13
14
15
16
17
18
19

БАНК ЗАДАНИЙ

Ю. В. Садовничий

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

- *Необходимый теоретический материал*
- *Примеры с решениями*
- *Задачи для самостоятельного решения*
- *Ответы*

ЕГЭ

БАНК ЗАДАНИЙ ЕГЭ

Ю. В. Садовничий

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Задания для подготовки к ЕГЭ

Необходимый теоретический материал
Примеры с решениями
Задачи для самостоятельного решения
Ответы

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2020

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С14

Садовничий Ю. В.

С14 ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Задания с развернутым ответом / Ю. В. Садовничий. — М. : Издательство «Экзамен», 2020. — 654, [2] с. (Серия «ЕГЭ. Банк заданий»)

ISBN 978-5-377-15338-2

Задания по математике, аналогичные заданиям из банка заданий ЕГЭ.

Данная книга посвящена подготовке к профильному ЕГЭ и дополнительному вступительному экзамену по математике. Каждая из семи глав книги, содержащих задачи по всем темам курса математики, вошедшим в ЕГЭ, систематизирует теоретический материал и практические примеры для решения задач с 13 по 19.

Каждая глава книги разбита на параграфы.

В начале каждого параграфа дается необходимый теоретический материал, затем разбирается достаточное количество примеров. Для закрепления пройденного материала имеется список задач для самостоятельного решения, снабженных ответами.

Книга может быть использована школьниками старших классов для фундаментальной подготовки к ЕГЭ по математике, а также учителями и репетиторами.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 24,56.
Усл. печ. л. 41. Тираж 5000 экз. Заказ № 5004.

ISBN 978-5-377-15338-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ГЛАВА IV. ПЛАНИМЕТРИЯ

ГЛАВА V. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ГЛАВА VI. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

ГЛАВА VII. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Предисловие

Данная книга посвящена подготовке к профильному ЕГЭ и дополнительному вступительному испытанию по математике. Каждая из семи глав книги систематизирует теоретический материал и практические примеры для решения соответствующей задачи с 13 по 19.

Задача 13 — это тригонометрическое уравнение, как правило, с последующим отбором корней. В первой главе приводятся формулы тригонометрии и рассматриваются различные методы решения таких уравнений.

Задача 14 — это задача по стереометрии. Во второй главе изучаются способы построения сечений, нахождения углов и расстояний в пространстве, в том числе использующие аналитическую геометрию.

Задача 15 — это неравенство или система неравенств. В третьей главе наряду с традиционными приемами решения таких задач используется также и нестандартные, например, логарифмический метод интервалов.

Задача 16 — задача по планиметрии. Четвертая глава разбита на темы, каждая из которых посвящена определенному классу планиметрических задач.

Задача 17 — экономическая задача. В пятой главе разбирается большое количество таких задач, задачи систематизированы по методам их решений.

Задача 18 — это задача с параметром. В шестой главе рассматриваются как логические методы решения подобных задач, так и применение графических иллюстраций.

И, наконец, задача 19 — задача на целые числа. В седьмой главе изучаются специфические приемы, необходимые при работе с целочисленными переменными, как, например, использование признаков делимости и перебор вариантов.

Каждая глава книги разбита на параграфы.

В начале каждого параграфа дается необходимый теоретический материал, затем разбирается достаточное количество примеров.

Для закрепления пройденного материала имеется список задач для самостоятельного решения, снабженных ответами.

Книга может быть использована школьниками старших классов для фундаментальной подготовки к ЕГЭ по математике, а также учителями и репетиторами.

Желаем успехов!

Глава I
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.1. Основные формулы тригонометрии

В данном разделе мы приведем практически все формулы тригонометрии, встречающиеся при решении задач на преобразование тригонометрических выражений, а также при решении тригонометрических уравнений. Кроме того, приводится таблица значений тригонометрических функций основных углов.

1) Таблица значений тригонометрических функций следующих углов первой четверти:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{ctg}\alpha.$$

3) Равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, справедливое для всех значений α, называется *основным тригонометрическим тождеством*. Из этой формулы следуют еще две формулы:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\quad n\in Z;$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n;\quad n\in Z.$$

4) Формулы сложения:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\, n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\, n\in Z.$$

5) Формулы двойного и тройного аргументов:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\, n\in Z;$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha);$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3).$$

6) Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha};$$

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4};\quad \cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4}.$$

7) Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

8) Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

9) Формулы, использующие тангенс половинного аргумента:

$$\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi n;\ n\in Z;$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi+2\pi n;\ n\in Z.$$

1.2. Доказательство тождеств и упрощение выражений

Приведем несколько примеров доказательства тригонометрических тождеств и упрощения выражений с использованием рассмотренных в предыдущем параграфе формул.

Пример 1. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства следующим образом:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}:\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Пример 2. Доказать, что при всех допустимых значениях β справедливо равенство

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)-\sqrt{3}\cos\beta}=-\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства следующим образом:

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)-\sqrt{3}\cos\beta}=\frac{2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\beta-\sin\frac{\pi}{6}\sin\beta\right)-\sqrt{3}\cos\beta}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}\cos\beta+\sqrt{2}\sin\beta)-\sqrt{2}\sin\beta}{(\sqrt{3}\cos\beta-\sin\beta)-\sqrt{3}\cos\beta}=\frac{\sqrt{2}\cos\beta}{-\sin\beta}=-\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

Пример 3. Доказать, что при всех значениях α справедливо равенство

$$\sin^2(30^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)=\frac{\sqrt{3}\sin 2\alpha}{2}.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства следующим образом:

$$\sin^2(30^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)=$$

$$=\frac{1-\cos(60^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{1-\cos(60^\circ-2\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{\cos(60^\circ-2\alpha)-\cos(60^\circ+2\alpha)}{2}=$$

$$=-\sin\frac{(60^\circ-2\alpha)+(60^\circ+2\alpha)}{2}\sin\frac{(60^\circ-2\alpha)-(60^\circ+2\alpha)}{2}=$$

$$=-\sin 60^\circ\sin(-2\alpha)=\frac{\sqrt{3}\sin 2\alpha}{2}.$$

Пример 4. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства следующим образом:

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\frac{(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}{(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 5. Доказать, что при всех допустимых значениях x справедливо равенство

$$\frac{\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}(\pi+x)}=-\operatorname{ctg}^2 x.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства следующим образом:

$$\frac{\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}(\pi+x)}=$$

$$=\frac{(-\sin x)\cdot(-\sin x)\cdot(-\operatorname{ctg}x)}{(-\sin x)\cdot(\sin x)\cdot(-\operatorname{tg}x)}=-\frac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x}=-\operatorname{ctg}^2 x.$$

Пример 6. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=2\cos\alpha.$$

Ответ: $2\cos\alpha$.

Пример 7. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{2}{\sin\alpha}-\frac{2}{\sin 3\alpha}-\frac{4\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{2}{\sin\alpha}-\frac{2}{\sin 3\alpha}-\frac{4\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\sin\alpha}-\frac{2}{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}-\frac{4\cos 2\alpha}{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}=$$

$$=\frac{2(3-4\sin^2\alpha)-2-4\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{4-8\sin^2\alpha-4(1-2\sin^2\alpha)}{\sin 3\alpha}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 8. При всех допустимых значениях x упростить выражение

$$\frac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}=\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right):\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\frac{\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}:\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{\cos x}{\cos x\cos 2x}:\frac{2}{\sin 2x}=\frac{\operatorname{tg}2x}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$.

Пример 9. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}+\sqrt{2\,\mathrm{tg}}\,\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2(\cos 45^\circ\cos\alpha+\sin 45^\circ\sin\alpha)}{2(\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha=0.$$

Ответ: 0.

Пример 10. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha+1.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha+1=$$

$$=\operatorname{tg}3\alpha-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\alpha}+1=$$

$$=\operatorname{tg}3\alpha-\frac{\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right)\sin\alpha}{\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\cos\frac{2\pi}{3}\right)\cos\alpha}+1=$$

$$=\operatorname{tg}3\alpha-\frac{\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha}{\left(\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)\cos\alpha}+1=$$

$$=\operatorname{tg}3\alpha-\frac{(2(1-2\sin^2\alpha)+1)\sin\alpha}{(2(2\cos^2\alpha-1)-1)\cos\alpha}+1=$$

$$=\operatorname{tg}3\alpha-\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}+1=$$

$$=\operatorname{tg}3\alpha-\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}+1=1.$$

Ответ: 1.

Пример 11. При всех $0 < \alpha < 90°$ упростить выражение

$$\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2},$$

так как $\cos\frac{\alpha}{2}>\sin\frac{\alpha}{2}$ при $0<\frac{\alpha}{2}<45^\circ$.

Ответ: 0,5.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\frac{1}{\cos 2a}.$$

2. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\frac{1+\sin\alpha-2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

3. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin\alpha=\cos\alpha.$$

4. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\frac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

5. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

6. Доказать, что при всех допустимых значениях α справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha.$$

7. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{1-\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha}+1.$$

8. При всех допустимых значениях α и β упростить выражение

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)}.$$

9. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\alpha\cos\alpha}-2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

10. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}.$$

11. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sin\alpha-\sin(\pi+3\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1}.$$

12. При всех допустимых значениях x упростить выражение

$$\frac{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-\sin^2 x}{\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x\cos(\pi-2x)}.$$

13. При всех допустимых значениях α упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}.$$

1.3. Задачи на вычисления в тригонометрии

Рассмотрим несколько задач, связанных с вычислением значений тригонометрических выражений. Так же как и при решении задач предыдущего параграфа, при решении настоящих задач необходимо использовать уже известные тригонометрические формулы.

Пример 1. Вычислить $\dfrac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ} = \frac{2\sin 30^\circ \cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\cos 13^\circ} = \frac{\cos 13^\circ}{5\cos 13^\circ} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: 0,2.

Пример 2. Вычислить $\dfrac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ =$$

$$= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} - \left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ}\right) =$$

$$= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} =$$

$$=\frac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\cos 72^\circ+\cos 90^\circ}-\frac{2}{\cos 36^\circ+\cos 90^\circ}=\frac{2}{\cos 72^\circ}-\frac{2}{\cos 36^\circ}=$$

$$=\frac{2(\cos 36^\circ-\cos 72^\circ)}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}=\frac{4\sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}=\frac{4\cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}=4.$$

Ответ: 4.

Пример 4. Вычислить $\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ=\frac{1}{2}\sin 70^\circ \cos 40^\circ-\frac{1}{4}\sin 70^\circ=$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 110^\circ+\sin 30^\circ)-\frac{1}{4}\sin 70^\circ=\frac{1}{4}\sin 110^\circ+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\sin 70^\circ=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 70^\circ+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\sin 70^\circ=\frac{1}{8}.$$

Ответ: 1/8.

