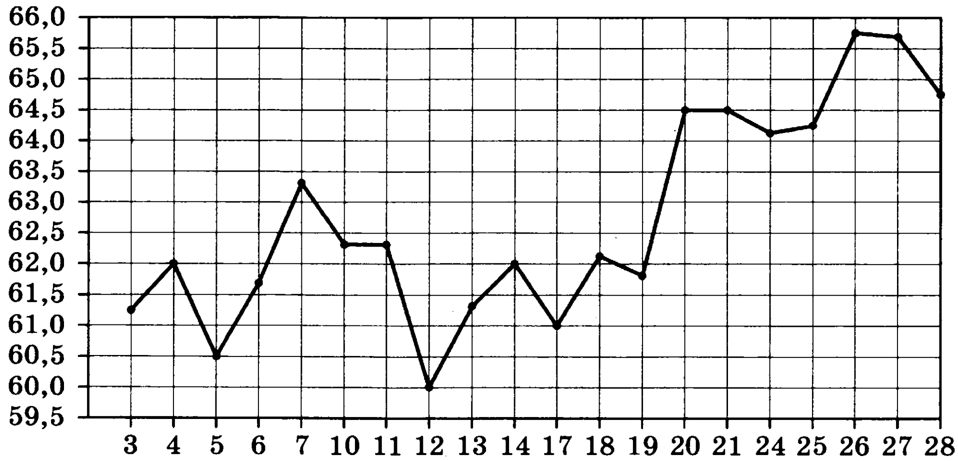
ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

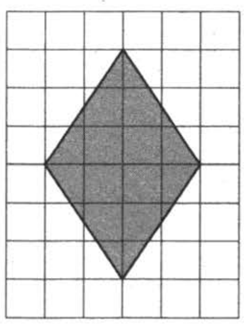
1. В университетскую библиотеку привезли новые учебники для двух курсов, по 145 штук для каждого курса. В книжном шкафу 8 полок, на каждой полке помещается 20 учебников. Какое наименьшее количество шкафов потребуется, чтобы в них разместить все новые учебники?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 28 июня 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в период с 10 по 24 июня (в долларах США).

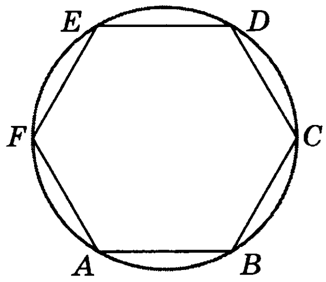
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



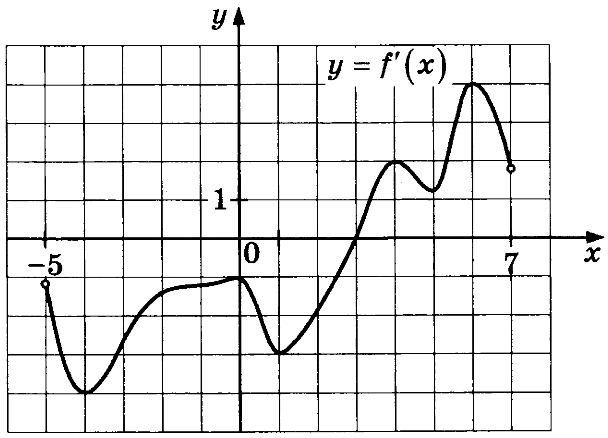
4. Клиент получает в банке кредитную карту. Три последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания, например 876 или 432?

5. Решите уравнение $\frac{x-1}{6x+11}=\frac{x-1}{5x+3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

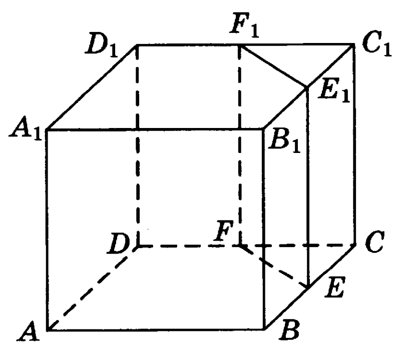
6. Периметр правильного шестиугольника равен 24. Найдите диаметр описанной окружности.



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-3;\ 5]$.



8. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 47. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите $p(x)+p(-20-x)$, если $p(x)=\dfrac{x(-20-x)}{x+10}$ при $x \neq -10$.

10. Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{двиг.}$ (об/мин) связаны соотношением

$$v=\frac{0{,}0006\cdot \pi d\omega_{двиг.}}{kb},$$

где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 56 см. Водитель двигается на 1-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 4000 об/мин. Считайте, что $\pi = 3{,}14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

11. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 588 литров она заполняет на 7 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 728 литров?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - 10\sin x + 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-1\right)\sqrt{x^2-64\pi^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [25; 30].

14. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Точка M — середина ребра B_1C_1, точка N лежит на ребре AC, причём $AN : NC = 3 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin\angle CBA=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

15. Решите неравенство $2x \geqslant \log_2\left(\frac{35}{3}\cdot 6^{x-1} - 2\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}\right)$.

16. Дан остроугольный треугольник ABC. Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M, а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N.

а) Докажите, что $2\angle BMN = \angle ACB$.

б) Найдите BM, если $AB = AC = 5$, $BC = 6$.

17. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 9 млн руб.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трёх корней.

19. Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 40 монет достоинством 1 дукат и 40 монет достоинством 5 дукатов.

а) Получится ли поделить все деньги поровну между 16 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все деньги поровну между 30 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

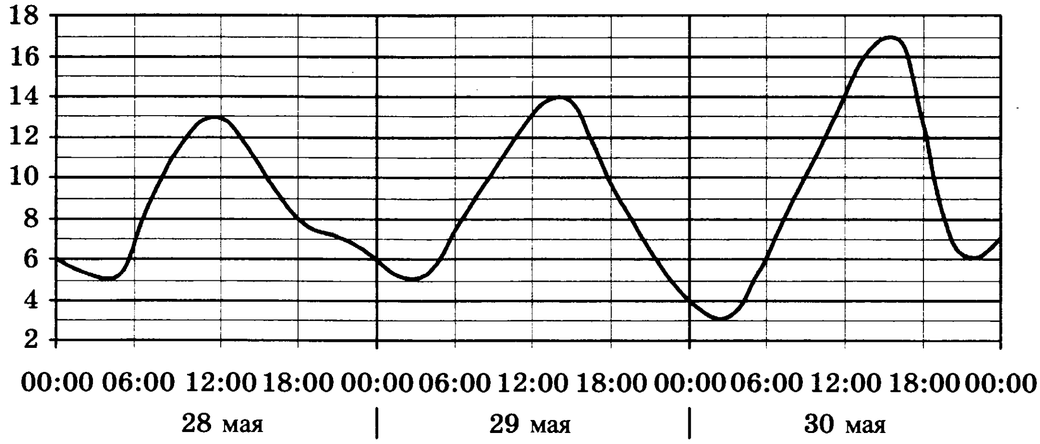
ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

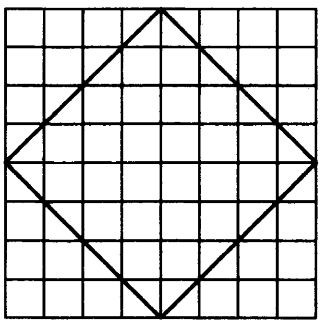
Часть 1

1. Розничная цена учебника 125 рублей, она на 25% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5800 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 29 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



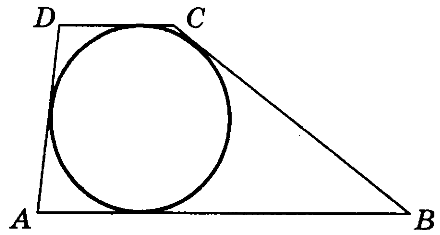
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



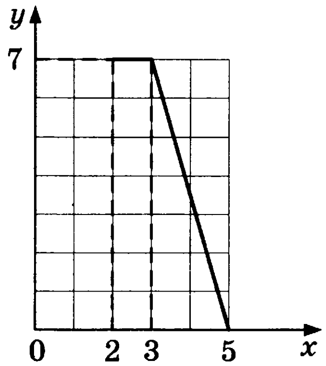
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(14-x)=2\log_3 5$.

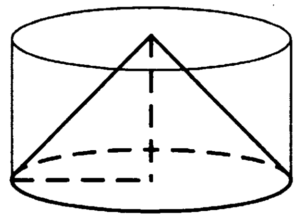
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 13 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $80\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{96}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{6}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}8$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 6{,}3\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 28 350 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2(x-10)+8$ на отрезке $[-14; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin\frac{5\pi}{6}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды $MCKL$, если $AB = 4$.

15. Решите неравенство $0{,}25^{-\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 14^x \cdot x^{-2} \leqslant \frac{2^{-\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 112^x}{4x^2}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 10$.

17. Клиент банка планирует взять 15 августа кредит на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 25% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 2160.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

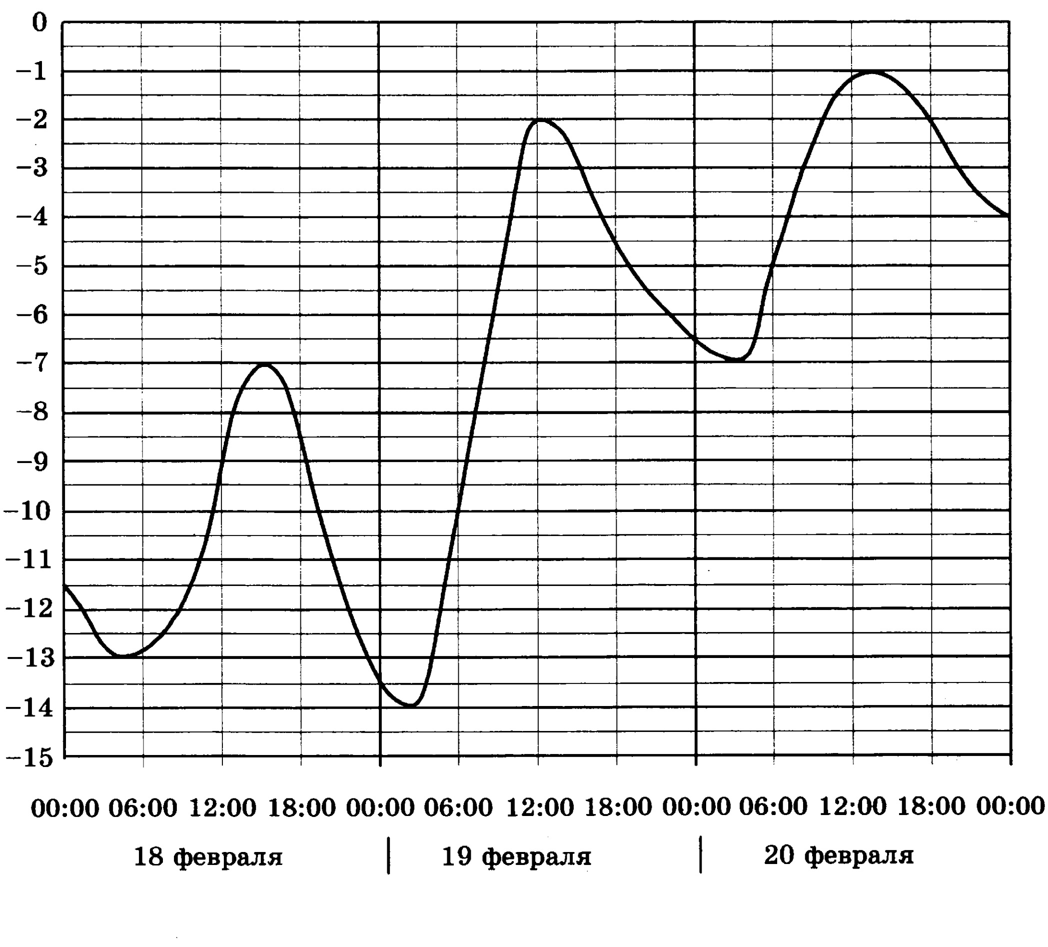
ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

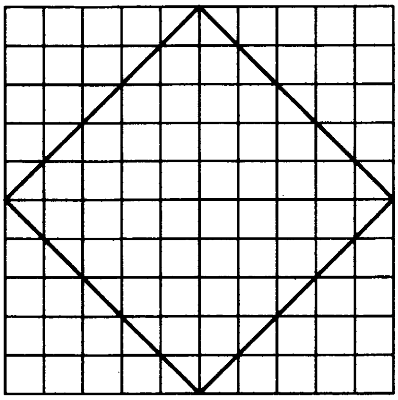
Часть 1

1. Розничная цена учебника 115 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5000 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 18 февраля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



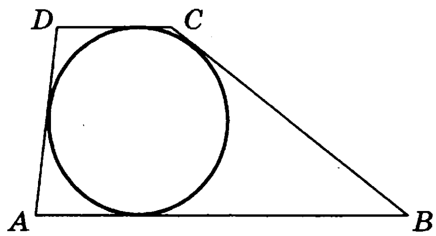
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



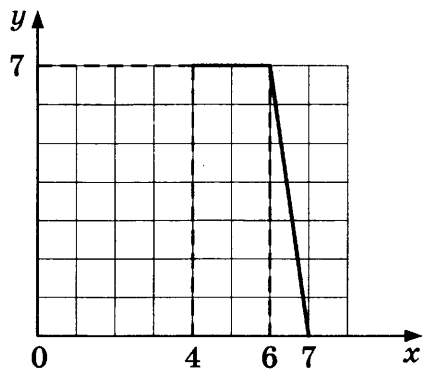
4. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 75% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(15 - 5x) = 3\log_3 5$.