Пример 5. Известно, что $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Так как $\cos\alpha<0$ при $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$, имеем:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{5}{9}}=-\frac{2}{3}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1-\frac{2}{3}}=-\sqrt{5}.$$

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{5}$.

Пример 6. Найти $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{10} \text{ и } \sin\alpha+\sin\beta=-\frac{11}{10}.$$

Решение. Имеем

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{10}$$

и

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{11}{10},$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=-\frac{11}{3}.$$

Далее из условия задачи следует, что

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\frac{9}{100}$$

и

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\frac{121}{100}.$$

Складывая полученные равенства, находим, что

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=-\frac{7}{20}.$$

Ответ: 1) $-\dfrac{11}{3}$; 2) $-\dfrac{7}{20}$.

Пример 7. Вычислить $\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|+\log_{\frac{9}{5}}\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|+\log_{\frac{9}{5}}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|=$$

$$=\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|=$$

$$= \log_{\frac{9}{5}}\left|\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)\right)\right| =$$

$$= \log_{\frac{9}{5}}\left|\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)+\sin 2\alpha\right)\right| =$$

$$= \log_{\frac{9}{5}}\left|\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+\sin 2\alpha)\right| = \log_{\frac{9}{5}}\left|\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\right)\right|.$$

Так как $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$, то

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; 1-\sin 2\alpha=\frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; \sin 2\alpha=\frac{1}{3}.$$

Имеем далее:

$$\log_{\frac{9}{5}}\left|\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\right)\right| = \log_{\frac{9}{5}}\left|\frac{1}{2}\left(1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right)\right| = \log_{\frac{9}{5}}\frac{5}{9}=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 8. Какое из чисел больше: $(\cos 1+\sin 1)$ или $49/36$?

Решение. Преобразуем данное в условии задачи тригонометрическое выражение следующим образом:

$$\cos 1+\sin 1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 1\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 1+\sin\frac{\pi}{4}\sin 1\right)=\sqrt{2}\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как функция $y=\cos x$ на интервале $0<x<\frac{\pi}{2}$ убывает и $1<\frac{\pi}{3}$ получаем, что:

$$\sqrt{2}\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Докажем теперь, что $\frac{49}{36}<\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Для этого сравним эти числа. Имеем:

$$\frac{49}{36} \vee \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow 98 \vee 36\sqrt{3}+36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 62 \vee 36\sqrt{3} \Leftrightarrow 31 \vee 18\sqrt{3} \Leftrightarrow 961 \vee 972.$$

Так как $961 < 972$, то и $\frac{49}{36} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Таким образом, из полученных двух неравенств следует, что $\cos 1 + \sin 1 > \frac{49}{36}$.

Ответ: Первое число больше.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

2. Вычислить $8\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

3. Вычислить $\dfrac{20\sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}$.

4. Вычислить $\dfrac{16\sin 251^\circ - 10\cos 161^\circ}{\cos 19^\circ}$.

5. Вычислить $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$.

6. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

7. Найти $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

8. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

9. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \le -\frac{7}{8}$ и $\cos\alpha \le -\frac{1}{4}$.

10. Вычислить $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta) = 0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}3$.

11. Вычислить $\operatorname{tg} 3\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.

12. Найти $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

13. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

14. Найти $\operatorname{tg}2x$, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{5}$.

15. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)<0$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Рассмотрим сначала, как решаются простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение вида $\sin x=a$ решается следующим образом:

$$\sin x=a \Leftrightarrow \quad x=(-1)^k \arcsin a+\pi k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin a+2\pi k, \\ x=\pi-\arcsin a+2\pi k \end{array}\right.$$

при $a\in(-1,0)\cup(0,1)$. Если $|a|>1$, то уравнение $\sin x=a$ решений не имеет. Если $a=0$ или $a=\pm 1$, имеем:

$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi k, \quad \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

Здесь k — любое целое число. В дальнейшем мы будем писать $k\in Z$.

Уравнение вида $\cos x=a$ равносильно следующей совокупности:

$$\cos x=a \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=\arccos a+2\pi k, \\ x=-\arccos a+2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\arccos a+2\pi k$$

при $a\in(-1,0)\cup(0,1)$. Если $|a|>1$, то уравнение $\cos x=a$ решений не имеет. Если $a=0$ или $a=\pm 1$, имеем:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k.$$

Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ при любых действительных a решаются следующим образом:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k.$$

2.2. Сведение тригонометрического уравнения к квадратному

Одним из основных методов решения тригонометрических уравнений является сведение уравнение к квадратному относительно новой переменной. При этом, если мы в качестве новой переменной берем синус или косинус какого-либо аргумента, то необходимо отобрать только те корни полученного уравнения, которые по модулю не превосходят единицу.

Пример 1. Решить уравнение $\cos 2x = 1 - \sin x$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos 2x = 1 - \sin x \Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{array}\right. \quad k \in Z.$$

Ответ: $x = \pi k, \quad x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k; \quad k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8}.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x - \cos 2x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x - 1) - \cos 2x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{4} \Leftrightarrow \quad (\text{так как } |\cos 2x| \le 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1 - \sqrt{11}}{4} \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos\frac{1-\sqrt{11}}{4} + 2\pi k; \;\; k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{11}}{4} + \pi k.$$

О т в е т: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{11}}{4} + \pi k$; $\quad k \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 4.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Так как те x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения, разделив обе части равенства на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, \end{array}\right. \qquad k \in Z.$$

О т в е т: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\;x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$; $\;k \in Z$.

Пример 4. Решить уравнение

$$4 - \cos\left(2\pi(13x+9)^2\right) = 5\sin\left(\pi(13x+9)^2\right).$$

Решение. Пусть $y = \pi(13x+9)^2$, $y \geq 0$. Имеем:

$$4 - \cos 2y = 5\sin y \Leftrightarrow 4 - \left(1 - 2\sin^2 y\right) = 5\sin y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 y - 5\sin y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = 1, \\ \sin y = \dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{т.к. } |\sin y| \leq 1,}{\Leftrightarrow} \quad \sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{т.к. } y \geq 0,}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ k \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi(13x+9)^2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ k \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (13x+9)^2 = \dfrac{1}{2} + 2k, \\ k \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x + 9 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2} + 2k}, \\ k \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{\dfrac{1}{2} + 2k}}{13}, \\ k \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{\dfrac{1}{2} + 2k}}{13}$; $k \in Z$, $k \geq 0$.

Пример 5. Решить уравнение

$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 64^{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 64^{1 + \sin 2x} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 192\cdot 64^{\sin 2x} - 392\cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\cdot 64^{\sin 2x} - 49\cdot 8^{\sin 2x} + 2 = 0.$$

Пусть $8^{\sin 2x} = y,\quad y \in \left[\frac{1}{8}, 8\right]$ (так как $\sin 2x \in [-1, 1]$).

Имеем:

$$\begin{cases} 24y^2 - 49y + 2 = 0, \\ y \in \left[\frac{1}{8}, 8\right]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = \frac{1}{24}, \end{array}\right. \\ y \in \left[\frac{1}{8}, 8\right]; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow 8^{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\quad k \in Z \Leftrightarrow\quad x = \frac{(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k}{2};\quad k \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.
2. Решить уравнение $2\sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3$.
3. Решить уравнение $4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0$.
4. Решить уравнение $5\cos 2x + 14\cos x + 7 = 0$.
5. Решить уравнение $\cos^2 4x - 2\cos 4x - 3 = 0$.
6. Решить уравнение $3\cos 2x + 11\sin x = 7$.
7. Решить уравнение $5\cos 4x + 5 = 22(\cos x + \sin x)^2$.
8. Решить уравнение $\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$.
9. Решить уравнение $4\cos^2 3x - 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$.
10. Решить уравнение $\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0$.

2.3. Разложение на множители

Другим важным методом решения тригонометрических уравнений является разложение на множители. Метод состоит в том, чтобы левую часть уравнения вида $f(x)=0$ каким-либо образом разложить на два или более множителя и приравнять к нулю каждый множитель по отдельности.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 5x=0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin x+\sin 5x=0 \Leftrightarrow \quad 2\sin 3x\cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0,\\ \cos 2x=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi k}{3},\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\end{array}\right. \quad k\in Z.$$

О т в е т: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$, $\;x=\dfrac{\pi k}{3}$; $\;k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos x+\cos 5x=\cos 2x+\cos 4x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos x+\cos 5x=\cos 2x+\cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x=2\cos 3x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(\cos 2x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \quad 2\cos 3x\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0,\\ \sin\dfrac{3x}{2}=0,\\ \sin\dfrac{x}{2}=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\\ x=\dfrac{2\pi k}{3},\\ x=2\pi k,\quad k\in Z;\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\\ x=\dfrac{2\pi k}{3}.\end{array}\right.$$

О т в е т: $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$, $\;x=\dfrac{2\pi k}{3}$; $\;k\in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\cos(x^2+x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos(x^2+x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x^2+x)+2\cos(x+\pi)\cos\frac{\pi}{3}=0 \Leftrightarrow \ \cos(x^2+x)-\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{x^2+2x}{2}\sin\frac{x^2}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x^2+2x}{2}=0, \\ \sin\dfrac{x^2}{2}=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-2\pi k=0, \\ x^2=2\pi k, \quad k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{1+2\pi k},\ x=\pm\sqrt{2\pi k}; \quad k\in Z,\ k\geq 0.$$

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{1+2\pi k}$, $x=\pm\sqrt{2\pi k}$; $k\in Z$, $k\geq 0$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)+\cos 6x=1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)+\cos 6x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\cos 8x+\cos 6x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 5x\sin 3x-2\sin^2 3x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(\sin 5x-\sin 3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x\sin x\cos 4x=0 \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin 3x=0, \\ \sin x=0, \\ \cos 4x=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi k}{3}, \\ x=\pi k, \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, \quad k\in Z; \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi k}{3}, \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, \end{array}\right.$$

так как первая серия решений предпоследней совокупности целиком содержит вторую.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$; $k\in Z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x=1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos 2x=0 \Leftrightarrow \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=0, \\ \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=\pi k, \\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \\ x=\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$; $k\in Z$.