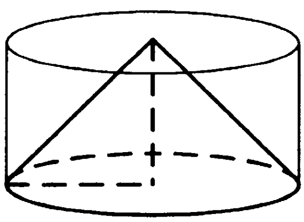
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 12 и 2. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $41\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{72}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1$ атмосфера, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 18{,}3\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 21 960 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 21 рабочий. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 5 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+5)^2(x-1)+7$ на отрезке $[-17; -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos\pi$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости α, если $AB = 9$.

15. Решите неравенство $0{,}25^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 30^x\cdot x^{-2}\leqslant\frac{16^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 15^x}{8x^2}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 1$.

17. Клиент банка планирует взять 15 августа кредит на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 33% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax + 3)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6750.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

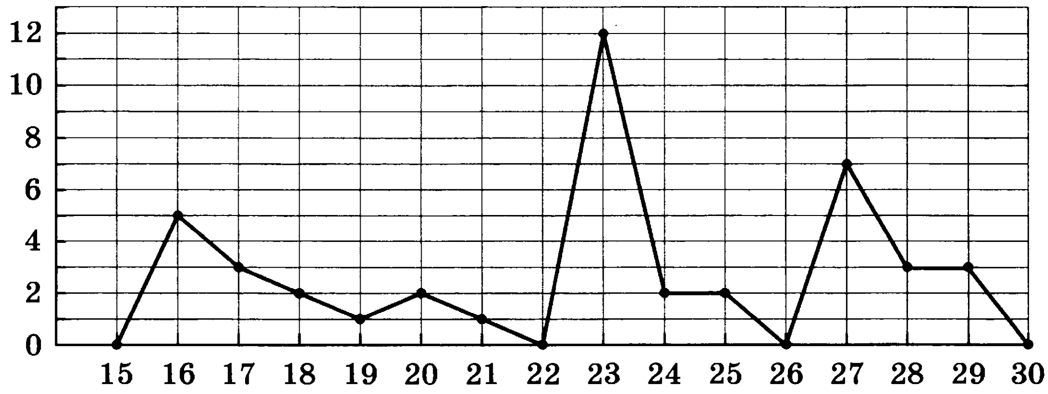
ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

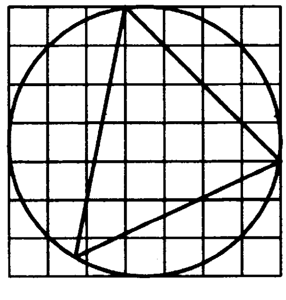
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 19 125 человек, что составляет 51% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Магадане с 15 по 30 июня 2019 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков, выпавшее в Магадане в период с 24 по 30 июня. Ответ дайте в миллиметрах.



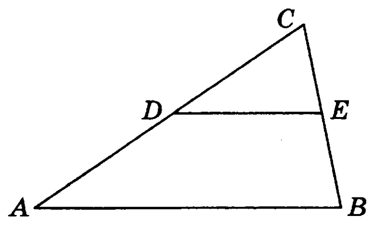
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



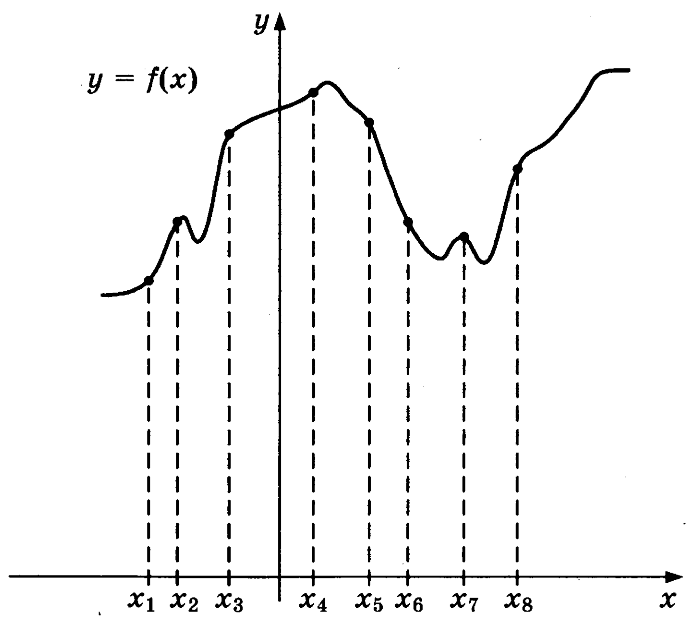
4. Монету бросают 10 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно пять раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно семь раз»?

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_4(9x+9)} = 6$.

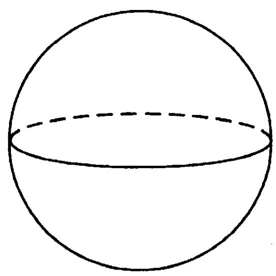
6. Площадь треугольника ABC равна 40, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 16. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $5\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 10$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 16,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 63 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 168 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 174 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 15 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2-16x+67}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4^x-5\right)^2+2\cdot4^x=9\left|4^x-5\right|$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0; 1].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-3)}\frac{x}{10}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 5\sqrt{2}$.

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 17% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{2\pi ax-4x^2}+\cos 2\sqrt{2\pi ax-4x^2}=0$$

имеет ровно два решения.

19. У Вити нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Витя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Витя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 5 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?

б) Мог ли Витя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 6 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?

в) Сначала у Вити были вёдра объёмами 2 литра и 4 литра, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что Витя сможет получить через несколько шагов ровно 3 литра воды в одном из вёдер?

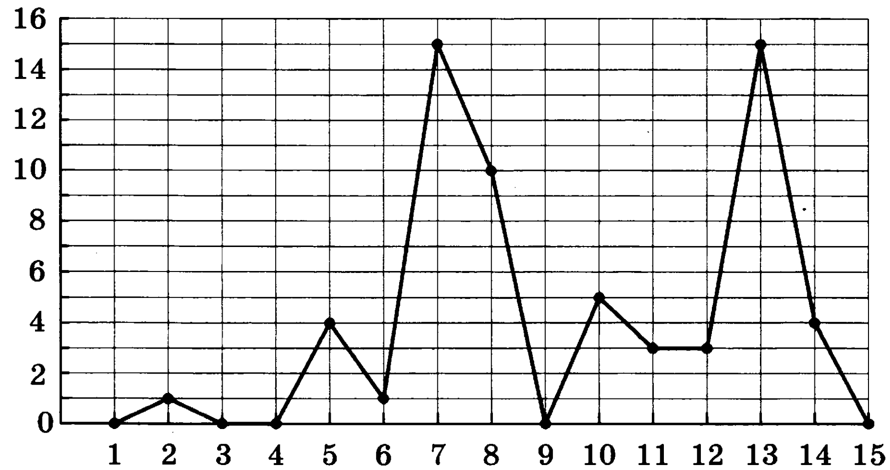
ВАРИАНТ 10

> Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

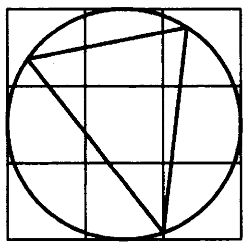
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 17 955 человек, что составляет 63% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Калининграде с 1 по 15 июня 2019 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков, выпавшее в Калининграде в период с 1 по 15 июня. Ответ дайте в миллиметрах.



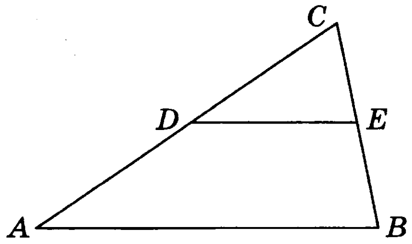
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



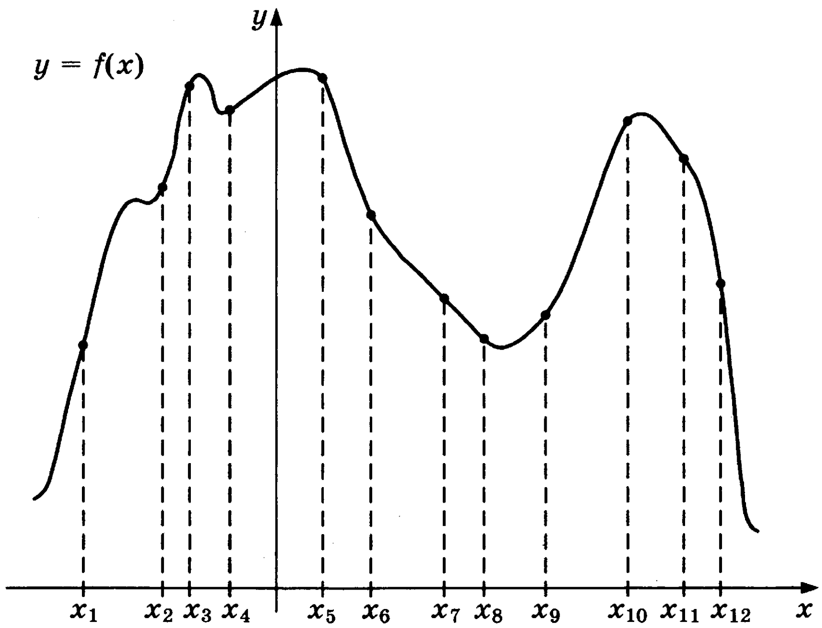
4. Монету бросают 8 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно шесть раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно один раз»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_{81}(8x+8)} = 4$.

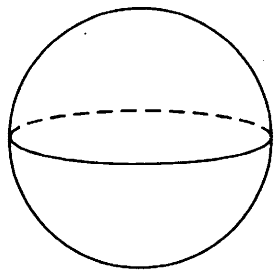
6. Площадь треугольника ABC равна 36, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, ... , x_{12}. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 80. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 35 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 86 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 344 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 4^{x^2-14x+50}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|=15-2\cdot3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и COпересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что Боря сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?

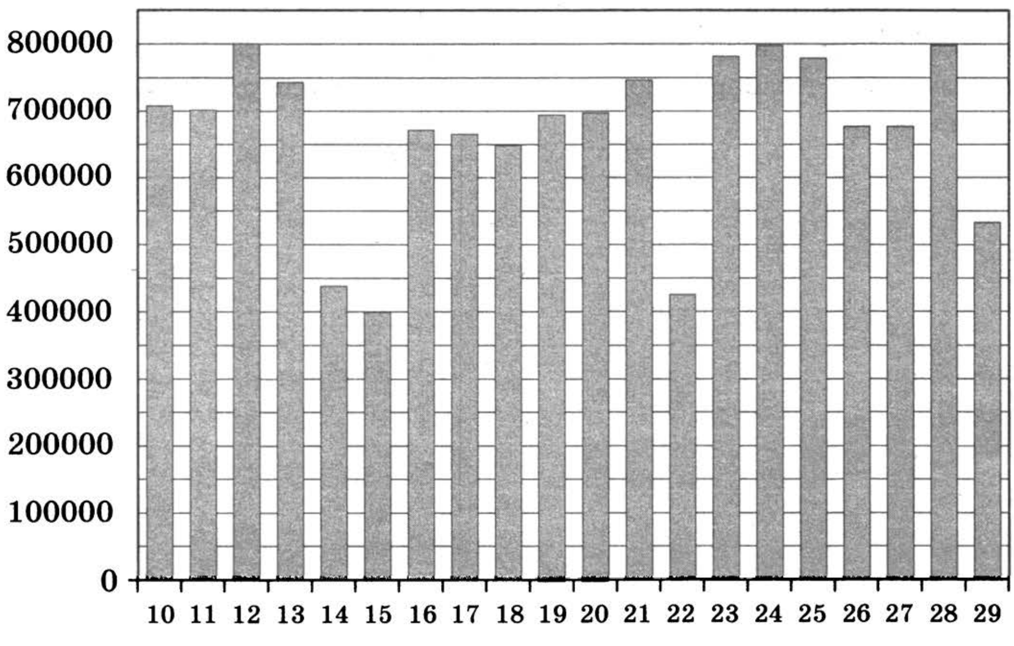
ВАРИАНТ 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

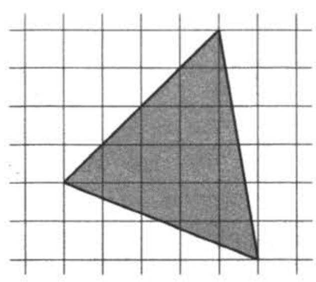
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 37 дюймам. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, каково наименьшее суточное количество посетителей сайта РИА Новости в период с 16 по 21 ноября.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

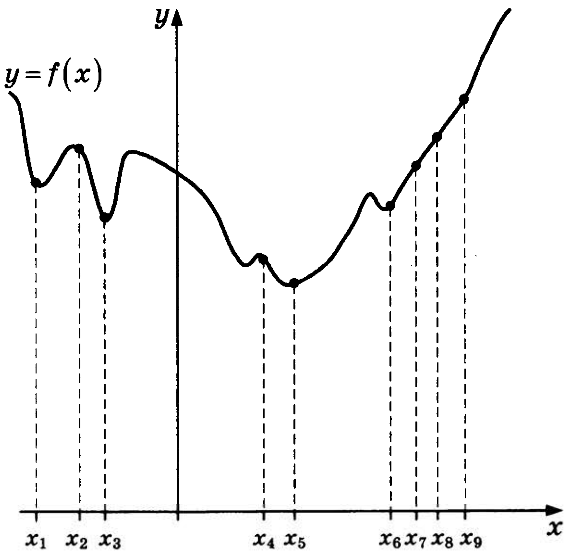


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что одновременно хотя бы на одном кубике выпало число 1 и ни на одном кубике не выпало число 6.

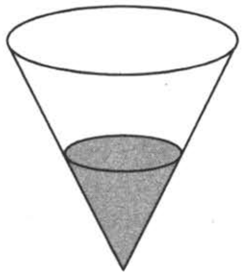
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9^x$.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 15$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(246^2 - 17^2) : 263$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?