Пример 6. Решить уравнение

$$(\cos x-1)(2\sin x-\cos 2x-2)=2\sin^2 x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(\cos x-1)(2\sin x-\cos 2x-2)=2\sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2\sin x-\cos 2x-2)=2(1-\cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2\sin x-\cos 2x-2)=2(1-\cos x)(1+\cos x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2\sin x-\cos 2x-2+2+2\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2\cos x+2\sin x-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2\cos x+2\sin x-(\cos^2 x-\sin^2 x))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2(\cos x+\sin x)-(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(\cos x+\sin x)(\sin x-\cos x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-1=0,\\ \cos x+\sin x=0,\\ \sin x-\cos x+2=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \operatorname{tg} x=-1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z,\end{array}\right.$$

поскольку уравнение $\cos x-\sin x=2$ решений не имеет в силу ограниченности функций $y=\cos x$ и $y=\sin x$.

Ответ: $x=2\pi k$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; $k\in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $2\sin 2x+\sqrt{3}\cos x=0$.
2. Решить уравнение $\sin 3x-\sin x+\cos 2x=1$.
3. Решить уравнение $\sin x-\sin 3x=\cos 2x\sin 3x$.
4. Решить уравнение $\sin x+\cos\left(5x-\dfrac{9\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin(3x+\pi)$.
5. Решить уравнение $4(\sin 4x-\sin 2x)=\sin x(4\cos^2 3x+3)$.
6. Решить уравнение $\cos 7x+\cos x=2\cos 3x(\sin 2x-1)$.
7. Решить уравнение $2\cos 2x\cos 7x-\cos 4x=1$.
8. Решить уравнение $\cos 0{,}2x-\cos 0{,}8x+\cos 0{,}6x=1$.
9. Решить уравнение $2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\sin x$.
10. Решить уравнение $\sin x\sin 3x=\cos 2x\cos 4x$.

11. Решить уравнение $5\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}$.

12. Найти неотрицательные решения уравнения

$$1+\sin 7x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2.$$

13. Решить уравнение $\sin 5x-\sin x=\sqrt{8}\cos 3x$.

14. Решить уравнение $\cos 3x=\cos 5x+\frac{4\pi}{3}\cdot\sin x$.

15. Решить уравнение $\sin 4x+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$.

16. Решить уравнение $\cos 3x-2\cos 6x-\cos 9x=-2$.

17. Решить уравнение $\cos 4x=4\cos x\cos 2x-1$.

2.4. Понижение степени

Некоторые тригонометрические уравнения решаются *понижением степени*. Для этого используются формулы пункта 6 первого параграфа. Эти формулы применяются в случае, когда мы хотим понизить степень уравнения за счет изменения аргументов тригонометрических функций.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 3x=1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin^2 x+\sin^2 3x=1\Leftrightarrow\quad\Leftrightarrow\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x+\cos 6x=0\Leftrightarrow\quad\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\ \cos 2x=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\end{array}\right.\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\quad k\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$8\cos 8x-4\cos^2 2x+5=0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$8\cos 8x-4\cos^2 2x+5=0 \Leftrightarrow 8(2\cos^2 4x-1)-4\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^2 4x-2\cos 4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=-\dfrac{1}{2},\\ \cos 4x=\dfrac{5}{8};\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ 4x=\pm\arccos\dfrac{5}{8}+2\pi k, \quad k\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2},\\ x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{5}{8}+\dfrac{\pi k}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{5}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $k\in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin^2\frac{3x}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5x}{2}\right)=\sin^2\frac{11x}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{13x}{2}\right).$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin^2\frac{3x}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5x}{2}\right)=\sin^2\frac{11x}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{13x}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos 3x}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)}{2}=\frac{1-\cos 11x}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-13x\right)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x-\cos 11x-(\sin 13x-\sin 5x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\sin 7x-2\sin 4x\cos 9x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x(\sin 7x-\cos 9x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\left(\sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-9x\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x \sin\frac{7x-\frac{\pi}{2}+9x}{2}\cos\frac{7x+\frac{\pi}{2}-9x}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)=0, \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\pi k, \\ 8x-\frac{\pi}{4}=\pi k, \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi k}{4}, \\ x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8}, \\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi k}{4}, \\ x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8}, \end{array}\right.$$

так как первая серия решений предпоследней совокупности целиком содержит третью.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{4}$, $x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8}$; $k\in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x$.
2. Решить уравнение $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$.
3. Решить уравнение
$$\cos 2x+2\cos x+7=2\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+4\sin^2\frac{x}{2}.$$
4. Решить уравнение $\cos^2 6x-\sin^2 3x-1=0$.
5. Решить уравнение $\mathrm{tg}^2 x-6\cos 2x=6$.
6. Решить уравнение $\sin^2 11x=\cos^2 17x$.
7. Решить уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 3x=1$.
8. Решить уравнение $8\cos^2 5x-4\cos^2 10x=1$.

2.5. Введение дополнительного угла

Еще одним важным методом решения тригонометрических уравнений является метод *введения дополнительного угла*. Если нам дано уравнение вида $a\cos x + b\sin x = c$, то, разделив обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Существует такой угол α, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha.$$

Действительно,

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Имеем далее

$$\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\alpha=\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi k;\quad k\in Z\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\alpha\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi k,$$

в случае, если $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\in[-1,1]$, и нет решений в противном случае.

При решении уравнений данного типа можно пользоваться также другими формулами сложения, представленными в пункте 4 первого параграфа.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad k\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=-\sqrt{6}\cos x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=-\sqrt{6}\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\cos 3x)+(\sin x+\sin 3x)=-\sqrt{6}\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\cos 2x+2\cos x\sin 2x=-\sqrt{6}\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos 2x+2\sin 2x+\sqrt{6})=0.$$

Решением уравнения $\cos x=0$ являются $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in Z$.

Решим теперь уравнение $2\cos 2x+2\sin 2x+\sqrt{6}=0$.
Имеем:

$$2\cos 2x+2\sin 2x+\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \\ 2x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13\pi}{24}+\pi k, \\ x=-\dfrac{7\pi}{24}+\pi k. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{7\pi}{24}+\pi k$, $x=\frac{13\pi}{24}+\pi k$; $k\in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1=2\cos x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1=2\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \quad r\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}, \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $k\in Z$.

Пример 4. Имеет ли уравнение

$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=|4-5\cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=|4-5\cos x| \Leftrightarrow 12\sin x=|4-5\cos x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 12\sin x = 4-5\cos x, \\ 12\sin x = 5\cos x - 4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 5\cos x + 12\sin x = 4, \\ 5\cos x - 12\sin x = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждое уравнение. Имеем:

$$5\cos x+12\sin x=4 \Leftrightarrow \frac{5}{13}\cos x+\frac{12}{13}\sin x=\frac{4}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\arccos\frac{5}{13}\right)=\frac{4}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\arccos\frac{5}{13}=\pm\arccos\frac{4}{13}+2\pi k;\ k\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\arccos\frac{5}{13}\pm\arccos\frac{4}{13}+2\pi k.$$

Условию $\sin x \ge 0$ удовлетворяет $x=\arccos\frac{5}{13}+\arccos\frac{4}{13}+2\pi k.$

Имеем далее:

$$5\cos x-12\sin x=4 \Leftrightarrow \frac{5}{13}\cos x-\frac{12}{13}\sin x=\frac{4}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\arccos\frac{5}{13}\right)=\frac{4}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\arccos\frac{5}{13}=\pm\arccos\frac{4}{13}+2\pi n;\ n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\arccos\frac{5}{13}\pm\arccos\frac{4}{13}+2\pi n.$$

Условию $\sin x \geq 0$ удовлетворяет $x = -\arccos\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{13} + 2\pi n$.

Наименьшее расстояние между полученными корнями есть

$$\left(\arccos\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{13}\right) - \left(-\arccos\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{13}\right) =$$

$$= 2\arccos\frac{5}{13} > \frac{\pi}{2},$$

так как $\arccos\frac{5}{13} > \frac{\pi}{4}$, поскольку $\frac{5}{13} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$. Значит, исходное уравнение не имеет корней, расстояние между которыми меньше либо равно $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: Не имеет.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$.

2. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 1$.

4. Решить уравнение $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

5. Решить уравнение $\cos x - \sin x = 1$.

6. Решить уравнение $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$.

7. Решить уравнение $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.

8. Найти все A, при которых уравнение $2\sin x + 3\cos x = A$ имеет решение.

9. Решить уравнение $2\sin x + 7\cos x = \frac{\sqrt{53}}{2}$.

§ 3. ОТБОР КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

3.1. Отбор корней при помощи тригонометрического неравенства

Часто в задаче требуется не только решить тригонометрическое уравнение, но также из полученных корней отобрать те, которые удовлетворяют некоторому (как правило, простейшему) тригонометрическому неравенству. При этом неравенство может быть задано и в явном виде, а может, например, возникнуть при нахождении области определения данного уравнения или проведении каких-либо преобразований. При решении подобной задачи полезно изобразить рисунок, на котором на тригонометрическую окружность необходимо нанести все получившиеся корни уравнения и решение данного простейшего неравенства.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\sin x}=-\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos x\ge 0,\\ 1+\sin x=\cos^2 x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\le 0,\\ 1+\sin x=1-\sin^2 x;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin^2 x+\sin x=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\le 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-1;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\le 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k.\end{array}\right.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 1.

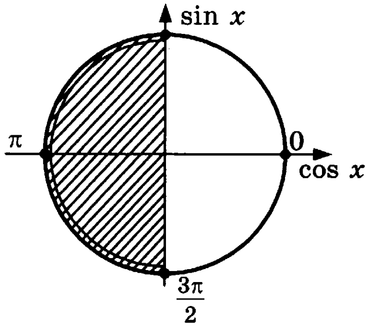


Рис. 1

Ответ: $x=\pi+2\pi k,\quad x=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k;\quad k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(-x)>0,\\ \sin(-x)\neq 1,\\ \sin(-x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{3x}{2};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x\neq -1,\\ \sin x+2\sin x\cos\dfrac{x}{2}=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x\neq -1,\\ \sin x\left(1+2\cos\dfrac{x}{2}\right)=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x\neq -1,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x\neq -1,\\ \cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x\neq -1,\\ \dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x\neq -1,\\ x=\pm\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k;\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}+4\pi k.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 2.

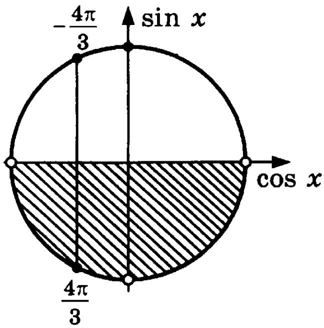


Рис. 2

О т в е т: $x=\frac{4\pi}{3}+4\pi k;\quad k\in Z.$

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{6\cos^2 x-\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\frac{6\cos^2 x-\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6\cos^2 x-\cos x-2=0,\\ \sin x<0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{2}{3},\\ \cos x=-\frac{1}{2};\end{array}\right.\\ \sin x<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi k,\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\end{array}\right.\\ \sin x<0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\arccos\frac{2}{3}+2\pi k,\\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k.\end{array}\right.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 3.