11. Если смешать 29-процентный раствор кислоты и 33-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 19-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 39-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 29-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 121}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin x+\sqrt{\frac{3}{2}(1-\cos x)}=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 1 : 3$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC=8\sqrt{3}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(6x^2-6x+a^2+6\right)^2=24a^2\left(x^2-x+1\right)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=5a_{k+1}-a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $3a_n=4a_2-a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 283$?

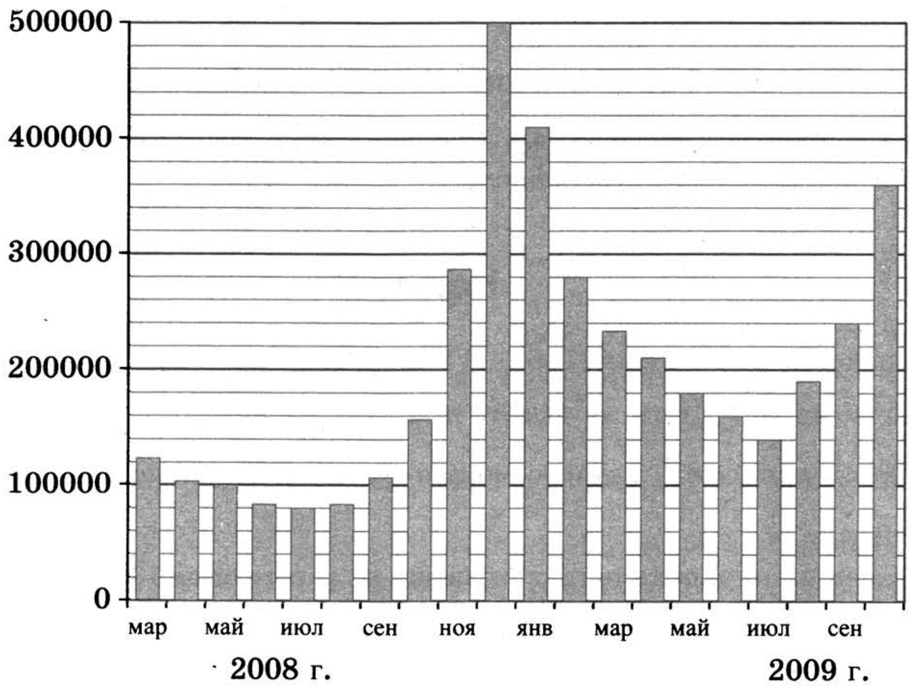
ВАРИАНТ 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

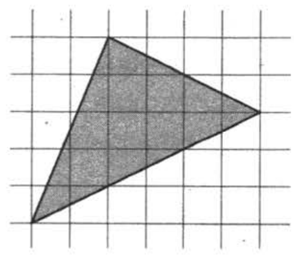
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 35 дюймам. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наименьшее месячное количество запросов со словом СНЕГ с января по октябрь 2009 года.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

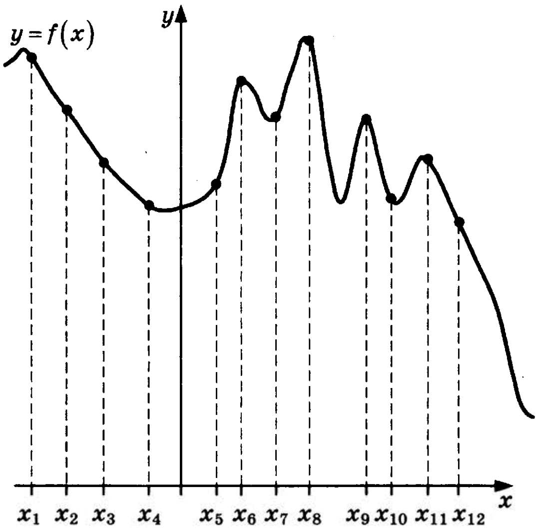


4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9. Результат округлите до тысячных.

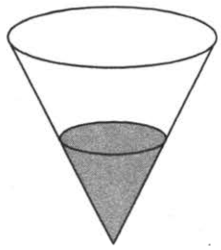
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{18-3x} = 64^x$.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{\sqrt{3}}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$ высоты. Объём жидкости равен 5 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(168^2 - 11^2) : 179$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 8 километров?

11. Если смешать 54-процентный раствор кислоты и 61-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 46-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 56-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 54-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 196}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos x = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 2 : 3$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 2 : 1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt[3]{8^{5x+3}} < \sqrt{\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{2x+1}{x}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC = 4\sqrt{6}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 7 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(2x^2+x+3a^2+5\right)^2 = 12a^2\left(2x^2+x+5\right)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $2a_{k+2} = 3a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 2a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 286$?

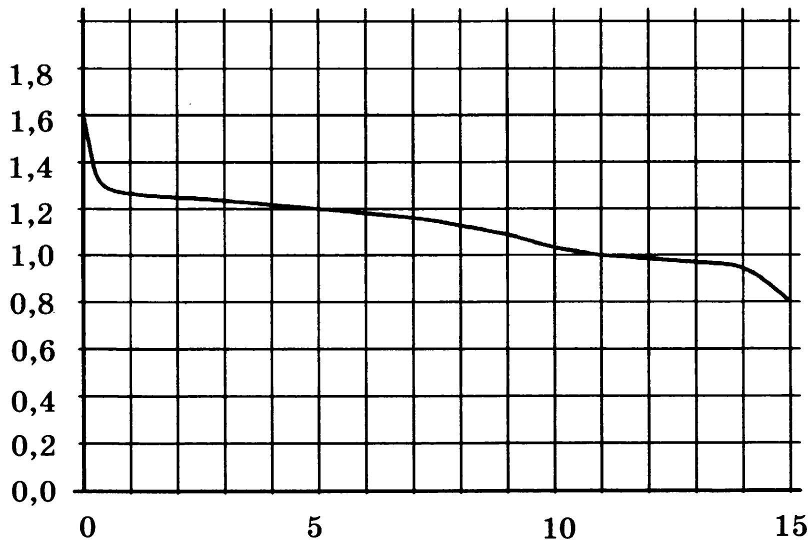
ВАРИАНТ 13

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

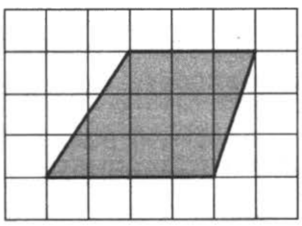
Часть 1

1. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 18 рублей. Если на счету осталось меньше 18 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

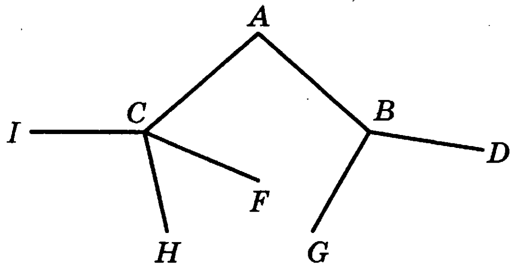
2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

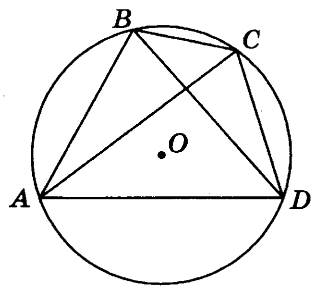


4. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.

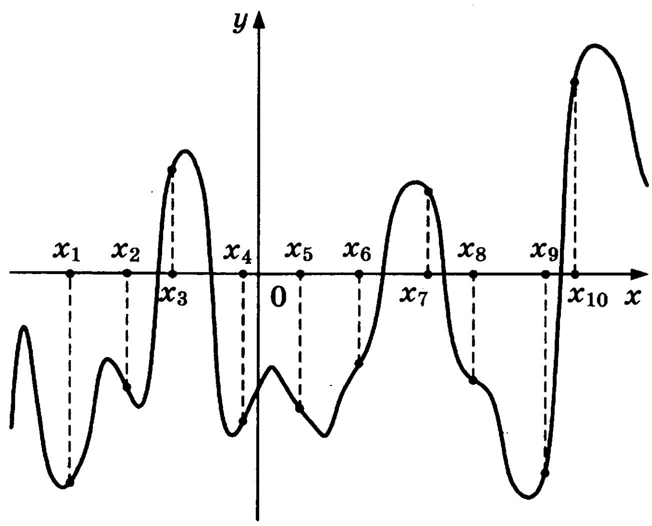


5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5 - x) = -2$.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 132°, угол ABD равен 61°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна?



8. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в кельвинах) КПД этого двигателя будет 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 13x - 13\text{tg}\, x - 18$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

15. Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150°$.

17. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t}=2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

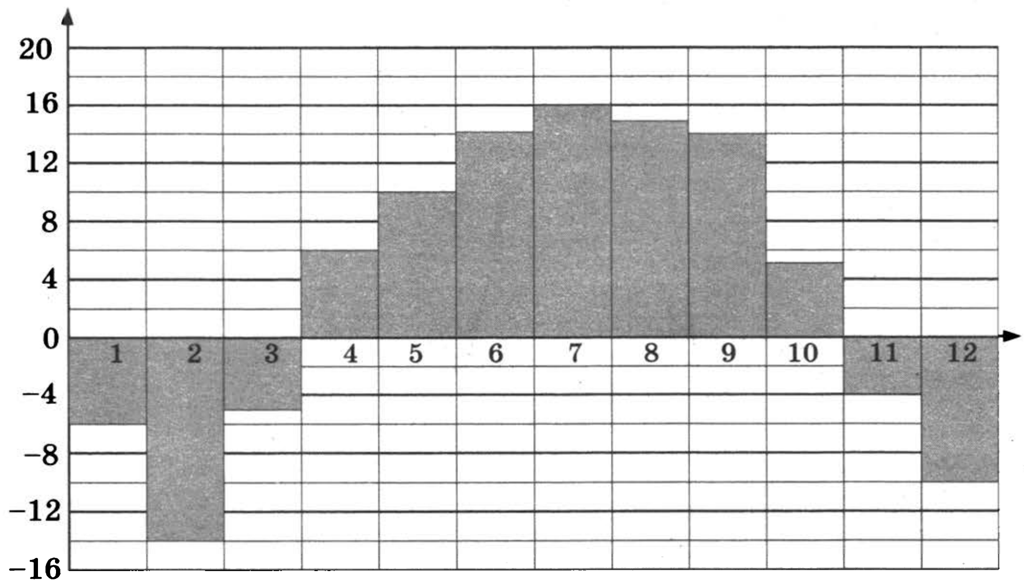
ВАРИАНТ 14

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

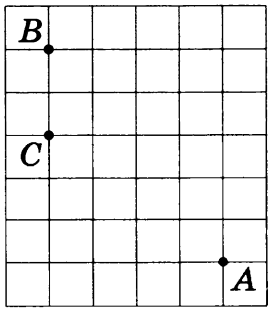
Часть 1

1. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 590 рублей, а стоимость одного номера журнала — 26 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



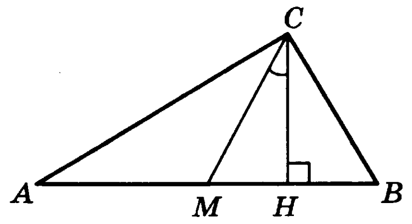
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.



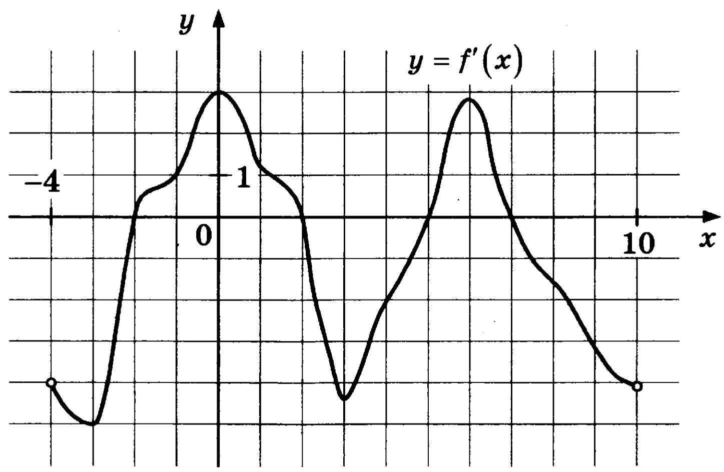
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(2-x)=2$.

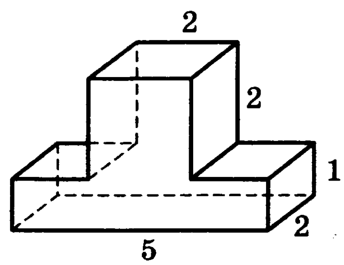
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x+16$ или совпадает с ней.



8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

11. Игорь и Паша могут покрасить забор за 30 часов. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 36 часов, а Володя и Игорь — за 45 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

12. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 14x + 20\ln x - 6$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi;\ 3\pi]$.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.
а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45°.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 10

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|=15-2\cdot 3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|+6\left(3^x-6\right)+21=0.$$

Пусть $3^x-6=t$.

а) При $t\geqslant 0$ получаем $t^2-10t+21=0$, откуда $t=3$ или $t=7$, следовательно, $x=2$ или $x=\log_3 13$.

При $t<0$ получаем $t^2+22t+21=0$, откуда $t=-1$ или $t=-21$, следовательно, $x=$ $=\log_3 5$.

б) Поскольку $1=\log_3 3<\log_3 5<\log_3 9=2<\log_3 13$, отрезку [1; 2] принадлежат только корни $\log_3 5$, 2.

Ответ: а) $\log_3 5$, 2, $\log_3 13$; **б)** $\log_3 5$, 2.