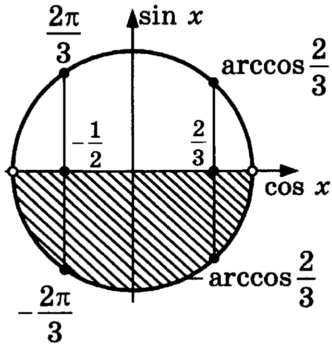


Рис. 3

Ответ: $x=-\arccos\frac{2}{3}+2\pi k$, $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $k\in Z$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{1-2\cos x}\cdot\log_5(-2\sin x)=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{1-2\cos x}\cdot\log_5(-2\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2\cos x=0,\\ \sin x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\log_5(-2\sin x)=0,\\ \cos x\le\frac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2},\\ \sin x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-\frac{1}{2},\\ \cos x\le\frac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\end{array}\right.\\ \sin x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;\end{array}\right.\\ \cos x\le\frac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k.\end{array}\right.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунках 4 и 5.

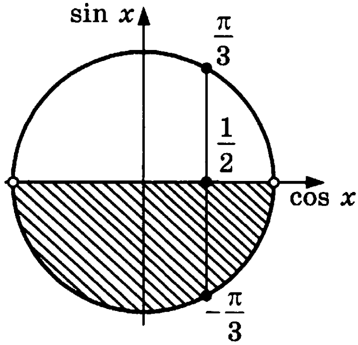


Рис. 4

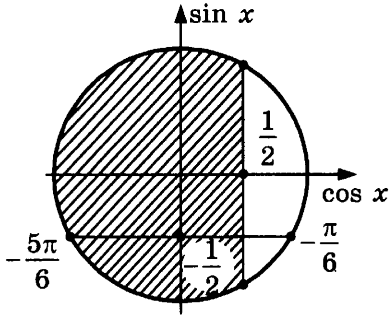


Рис. 5

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; $k\in Z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ \begin{cases}2\sin x-1=0,\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;\end{array}\right.\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\end{array}\right.$$

так как если $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, то

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\cos\frac{5\pi}{12}>0;$$

а если $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, то

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\cos\frac{13\pi}{12}<0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad x=\frac{\pi}{6}+\pi k;\quad k\in Z.$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)-\sin x=|\cos x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x-\sin x-\sin x=|\cos x|\Leftrightarrow\cos x-2\sin x=|\cos x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ \cos x-2\sin x=\cos x;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ \cos x-2\sin x=-\cos x;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ \sin x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ \operatorname{tg}x=1;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ x=\pi k,\quad k\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k.\end{array}\right.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунках 6 и 7.

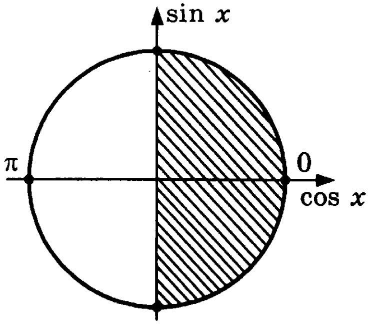


Рис. 6

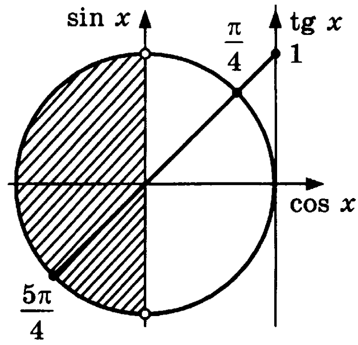


Рис. 7

Ответ: $x = 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \quad k \in Z$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ (3\sin x - \cos x)\cos x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ 3\sin x\cos x - \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0; \end{cases} \overset{\text{делим на } \cos^2 x}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in Z; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k; \quad k \in Z$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\le 0,\\ 5\sin x+\cos 2x=(-2\cos x)^2;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\le 0,\\ 5\sin x+\left(1-2\sin^2 x\right)=4-4\sin^2 x;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\le 0,\\ 2\sin^2 x+5\sin x-3=0;\end{cases} \overset{\text{т.к. } |\sin x|\le 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2};\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 8.

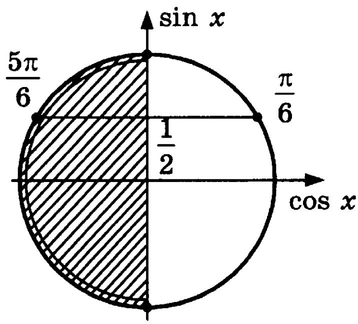


Рис. 8

О т в е т: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;\quad k\in Z.$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}-\cos x \ge 0, \\ \dfrac{3}{4}-\cos x = \dfrac{3}{4}-\cos 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le \dfrac{3}{4}, \\ \cos 3x - \cos x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le \dfrac{3}{4}, \\ -2\sin 2x \sin x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le \dfrac{3}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} 2x = \pi k, \\ x = \pi k, \quad k \in Z; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le \dfrac{3}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{2}, \\ x = \pi k; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le \dfrac{3}{4}, \\ x = \dfrac{\pi k}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k. \end{array}\right.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 9.

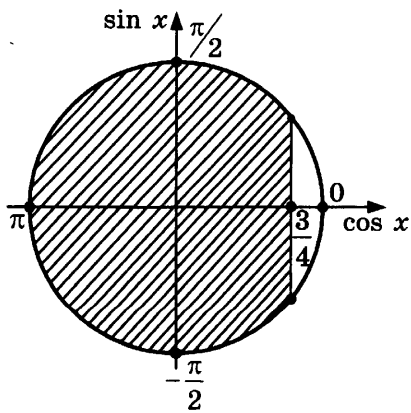


Рис. 9

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \pi + 2\pi k; \quad k \in Z.$

Пример 10. Решить уравнение

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения. Имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \\ -\dfrac{|\cos x|}{\sin x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \\ \sin x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x < 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases}$$

На области определения модули раскроются следующим образом: $|\sin x| = -\sin x$, $|\cos x| = -\cos x$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin x + \log_{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow -2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \quad k \in Z. \end{array} \right.$$

Области определения принадлежит $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

О т в е т: $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k;\quad k \in Z$.

Пример 11. Решить уравнение

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0, \\ 4\sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + 8\sin 2x \cos^2 2x. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=1+4\sin 4x\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+2\sin 6x=1+2(\sin 6x+\sin 2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+2\sin 6x=1+2\sin 6x+2\sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\pi k, \\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi k. \end{array}\right.$$

Отметим полученные решения на тригонометрическом круге (рисунок 10) и сделаем отбор корней.

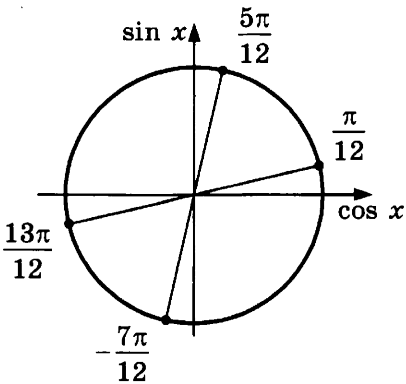


Рис. 10

1) Если $x=\frac{\pi}{12}+2\pi k$, то

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+6\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

значит, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi k$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi k$, то

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1,$$

значит, $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi k$ не удовлетворяет условию задачи.

3) Если $x=\frac{13\pi}{12}+2\pi k$, то

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{13\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{7\pi}{2}=-1,$$

значит, $x=\frac{13\pi}{12}+2\pi k$ не удовлетворяет условию задачи.

4) Если $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi k$, то

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1,$$

значит, $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi k$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+2\pi k,\quad x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi k;\quad k\in Z.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $|\cos x|-\sqrt{3}\cos\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)=1.$
2. Решить уравнение $\sqrt{\sin x\sin 3x}=\cos x$.
3. Решить уравнение
$$\log_{\cos x}(\cos^2 x+\sin^2 x)-2\sin^2 x+5\sin 2x=0 .$$
4. Решить уравнение $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\sqrt{\operatorname{tg} x}=0$.
5. Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2+\cos x}=0$.
6. Решить уравнение $1+2\operatorname{tg} x\cdot|\cos x|=0$.
7. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x)+\log_2(\sqrt{3}\cos x)=-1$.
8. Решить уравнение $\log_{(-2\cos x)}(3\sin x-\cos 2x)=0$.
9. Решить уравнение $|\sin x|+\sin 3x=\sin 2x$.

10. Решить уравнение $(6\sin^2 x+5\sin x-4)\cdot\sqrt{-7\cos x}=0$.

11. Решить уравнение $(\sqrt{3}\sin x-2\sin^2 x)\cdot\log_6(-\operatorname{tg} x)=0$.

12. Решить уравнение $(\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{-5\cos x}=0$.

13. Решить уравнение $\sqrt{2\cos^2 x-\sqrt{3}}+\sqrt{2}\sin x=0$.

14. Решить уравнение $\log_{\sin x}(\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x+1)=0$.

15. Решить уравнение $|\cos x-2\sin x|+\cos x=0$.

3.2. Отбор корней в промежуток на числовой прямой

В задачах данного параграфа предлагается не только решить тригонометрическое уравнение, но и указать те из его корней, которые принадлежат некоторому промежутку числовой прямой. Такой отбор можно производить как на числовой прямой, так и на тригонометрической окружности. Второй способ предпочтительнее, если заданный интервал имеет небольшую длину (как правило, меньшую 2π). Возможен также отбор корней по графику тригонометрической функции, изображенному на координатной плоскости.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x+\cos x-1=0.$$

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $\left[0,\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2\sin^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \quad 2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.\end{array}\right.$$

Если $x = 2\pi k$, $k \in Z$, то $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Отрезку $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни 0 и 2π. Если $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, то $x = \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3}, \pm\frac{8\pi}{3}, \ldots$. В этом случае отрезку $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Таким образом, ответом ко второй части задачи будут служить $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ и $x = 2\pi$.

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $k \in Z$. Отрезку принадлежат корни 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

Пример 2. Решить уравнение

$$3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$$

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[-3\pi, -2\pi]$.

Решение. Заметим, что те значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решением данного уравнения и разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Имеем:

$$3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = -1, \\ \mathrm{tg}\, x = -\frac{2}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Изобразим на тригонометрической окружности полученные решения, а также отрезок (дугу) $[-3\pi, -2\pi]$ (рисунок 11). Из рисунка видно, что данному отрезку принадлежат корни $x = -\frac{9\pi}{4}$ и $x = -\mathrm{arctg}\frac{2}{3} - 2\pi$.