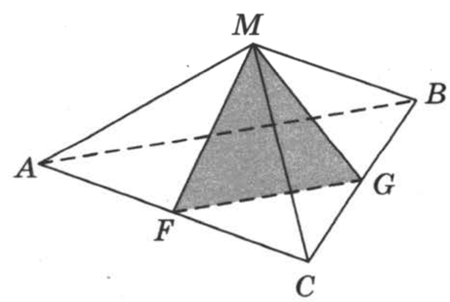
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

Решение.



а) Обозначим F и G середины сторон AC и BC соответственно (см. рисунок).

Из условия следует, что треугольник AMC прямоугольный с прямым углом при вершине M. Поскольку пирамида правильная, все боковые грани — прямоугольные равнобедренные треугольники. Отрезок

MF — медиана прямоугольного треугольника AMC, проведённая к гипотенузе, поэтому $MF=\frac{6}{2}=3$. Аналогично, $MG = 3$. Кроме того, $FG = 3$, поскольку FG — средняя линия равностороннего треугольника ABC со стороной 6. Таким образом, все стороны треугольника FMG равны.

б) Искомое расстояние r найдём как высоту треугольной пирамиды $CMFG$, считая основанием сечение MFG. Объём этой пирамиды равен четверти объёма пирамиды $MABC$:

$$V_{CMFG}=\frac{1}{4}V_{MABC}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot AM\cdot BM\cdot CM=\frac{1}{24}\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

С другой стороны, $V_{CMFG}=\frac{1}{3}S_{MFG}\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\cdot r=\frac{3r\sqrt{3}}{4}$.

Получаем: $\frac{3r\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$, откуда $r=\sqrt{6}$.

Ответ: б) $\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}}\geqslant-1$.

Решение.

Перейдём к десятичным логарифмам:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}}\geqslant-1;\quad \begin{cases}\frac{\lg(x-1)+\lg\frac{x}{6}}{\lg\frac{x}{6}}\geqslant 0,\\ x\neq 2\end{cases};$$

$$\begin{cases}\frac{\lg(x-1)\frac{x}{6}}{\lg\frac{x}{6}}\geqslant 0,\\ x\neq 2\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{(x-1)\frac{x}{6}-1}{\frac{x}{6}-1}\geqslant 0,\\ x\neq 2,\\ x>1\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{(x-1)x-6}{x-6}\geqslant 0,\\ x\neq 2,\\ x>1\end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x+3)}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2; \\ 2 < x \leqslant 3; \\ x > 6. \end{array} \right.$$

Ответ: (1; 2), (2; 3], (6; $+\infty$).

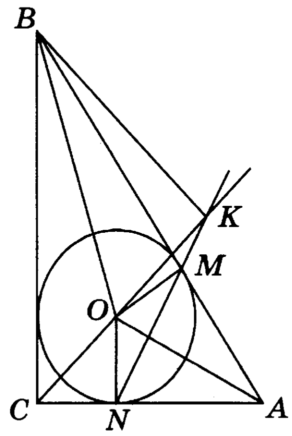
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

Решение.



а) Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения его биссектрис, поэтому лучи BO и CO — биссектрисы углов ABC и ACB.

Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAC = 90° - 2\alpha$. Из равнобедренного треугольника AMN находим, что

$$\angle ANM = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180° - (90° - 2\alpha)) = 45° + \alpha.$$

По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle CKN = \angle ANM - \angle NCK = 45° + \alpha - 45° = \alpha = \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Что и требовалось доказать.

б) Пусть r — радиус вписанной окружности. Треугольник CKN подобен треугольнику CBO. Следовательно,

$$\frac{BC}{CK} = \frac{CO}{CN} = \frac{r\sqrt{2}}{r} = \sqrt{2}, \; CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 3.$$

Из треугольника CBK по теореме косинусов находим

$$BK^2 = CB^2 + CK^2 - 2CB \cdot CK \cos\angle KCB = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45° = 3^2.$$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 14%, то есть увеличивается в 1,14 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}14^2 S = 1{,}2996S.$$

Аналогично, сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}2996S;$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right) > \frac{1{,}2996}{10800} = 1{,}203\ldots.$$

При $n = 21$ неравенство

$$1{,}21 > 1{,}203\ \ldots$$

верно, а при $n = 20$ неравенство

$$1{,}20 > 1{,}203\ \ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 21.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax-x^2-\pi^2}+\cos 2\sqrt{ax-x^2-\pi^2}=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Сделаем замену $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$. Получаем:

$$\sin y+\cos 2y=0; \qquad 2\sin^2 y-\sin y-1=0,$$

откуда $\sin y=1$ или $\sin y=-\frac{1}{2}$.

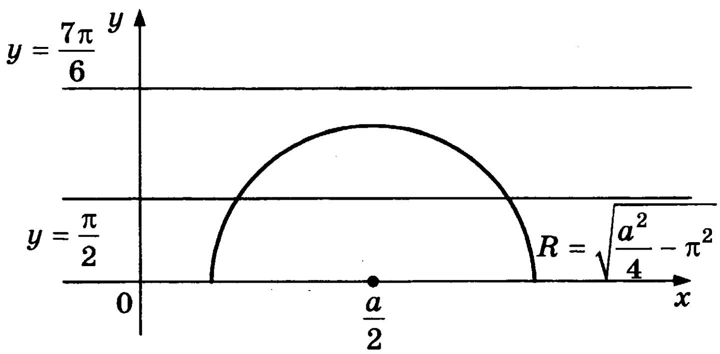
Тогда $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $y=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ или $y=\frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

При $y\geqslant 0$ на координатной плоскости эти уравнения определяют множество горизонтальных прямых. Две самые близкие к оси абсцисс прямые имеют уравнения $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{7\pi}{6}$.

Уравнение $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$ запишем в виде

$$y=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Получилось уравнение полуокружности радиусом $\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2}$ с центром, лежащим на оси абсцисс.



Данное уравнение имеет ровно два решения, если полуокружность пересекает прямую $y=\frac{\pi}{2}$, но не имеет общих точек с прямой $y=\frac{7\pi}{6}$. Запишем и решим неравенство:

$$\frac{\pi}{2}<\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2}<\frac{7\pi}{6};\ \frac{\pi^2}{4}<\frac{a^2}{4}-\pi^2<\frac{49\pi^2}{36};\ 5\pi^2<a^2<\frac{85\pi^2}{9},$$

откуда $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?

Решение.

а) Пусть запись (k, l, m) означает, что в ведрах объёмами 4, 7 и 8 литров находится k, l и m литров воды соответственно. Тогда Боря мог действовать так, чтобы объёмы воды в вёдрах были последовательно (4, 7, 0), (0, 7, 4), (0, 3, 8), (3, 0, 8), (3, 7, 1), (4, 6, 1), (0, 6, 5) и (4, 2, 5). Во втором ведре после нескольких шагов оказалось 2 литра воды.

б) После каждого переливания либо одно из вёдер становится пустым, либо одно из вёдер становится полным. Если во всех вёдрах оказались равные объёмы воды, то в каждом из них по 4 литра. Значит, ни одно из вёдер не пусто и не полно. Пришли к противоречию.