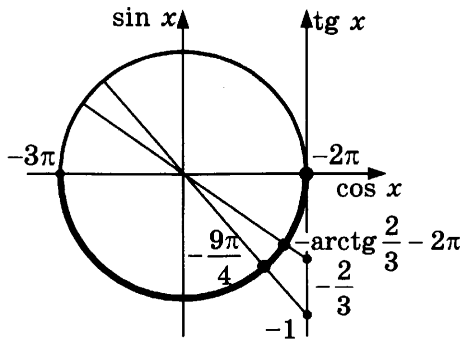


Рис. 11

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$; $k \in Z$. Отрезку принадлежат корни $-\frac{9\pi}{4}$, $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 2\pi$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Найти все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Изобразим на координатной плоскости Oxy график функции $y = \sin x$ и отметим на нем решения уравнений $\sin x = 0$ и $\sin x = \frac{1}{2}$ (рисунок 12). Из рисунка видно, что функция $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$ принимает значения 0 или $\frac{1}{2}$ в точках с абсциссами $x = -2\pi$, $x = -\frac{11\pi}{6}$, $x = -\frac{7\pi}{6}$ и $x = -\pi$.

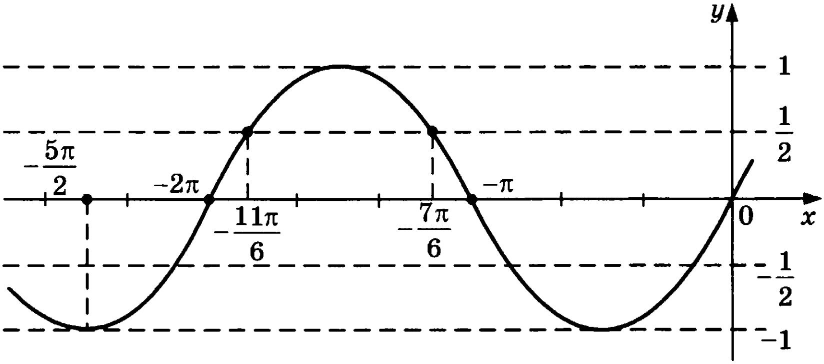


Рис. 12

Ответ: $x = \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $k \in Z$. Промежутку принадлежат корни -2π, $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $x = -\pi$.

Пример 4. Найти все решения уравнения

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4},\ 1\right]$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{\cos 2x} + 4^{\frac{1+\cos 2x}{2}} = 3 \Leftrightarrow 4^{\cos 2x} + 2 \cdot 2^{\cos 2x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\cos 2x} + 3\right)\left(2^{\cos 2x} - 1\right) = 0 \overset{\text{т.к. } 2^{\cos 2x} > 0}{\Leftrightarrow} 2^{\cos 2x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$$

Если $k = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$; если $k = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \notin \left[\frac{3}{4}, 1\right]$; если $k = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Следовательно, только $x=\frac{\pi}{4}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}$.

Пример 5: Найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{49-4x^2}\cdot\left(\sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{49-4x^2}\cdot\left(\sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}49-4x^2=0,\\ \begin{cases}49-4x^2>0,\\ \sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{7}{2},\\ \begin{cases}-\frac{7}{2}<x<\frac{7}{2},\\ \cos\frac{\pi x}{2}\left(2\sin\frac{\pi x}{2}+3\right)=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\text{т.к. } \left|\sin\tfrac{\pi x}{2}\right|\le 1}\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{7}{2},\\ \begin{cases}-\frac{7}{2}<x<\frac{7}{2},\\ \cos\frac{\pi x}{2}=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{7}{2},\\ \begin{cases}-\frac{7}{2}<x<\frac{7}{2},\\ \frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{7}{2},\\ \begin{cases}-\frac{7}{2}<x<\frac{7}{2},\\ x=1+2k;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{7}{2},\\ x=\pm 1,\\ x=\pm 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pm\frac{7}{2}, x=\pm 1, x=\pm 3$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\log_2\left(4-x^2\right)=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left(2\sqrt{3}\sin\left(\pi x+3\pi\right)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\log_2\left(4-x^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(4-x^2)=0, \\ \cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x^2>0, \\ 2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x^2=1, \\ \pi x-\frac{\pi}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z, \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ -2\sqrt{3}\sin(\pi x)+\operatorname{ctg}(\pi x)=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{3}, \\ x\neq 1+n, \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ \dfrac{\cos(\pi x)-2\sqrt{3}\sin^2(\pi x)}{\sin(\pi x)}=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ \dfrac{2\sqrt{3}\cos^2(\pi x)+\cos(\pi x)-2\sqrt{3}}{\sin(\pi x)}=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ \sin(\pi x)\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos(\pi x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(\pi x)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{т.к. } |\cos(\pi x)|\leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ \cos(\pi x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ \pi x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ \begin{cases} -2<x<2, \\ x=\pm\dfrac{1}{6}+2k; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ x=\pm\dfrac{1}{6}, \\ x=\pm\dfrac{11}{6}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pm\sqrt{3}, \quad x=\pm\dfrac{1}{6}, \quad x=\pm\dfrac{11}{6}.$

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_3(x+10)\cos x=\log_3\frac{x+10}{\cos x}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\log_3(x+10)\cos x=\log_3\frac{x+10}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+10)\cos x>0, \\ (x+10)\cos x=\dfrac{x+10}{\cos x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+10)\cos x>0, \\ \cos^2 x=1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x=1, \\ x+10>0, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x=-1, \\ x+10<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2\pi k, \\ x>-10, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pi+2\pi n, \\ x<-10, \quad k,n,\in Z; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2\pi k, \\ k=-1,0,1,2,\ldots; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pi+2\pi n, \\ n=-3,-4,-5,\ldots. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=2\pi k,\ x=\pi+2\pi n;\ k,n\in Z,\ k\geq -1,\ n\leq -3$.

Пример 8. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{x+\sin x}=\sqrt{x-\sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x+\sin x}=\sqrt{x-\sin 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ x+\sin x = x-\sin 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \sin x+\sin 2x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \sin x(1+2\cos x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

Среди решений уравнения условию $-2\pi < x < 2\pi$ удовлетворяют значения $x = 0$, $x = \pm\pi$, $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}$, $x=\pm\dfrac{4\pi}{3}$. Среди этих значений x условию $x+\sin x \ge 0$ удовлетворяют $x = 0$, $x = \pi$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$, $x=\dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: $x = 0$, $x = \pi$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$, $x=\dfrac{4\pi}{3}$.

Пример 9. Найти все решения уравнения

$$3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-\cos x=3,$$

принадлежащие отрезку $[-2;10,99]$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-\cos x=3 \Leftrightarrow\ 3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}+1=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}-3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+2=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k;\quad k\in Z \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k.$$

Пусть $x=\frac{\pi}{2}+4\pi k$.

Если $k = 0$, то $x=\frac{\pi}{2}\in[-2;10{,}99]$. При $k = -1$ получаем, что $x=-\frac{7\pi}{2}\notin[-2;10{,}99]$. Если же $k = 1$, то $x=\frac{9\pi}{2}\notin[-2;10{,}99]$. Следовательно, из этой серии подходит только $x=\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь $x=-\frac{\pi}{2}+4\pi k$.

Если $k = 0$, то $x=-\frac{\pi}{2}\in[-2;10{,}99]$. При $k = -1$ имеем $x=-\frac{9\pi}{2}\notin[-2;10{,}99]$. Рассмотрим подробнее случай, когда $k = 1$, то есть $x=\frac{7\pi}{2}$. Сравним это число с числом $10{,}99$:

$$\frac{7\pi}{2}\vee 10{,}99 \Leftrightarrow 7\pi\vee 21{,}98 \Leftrightarrow \pi\vee 3{,}14.$$

Так как $\pi > 3{,}14$, то $\frac{7\pi}{2}>10{,}99$. Следовательно, $x=\frac{7\pi}{2}$ не удовлетворяет условию задачи. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

Пример 10. Найти все корни уравнения

$$2^{\cos x}+5\cdot 2^{-\cos x}=2\sqrt{6},$$

удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{3}<x<\frac{7\pi}{3}$.

Решение. Пусть $2^{\cos x} = y$, $y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (так как $|\cos x| \le 1$).

Имеем:

$$y + \frac{5}{y} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow y^2 - 2\sqrt{6}y + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{6} \pm 1 \overset{\text{т.к. } y \in [\frac{1}{2}, 2]}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{6} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x} = \sqrt{6} - 1 \Leftrightarrow \cos x = \log_2(\sqrt{6} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos \log_2(\sqrt{6} - 1) + 2\pi k; \quad k \in Z.$$

Сравним числа

$$\arccos \log_2(\sqrt{6} - 1) \vee \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \vee \log_2(\sqrt{6} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \vee \log_2(\sqrt{6} - 1) \Leftrightarrow \sqrt{2} \vee \sqrt{6} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \vee 7 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \vee 5 \Leftrightarrow 24 \vee 25.$$

Так как 24 < 25, то и $\arccos \log_2(\sqrt{6} - 1) < \frac{\pi}{3}$; мы используем тот факт, что функция $y = \arccos x$ — убывающая. Таким образом (рисунок 13), интервалу $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$ принадлежат следующие корни уравнения: $x = 2\pi - \arccos \log_2(\sqrt{6} - 1)$ и $x = 2\pi + \arccos \log_2(\sqrt{6} - 1)$.

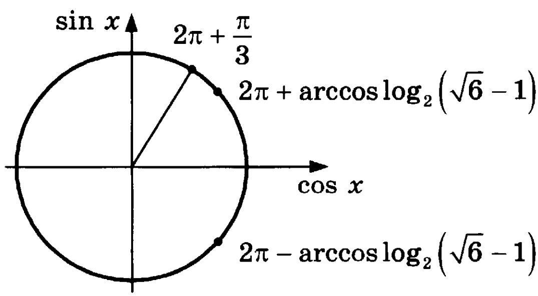


Рис. 13

Ответ: $x = 2\pi \pm \arccos \log_2(\sqrt{6} - 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25$.

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $\left[3\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$.

2. Решить уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$.

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$.

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x - 3 = 0$.

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$.

4. Решить уравнение $5\sin^2 x - 4\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$.

5. Решить уравнение $2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0$.

Указать те из корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$.

6. Найти все решения уравнения

$$\sin 2x + \cos x + 2\sin x = -1,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 5$.

7. Найти все решения уравнения $3\operatorname{tg}^2\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$, удовлетворяющие условию $1,5 < x < 3$.

8. Найти все $x \in (-\pi, \pi)$, являющиеся решениями уравнения $\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}$.

9. Найти все решения уравнения $|\sin 2x| + \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}, \frac{8}{3}\right]$.

10. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos^2 x+0{,}5\sin 2x+\cos x=0$.

Найти сумму его различных корней, принадлежащих отрезку $[-\pi,\ \pi]$.

11. Найти все решения уравнения

$$2\sin\left(x+\frac{7\pi}{25}\right)\cdot\sin\left(3x+\frac{18\pi}{25}\right)=\cos 4x+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10},\ \frac{4\pi}{5}\right]$.

12. Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x+x-11}=\sqrt{x-15-5\cos x}.$$

13. Найти все решения уравнения

$$5\sin^2 2x+8\cos^3 x=8\cos x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$.

3.3. Нахождение общих корней двух тригонометрических уравнений

В некоторых задачах возникает необходимость нахождения общих корней двух тригонометрических уравнений. Чаще всего это происходит при выполнении задания, в котором тригонометрическая функция присутствует в знаменателе какого-либо выражения. Поиск общих решений двух тригонометрических уравнений можно осуществлять несколькими способами. Можно решать каждое уравнение в отдельности (при этом в разных уравнениях должны быть выбраны различные буквы, обозначающие целочисленную переменную), а затем на тригонометрической окружности находить общие решения. Можно также при помощи подстановки выяснять, какие корни одного из уравнений являются в том числе и решениями второго уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=0,\\ \operatorname{tg} x\neq 1,\\ \cos x\neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m, \quad k,n,m\in Z;\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 14.

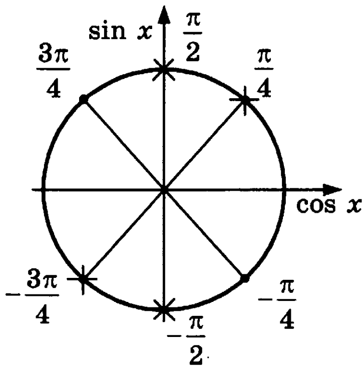


Рис. 14

О т в е т: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x=\sin 2x-1, \\ \sin 2x-1\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0, \\ \sin 2x\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x=\sqrt{2}, \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right. \\ \sin 2x\neq 1; \end{cases} \overset{\text{т.к. } |\sin x|\leq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin 2x\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. \\ 2x\neq \dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ k,n\in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 15.

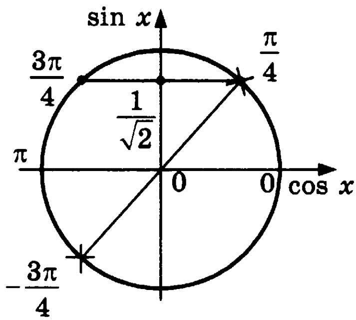


Рис. 15

Ответ: $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\quad k\in Z.$

Пример 3. Найти все корни уравнения

$$\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\sin^2 x+\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \frac{1+\sin x-2\sin^2 x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sin x-2\sin^2 x=0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \sin x=-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k; \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad k,n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k. \end{array}\right.$$

Неравенству $\operatorname{tg} x<0$ среди полученных корней удовлетворяет $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$.

О т в е т: $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k \in Z$.

Пример 4. Найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg} 5x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg} 5x \Leftrightarrow \frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\cos 5x}{\sin 5x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x \sin 5x-\cos 5x \sin 3x}{\sin 3x \sin 5x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\sin 3x \sin 5x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x=0, \\ \sin 3x \neq 0, \\ \sin 5x \neq 0. \end{cases}$$

Решением уравнения $\sin 2x = 0$ являются $x = \frac{\pi k}{2}$; $k \in Z$. Если $x = \pi k$, то $\sin 3x = \sin 3\pi k = 0$ при любом целом k. Если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то $\sin 3x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right)$ и $\sin 5x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 5\pi k\right)$ отличны от нуля при любом целом k. Таким образом, решением уравнения является $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = -1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \pi k, \\ x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad k, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \\ x \neq \frac{2\pi}{3} + \pi n; \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 16.

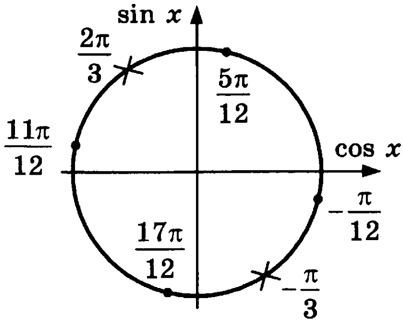


Рис. 16

Ответ: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2};\quad k \in Z$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x - 4\sin 3x - 2\sin x + 4}{2\sin x - 1} = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x - 4\sin 3x - 2\sin x + 4}{2\sin x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x \sin 3x - 4\sin 3x - 2\sin x + 4}{2\sin x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x(\sin x - 2) - (\sin x - 2)}{2\sin x - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\sin 3x - 1)(\sin x - 2)}{2\sin x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin x \neq \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x \neq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 17.

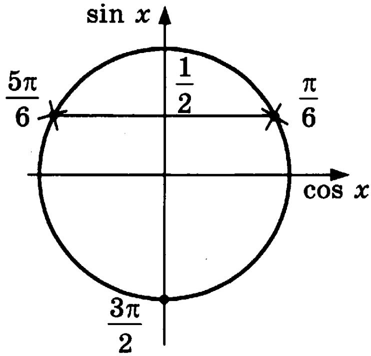


Рис. 17

О т в е т: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупнос двух систем:

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \sin 3x \geq 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x = \pi k, \\ 2x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \pi k, \\ 2\pi n \leq 3x \leq \pi + 2\pi n, \quad k, n, \in Z; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3}, \\ x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \\ \frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k, \\ x = \frac{19\pi}{12} + 2\pi k. \end{array} \right.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунках 18 и 19.

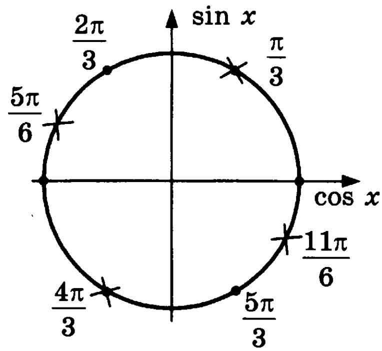


Рис. 18

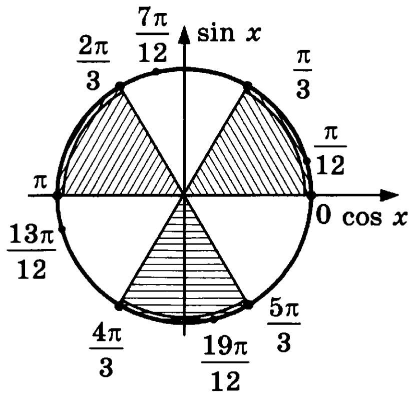


Рис. 19

Ответ: $x = \pi k,\ x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k,\ x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi k,\ x = \dfrac{19\pi}{12} + 2\pi k;\ k \in Z.$

Пример 8. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1.$$

Решение. Пусть $y = 2x$, тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\sin 2y}{\cos 3y} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = \cos 3y, \\ \sin 2y \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3y\right) = 0, \\ \sin 2y \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{5y}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2}\right) = 0, \\ \sin 2y \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{5y}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2}\right) = 0, \end{array}\right. \\ \sin 2y \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{5y}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \pi k, \\ \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{array}\right. \\ 2y \neq \pi n, \quad k, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}, \\ y = -\dfrac{\pi}{2} - 2\pi k, \end{array}\right. \\ y \neq \dfrac{\pi n}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \neq 5m+1; \quad k, m \in Z.$$

Отбор корней тригонометрического уравнения изображен на рисунке 20.

Следовательно, $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}$, $k \neq 5m+1$; $k, m \in Z$.

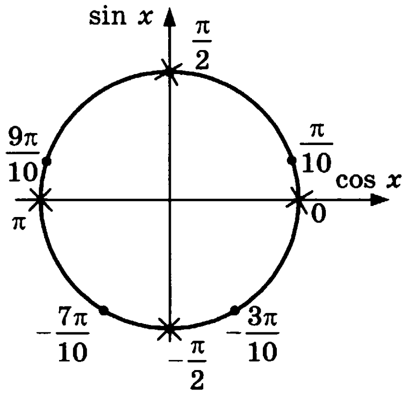


Рис. 20

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}, \quad k \neq 5m+1; \quad k, m \in Z.$

Пример 9. Решить уравнение

$$\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sin x - 2(1 - 2\sin^2 x) - 4(1 - \sin^2 x) - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\sin^2 x+6\sin x-9}{\sqrt{7}\sin x-3\cos x}=0 \overset{\text{т.к. } |\sin x|\le 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{3}{4}, \\ \sqrt{7}\sin x-3\cos x\ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi k, \\ x=\pi-\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi k, \quad k\in Z, \end{array}\right. \\ \operatorname{tg} x\ne \dfrac{3}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Пусть $x=\arcsin\frac{3}{4}+2\pi k$, тогда $\sin x=\frac{3}{4}$, $\cos x=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\operatorname{tg} x=\frac{3}{\sqrt{7}}$. Следовательно, эти значения x не являются решением задачи. Если же $x=\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi k$, то $\operatorname{tg} x=-\frac{3}{\sqrt{7}}$. Значит, данные x являются решением задачи и будут служить ответом.

Ответ: $x=\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi k$; $k\in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{1+2\cos 2x}=0$.

2. Решить уравнение $\dfrac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x}=0$.

3. Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\sin x+\sin 2x}=0$.

4. Решить уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sin x}{\cos x}=\dfrac{\cos x}{2}$.

5. Решить уравнение $\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{2\sin x}=1$.

6. Решить уравнение $\dfrac{4\sin x-2\cos 2x-1}{\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2}=0$.

7. Решить уравнение $\cos 8x \operatorname{ctg} x + 2\sin^2 4x = \operatorname{ctg} x$.

8. Найти все решения уравнения

$$\frac{2(\cos x + \sin x) + 1 - \cos 2x}{2(1 + \sin x)} = \sqrt{3} + \sin x.$$

9. Решить уравнение

$$\frac{|1 - \cos x|}{1 - \cos x} \cdot \sin x = 4\sin^2 x \cdot \cos x.$$

10. Решить уравнение $\dfrac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x$.

11. Найти все решения уравнения $\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}$, лежащие в промежутке $x \in [0, \pi)$.

12. Найти все значения x, при каждом из которых выражения $\dfrac{\sqrt{3}\cos^4 \frac{x}{4} - \sqrt{3}\sin^4 \frac{x}{4}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ и $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ принимают равные значения.

§ 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы тригонометрических уравнений, которые мы будем рассматривать в данной главе, содержат, как правило, две переменные. При решении такой системы необходимо помнить, что если обе переменные принимают бесконечно много значений, то для их записи необходимо использовать разные буквы, обозначающие целые числа. Например, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \pi n$; $k, n \in Z$. Действительно, мы можем выбрать в качестве x любое число из первой серии, а в качестве y — любое число из второй. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0,\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что либо $\sin x=0$, либо $\cos y=0$. Если $\sin x=0$, то второе уравнение системы принимает вид $\cos 2y=-2$ и не имеет решений. Если же $\cos y=0$, имеем:

$$\begin{cases}\cos y=0,\\ \sin x\ge 0,\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos y=0,\\ \sin x\ge 0,\\ 2\sin^2 x-(2\cos^2 y-1)-2=0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=0,\\ \sin x\ge 0,\\ 2\sin^2 x=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos y=0,\\ \sin x\ge 0,\\ \sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}};\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad k,n\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left((-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)\right\};\quad k,n\in Z.$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}81^{\operatorname{tg} x}-8\cdot 9^{\operatorname{tg} x}-9=0,\\ \sqrt{y-6}+12\cos x=0.\end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы следующим образом:

$$81^{\operatorname{tg} x}-8\cdot 9^{\operatorname{tg} x}-9=0 \Leftrightarrow (9^{\operatorname{tg} x}-9)(9^{\operatorname{tg} x}+1)=0 \overset{\text{т.к. } 9^{\operatorname{tg} x}>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\quad 9^{\operatorname{tg} x}=9 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Если $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, то второе уравнение системы принимает вид

$$\sqrt{y-6}+12\cos\frac{\pi}{4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{y-6}=-6\sqrt{2}$$

и не имеет решений. Если же $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, то второе уравнение системы преобразуется следующим образом:

$$\sqrt{y-6}+12\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{y-6}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow y-6=72 \Leftrightarrow y=78.$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить пары чисел $(x,y)=\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, 78\right)$, где k — любое целое число.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, 78\right)\right\}$; $k \in Z$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5+4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5+4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5+4\left(1-\sin^2 y\right), \\ 2\cos^2 x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 y + 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x - 9 = 0, \\ \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4\sin^2 y + 4\sin y - 15 = 0, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \\ \begin{cases} 4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{т.к. } |\sin y| \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \\ x = \pm \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad k, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\pm \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k \right) \right\}$; $k, n \in Z$.

Пример 4. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \sin(2x + y) = 0 \\ \cos(x + y) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $-\pi \le x \le \pi$, $-2\pi \le y \le -\pi$.

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} \sin(2x + y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = \pi k, \\ x + y = 2\pi n, \quad k, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi(k - 2n), \\ y = \pi(4n - k). \end{cases}$$

Так как $k - 2n$ — целое число и x лежит на отрезке $[-\pi, \pi]$, то достаточно рассмотреть случаи, когда $x = -\pi$, $x = 0$ и $x = \pi$.

Пусть $x = -\pi$. Имеем:

$$\begin{cases} \sin(-2\pi + y) = 0, \\ \cos(-\pi + y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pi + 2\pi m, \; m \in Z \quad \overset{\text{т.к. } y \in [-2\pi, -\pi]}{\Leftrightarrow} \quad y = -\pi.$$

Пусть $x = 0$. Имеем:

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow y = 2\pi m \quad \overset{\text{т.к. } y \in [-2\pi, -\pi]}{\Leftrightarrow} \quad y = -2\pi.$$

Пусть $x = \pi$. Имеем:

$$\begin{cases} \sin(2\pi + y) = 0, \\ \cos(\pi + y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pi + 2\pi m, \; m \in Z \quad \overset{\text{т.к. } y \in [-2\pi, -\pi]}{\Leftrightarrow} \quad y = -\pi.$$

Значит, ответом к задаче будут служить пары чисел $(x, y) = (-\pi, -\pi)$; $(0, -2\pi)$; $(\pi, -\pi)$.

Ответ: $\{(-\pi, -\pi); (0, -2\pi); (\pi, -\pi)\}$.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 40\log_3 y^2 = 163, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\log_y 9} = \dfrac{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 40\log_3 y^2 = 163, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\log_y 9} = \dfrac{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 40\log_3 y^2 = 163, \\ 2\log_9 y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x},\ y \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 40\log_3 y^2 = 163, \\ 2\log_9 y = 1 + \operatorname{tg} x; \end{cases} \Leftrightarrow\ 3(2\log_9 y - 1) + 40\log_3 y^2 = 163 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\log_3 y - 3 + 80\log_3 y = 163 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 83\log_3 y = 166 \Leftrightarrow \log_3 y = 2 \Leftrightarrow y = 9.$$

Подставляя найденное значение y во второе уравнение последней системы, получаем, что $\operatorname{tg} x = 1$ и $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in Z$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 9\right)\right\};\ k \in Z$.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} |\sin y|\sin y = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}, \\ |\cos x - 1|^2 + |\sin y|^2 = 4. \end{cases}$$

Решение. Если $\cos x$ и $\sin y$ имеют разные знаки, то первое уравнение системы преобразуется к виду $\sin^2 y = -1$ и решений не имеет. Если же $\cos x$ и $\sin y$ одного знака, то $\sin^2 y = 1$, откуда $\sin y = \pm 1$. Преобразуем второе уравнение системы. Имеем:

$$|\cos x-1|^2+|\sin y|^2=4 \Leftrightarrow (\cos^2 x-2\cos x+1)+1=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-2\cos x-2=0 \Leftrightarrow \cos x=1-\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\arccos(1-\sqrt{3})+2\pi k;\ k\in Z,$$

так как второй корень квадратного уравнения больше 1. Поскольку $\cos x=1-\sqrt{3}<0$, то и $\sin y<0$. Следовательно, $\sin y=-1$ и $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z$.

Ответ: $\left\{\left(\pm\arccos(1-\sqrt{3})+2\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right\};\ k,n\in Z$.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases}\cos y\cdot 3^{x^3+8}=27^{x^2+2x}\cdot|\cos y|,\\ 2\sin y=\log_2 x.\end{cases}$$

Решение. Если $\cos y<0$, то первое уравнение системы решений не имеет. При $\cos y>0$ это уравнение преобразуется к виду

$$3^{x^3+8}=27^{x^2+2x} \Leftrightarrow x^3+8=3x^2+6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=3x(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-5x+4)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-4)=0.$$

Значение $x=-2$ не принадлежит области определения системы. Если $x=1$, то $\sin y=0$ и (так как $\cos y>0$) $y=2\pi n;\ n\in Z$. При $x=4$ получаем, что $\sin y=1$ и условие $\cos y>0$ не выполняется.

Пусть теперь $\cos y=0$. Тогда возможны два случая. Если $\sin y=1$, то есть $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, то $\log_2 x=2$ и $x=4$. Если же $\sin y=-1$, при этом $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, тогда $\log_2 x=-2$ и $x=\frac{1}{4}$.

Ответ к задаче получаем как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $\left\{(1, 2\pi n); \left(\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right); \left(4, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right\};\quad n\in Z$.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} 2\sin(2x+y)\sin y = \cos 2x, \\ \sin 2x - \sin 2y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы следующим образом:

$$2\sin(2x+y)\sin y = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \cos(2x+2y) = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x+2y) = 0 \Leftrightarrow 2x+2y = \frac{\pi}{2}+\pi m; \quad m \in Z.$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала m — четное число, то есть $m = 2l$; $l \in Z$. Тогда $2x+2y = \frac{\pi}{2}+2\pi l$ и $2y = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi l$. Подставим это выражение во второе уравнение системы. Имеем:

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi l\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \pi k.$$

Далее,

$$y = \frac{\pi}{4} - x + \pi l = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} + \pi(l-k) = -\frac{\pi}{8} + \pi n; \; n \in Z.$$

Пусть теперь $m = 2l + 1$; $l \in Z$. При этом

$$2x+2y = \frac{\pi}{2} + \pi(2l+1) \text{ и } 2y = \frac{3\pi}{2} - 2x + 2\pi l.$$

В этом случае получаем, что

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x + 2\pi l\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi k.$$

Следовательно,

$$y=\frac{3\pi}{4}-x+\pi l=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{8}+\pi(l-k)=\frac{5\pi}{8}+\pi n;\ n\in Z.$$

Объединяя все разобранные случаи, получаем ответ к за-
іе.

Ответ: $\left\{\left(\frac{3\pi}{8}+\pi k,-\frac{\pi}{8}+\pi n\right);\left(\frac{\pi}{8}+\pi k,\frac{5\pi}{8}+\pi n\right)\right\};\ k,n\in Z.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}49^{-\operatorname{tg}x}-14\cdot 7^{-\operatorname{tg}x}+49=0,\\ 3\sqrt{y}\cdot\operatorname{tg}x-5\sqrt{2}\cos x=0.\end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}y+\sin x=0,\\ (2\sqrt{\sin x}-1)(2y+5)=0.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}121^{\cos x}-2\cdot 11^{\cos x}+1=0,\\ 7^{y+4}-\sin x=0.\end{cases}$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+\sin(x+y)=\frac{3}{2},\\ 3x-\sin(x+y)=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}12\sin^2 x-\sin^2 y=3,\\ 6\sin x+\cos y=-2.\end{cases}$$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x-\sin 1=0,\\ \cos x-\cos 1=0.\end{cases}$$

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x - \sin y = 0, \\ 4\sin x + 2\cos y = 5. \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

9. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2(x-y) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}(x-y) + 1 = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $-\pi \le y \le 0$.

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y = x, \\ 2\sin x + \sin 2x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

§ 5. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим сначала как решаются простейшие тригонометрические неравенства. Неравенства вида $\sin x > a$ решаются следующим образом:

$$\sin x > a \Leftrightarrow x \in (\arcsin a + 2\pi k, \pi - \arcsin a + 2\pi k); \quad k \in Z$$

при $a \in [-1, 1)$. Если $a \ge 1$, то данное неравенство решений не имеет. Если же $a < -1$, то решением неравенства является любое $x \in R$. Неравенство $\sin x < a$ имеет решением следующие промежутки:

$$\sin x < a \Leftrightarrow x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi k, \arcsin a + 2\pi k)$$

при $a \in [-1,\ 1)$. Неравенства $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$ соответственно равносильны:

$$\cos x > a \Leftrightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi k, \arccos a + 2\pi k), \quad a \in [-1,1);$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow x \in (\arccos a + 2\pi k, 2\pi - \arccos a + 2\pi k), \quad a \in (-1,1];$$

$$\operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right);$$

$$\operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k\right).$$

Обратим внимание, что внутри промежутка разные буквы писать нельзя, например, запись $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi n)$; $k, n \in Z$ является недопустимой. Для того чтобы решить тригонометрическое неравенство, необходимо свести его к нескольким простейшим. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Найти все x из отрезка $0 \le x \le \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x + \sqrt{2} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \sin x - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2 \sin x - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0, \\ 2 \sin x - 1 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0, \\ 2 \sin x - 1 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x < \dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{3\pi}{4}+2\pi k, \\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{4}+2\pi k, \quad k \in Z; \end{array}\right. \overset{\text{т.к. } x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \quad x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$

Решение изображено на рисунке 21.