в) Если $n \geqslant 9$, то объём третьего ведра не меньше, чем общий объём воды у Бори. В этом случае все возможные записи состояний объёмов воды в вёдрах это (3, 6, 0), (0, 6, 3), (3, 0, 6), (0, 3, 6), (3, 3, 3) и (0, 0, 9). Получить другое состояние невозможно, так как в вёдрах всегда оказываются объёмы воды в литрах, кратные 3.

Приведём пример последовательных состояний для подходящих под условие переливаний в случае $n = 8$: (3, 6, 0), (3, 0, 6), (1, 0, 8), (1, 6, 2), (3, 4, 2).

Этот пример показывает, что наибольшее натуральное значение может принимать n — это 8.

Ответ: а) Да. **б)** Нет. **в)** 8.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	0,58	−0,4	122	0,25	4	2	2	140	−17

13	а) $2 \pm \sqrt{5}$; б) $2 - \sqrt{5}$
14	0,5
15	$(-\infty; 1], (2; 3)$
16	98
17	44 000 рублей
18	$\frac{1}{2} < k < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ или $k > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$
19	а) 7; б) 5002; в) 5054

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
63	28	17	0,505	7	1	5	49	−0,75	17,67	21	−2

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^{m+1} \arcsin\frac{2}{3} + \pi m$, n, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi - \arcsin\frac{2}{3}$, $\pi + \arcsin\frac{2}{3}$
14	б) 3 : 4
15	$(-\infty; 2]; [3; +\infty)$
16	19
17	2 034 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$
19	а) например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	20750	12	0,5	2	36	10	160	2	25	6	16

13	а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$
14	192
15	$[-2; 2]$
16	4 : 21
17	3
18	$a = 2$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	66,1	24	0,009	−4	74	4	264	−80	58	22	12

13	а) $\pm 8\pi$; $-\frac{47\pi}{6}+\pi k$, $-\frac{43\pi}{6}+\pi k$, $k = 0, \ldots, 15$; б) -8π; $-\frac{47\pi}{6}$; $-\frac{43\pi}{6}$; $-\frac{41\pi}{6}$
14	б) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{37}}{37}$
15	$\left(\log_{\frac{3}{2}}\frac{18}{35}; -1\right]$; $[2; +\infty)$
16	б) $6\sqrt{13}$
17	5 млн рублей
18	$0 \leqslant a \leqslant 10$
19	а) да; б) нет; в) 26

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1,2	16	0,0007	7	50	−4	152	−17	45	27	7

13	а) $\pm 6\pi$, $-\frac{17\pi}{3}-\pi n$; $-\frac{16\pi}{3}-\pi n$; $\frac{16\pi}{3}+\pi n$; $\frac{17\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{N}$; б) 6π; $\frac{19\pi}{3}$
14	б) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{17}}{17}$
15	$\left(\log_{\frac{5}{2}}\frac{10}{29}; -1\right]$; $[1; +\infty)$
16	б) $12\sqrt{5}$
17	5 млн рублей
18	$0 < a \leqslant 4$
19	а) да; б) нет; в) 16

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4,5	12	0,008	1	8	3	376	0	31	28	1

13	а) $\pm 8\pi$, $-\frac{47\pi}{6}-\pi n$; $-\frac{43\pi}{6}-\pi n$; $\frac{43\pi}{6}+\pi n$; $\frac{47\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{N}$; б) 8π; $\frac{49\pi}{6}$; $\frac{53\pi}{6}$; $\frac{55\pi}{6}$
14	б) $45°$
15	$(-\infty; -1]$; $\left[2; \log_{\frac{2}{3}}\frac{12}{35}\right)$
16	б) $4\sqrt{5}$
17	4 млн рублей
18	$0 \leqslant a \leqslant 5$
19	а) да; б) нет; в) 11

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
58	4	4	0,97	−11	7	14	160	18	14,4	7	8

13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$
14	б) 4
15	$(-2; 0)$; $\left(0; \frac{2}{3}\right]$; $[1; +\infty)$
16	$6\sqrt{13}$
17	2,5
18	$\frac{4}{9} < a < 1$
19	а) нет; б) нет; в) да, например, 1, 3, 9, 16, 5

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	−13,5	5	0,94	−22	7	17,5	82	10	4	20	7

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{4}$
14	б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
15	$(-\infty; -4]$; $[-3; 0)$; $(0; 2)$
16	$\frac{3\sqrt{13}}{5}$
17	3
18	$\sqrt[3]{2,25} < a < 4$
19	а) нет; б) нет; в) да, например, 1, 5, 25, 2, 27

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37 500	7	3,5	2,1	3	30	5	4	1,25	2,5	72	8

13	а) 1; $\log_4 7$; $\log_4 10$; б) 1
14	б) $\sqrt{2}$
15	(3; 4); (4; 5]; (10; $+\infty$)
16	5
17	26
18	$\left(-2; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right)$
19	а) да; б) нет; в) 5

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28 500	15	1,5	3,5	31	27	6	20	−2	4	90	4

13	а) $\log_3 5$, 2, $\log_3 13$; б) $\log_3 5$, 2
14	б) $\sqrt{6}$
15	(1; 2), (2; 3], (6; $+\infty$)
16	3
17	21
18	$-\frac{\sqrt{85}\pi}{3} < a < -\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi < a < \frac{\sqrt{85}\pi}{3}$
19	а) да; б) нет; в) 8

Вариант 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
94	650 000	14	0,25	−3	12	4	104	229	7	5	−11

13	а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{3}$; -6π
14	б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{59}}$
15	$-5 < x < -1, x > \frac{3}{2}$
16	$16\sqrt{7}$
17	118
18	$a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 257, 321, 337, 341; б) нет; в) 3

Вариант 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
89	140 000	12	0,116	−6	4	8	315	157	16	20	−14

13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{25\pi}{6}$
14	б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$
15	$x<-1$, $-\frac{2}{5}<x<0$
16	$8\sqrt{14}$
17	116
18	$a=\pm\frac{\sqrt{26}}{4}$
19	а) например, последовательность 1, 49, 73, 85, 91, 94; б) нет; в) 2

Вариант 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0,8	10,5	0,25	−20	71	6	4	12	1000	40	−18

13	а) −4; 0; б) 0
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-6;-4],[4;+\infty)$
16	13
17	90 кг
18	$0\le k<\frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21}<k\le\frac{1}{3}$
19	а) да, например, числа 10, 11 и 15; б) нет; в) $\frac{25}{17}$

Вариант 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	5	4	0,25	−7	59	4	18	−4	4000	24	5

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	б) 36
15	$[-1;0)$
16	$\frac{63}{2}$
17	5
18	$1{,}5\le a\le 3$; $a\ge 6$
19	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8

Справочное издание

Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э.

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.НА34.Н08638 с 07.08.2018 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Шитикова, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова, Е. Ю. Лысова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 034-2014; 58.11.1 — книги печатные

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», 170546, Тверская область,
Промышленная зона Боровлево-1, комплекс № 3А,
www.pareto-print.ru.

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).