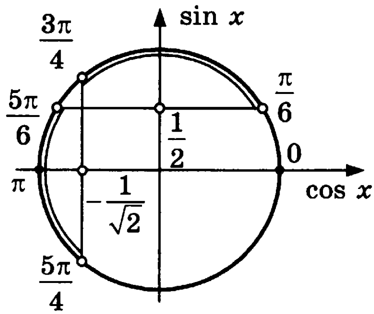


Рис. 21

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

Пример 2. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \geq 0, \\ \cos x - \sin x > 0, \\ \sin 2x < (\cos x - \sin x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \geq 0, \\ \cos x > \sin x, \\ \sin 2x < 1 - \sin 2x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos x > \sin x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\pi k \leq 2x < \frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k < 2x \leq \pi + 2\pi k, \end{array}\right. \\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n, \quad k, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\pi k \le x < \frac{\pi}{12} + \pi k, \\ &\frac{5\pi}{12} + \pi k < x \le \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{aligned}\right. \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &-\frac{7\pi}{12} + 2\pi k < x \le -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ &2\pi k \le x < \frac{\pi}{12} + 2\pi k; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\overset{\textit{т.к. } x\in(-\pi,\pi)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{12}\right),$$

как изображено на рисунке 22.

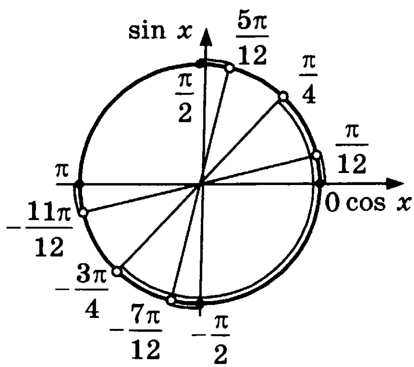


Рис. 22

Ответ: $x \in \left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{12}\right)$.

Пример 3. На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0, \\ 1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0, \\ 1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x \sin x + \sin^2 x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0, \\ 0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0.$$

Если $x = 0$, то полученное неравенство верно. Если $x = \pi$, то это неравенство не выполняется. Если $x \in (0, \pi)$, то $\sin x > 0$ и мы можем разделить обе части неравенства на $\sin x$:

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{\text{т.к. } x \in (0,\pi)}{\Leftrightarrow} x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Таким образом, ответом к задаче служит отрезок $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Пример 4. Найти все отрицательные значения u, при которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_{3\cos u} 3} + \frac{1}{\log_3 \frac{\cos u}{3}} \ge 0.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\frac{1}{\log_{3\cos u} 3} + \frac{1}{\log_3 \frac{\cos u}{3}} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\log_3 3\cos u}} + \frac{1}{\log_3 \frac{\cos u}{3}} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{1 + \log_3 \cos u}} + \frac{1}{\log_3 \cos u - 1} \ge 0.$$

Пусть $\log_3 \cos u = x$. Имеем:

$$\frac{1}{\frac{1}{1+x}} + \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x+1+\frac{1}{x-1} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ \frac{x^2}{x-1} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x > 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 \cos u = 0, \\ \log_3 \cos u > 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos u = 1, \\ \cos u > 3; \end{array}\right. \overset{\text{т.к.} |\cos u| \leq 1}{\Leftrightarrow} \quad \cos u = 1 \Leftrightarrow u = 2\pi k; k \in Z.$$

Так как нужно найти только отрицательные решения неравенства, имеем $u = 2\pi k,\ k \in Z, k < 0$.

Ответ: $u = 2\pi k;\ k \in Z, k < 0$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5 (x^2 - 9) < 0.$$

Решение. Так как $|\cos x| \leq 1$ при любом x, данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5 (x^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \pm 1, \\ \log_5 (x^2 - 9) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi k, \quad k \in Z, \\ 0 < x^2 - 9 < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi k, \\ x \in (-\sqrt{10} - 3) \cup (3, \sqrt{10}). \end{cases}$$

Сравним числа π и $\sqrt{10}$.

Имеем: $\pi < 3{,}15 = \sqrt{9{,}9225} < \sqrt{10}$. Таким образом, ответом к задаче будут служить промежутки

$$x \in (-\sqrt{10}, -\pi) \cup (-\pi, -3) \cup (3, \pi) \cup (\pi, \sqrt{10}).$$

Ответ: $x \in (-\sqrt{10}, -\pi) \cup (-\pi, -3) \cup (3, \pi) \cup (\pi, \sqrt{10})$.

Пример 6. Найти все значения x из промежутка $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющие неравенствам

$$(4 + \sqrt{3}) \sin x + 2\sqrt{3} + 1 \leq \cos 2x \leq 5 \cos x - 3.$$

Решение. Преобразуем сначала первое из двух неравенств. Имеем:

$$(4+\sqrt{3})\sin x+2\sqrt{3}+1\le\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(4+\sqrt{3})\sin x+2\sqrt{3}+1\le 1-2\sin^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+(4+\sqrt{3})\sin x+2\sqrt{3}\le 0\Leftrightarrow(2\sin x+\sqrt{3})(\sin x+2)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right];\quad k\in Z,$$

поскольку выражение $\sin x+2$ положительно при всех значениях x. Второе из двух неравенств равносильно следующему неравенству:

$$\cos 2x\le 5\cos x-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1\le 5\cos x-3\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\cos x\le 2\Leftrightarrow\cos x\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\frac{\pi}{3}+2\pi n\right];\ n\in Z.$$

Таким образом (рисунок 23), решением системы неравенств будут служить $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi m$; $m\in Z$. Так как при этом $x\in[-\pi,\pi]$, то $x=-\frac{\pi}{3}$.

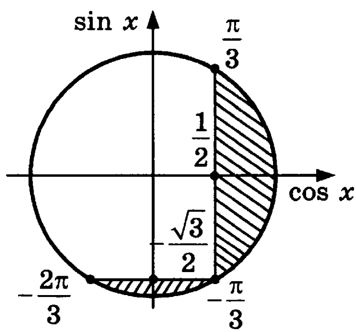


Рис. 23

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}$.

Пример 7. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x+8-\sqrt{3}}}.$$

Решение. Рассмотрим выражение

$$y(x)=-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x+8-\sqrt{3}$$

и докажем, что $y(x) > 0$ при любых значениях x. Имеем:

$$y(x)=-6\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}-\sin 4x+8-\sqrt{3}=$$

$$=3\cos 4x-\sin 4x+5-\sqrt{3}=\sqrt{10}\cos(4x+\phi)+5-\sqrt{3},$$

где $\cos\phi=\frac{3}{\sqrt{10}}$, а $\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Так как минимальное значение выражения $\sqrt{10}\cos(4x+\phi)$ равно $(-\sqrt{10})$, для доказательства неравенства $y(x) > 0$ достаточно показать, что

$$-\sqrt{10}+5-\sqrt{3}>0 \Leftrightarrow \ 5>\sqrt{10}+\sqrt{3} \Leftrightarrow 25>13+2\sqrt{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12>2\sqrt{30} \Leftrightarrow 6>\sqrt{30} \Leftrightarrow 36>30.$$

Таким образом, областью определения функции $f(x)$ будет служить множество всех действительных чисел.

Ответ: $x\in R$.

Пример 8. Найти все значения $x\in[0,\pi]$, при которых выражения $\operatorname{ctg} x$ и $\cos 2x-\frac{1}{2\cos 2x}$ имеют разные знаки.

Решение. Числа a и b имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $ab < 0$. В связи с этим замечанием имеем:

$$\operatorname{ctg} x\left(\cos 2x-\frac{1}{2\cos 2x}\right)<0 \Leftrightarrow \ \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{2\cos^2 2x-1}{\cos 2x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x\cos 4x}{\sin x\cos 2x}<0 \Leftrightarrow \ \sin x\cos x\cos 2x\cos 4x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos 2x\cos 4x<0 \Leftrightarrow \ \sin 4x\cos 4x<0 \Leftrightarrow \ \sin 8x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi+2\pi k<8x<2\pi+2\pi k;\quad k\in Z \Leftrightarrow \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{4}.$$

Так как $x \in [0, \pi]$, то окончательно получаем (рисунок 24), что $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}, \pi\right)$.

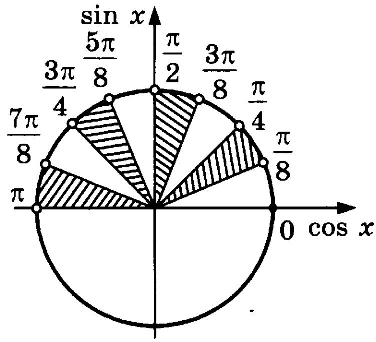


Рис. 24

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}, \pi\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $\log_{\cos x} \operatorname{tg} x + \log_{\cos x} 1{,}5 \geq 1$.

2. Найти все значения x из промежутка $-1 < x < 4$, удовлетворяющие неравенству $\log_{0,75} \sin x \geq \log_{\frac{9}{16}} 0{,}75$.

3. Решить неравенство $2\sin^2 2x + 3\cos 2x < 0$.

4. Решить неравенство $\log_2(1+\cos 4x) \leq 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x$.

5. Решить неравенство $2\cos 8x \geq 3 + 4\sin 4x$.

6. Решить неравенство $1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \log_3 \sin x - \log_3 \cos x} > 0$.

7. Решить неравенство $11\sin x + \cos 2x - 6 \leq 0$.

8. Решить неравенство $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq \frac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}$.

9. Решить неравенство $2\sin x - 1 \leq \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

10. Решить неравенство

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \geq \log_{\cos x - 0,5}\left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}\right).$$

Глава II
СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. НАХОЖДЕНИЕ УГЛОВ

1.1. Угол между прямыми

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из двух углов, образованных этими прямыми (если полученные углы одинаковы, то данный угол является прямым). *Углом между скрещивающимися прямыми l и m* называется угол между пересекающимися прямыми l и m_1, где m_1 параллельна m. *Угол между параллельными или совпадающими прямыми* считаем равным нулю.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение: Угол между прямой AB_1 и прямой BC_1 равен углу между прямой AB_1 и прямой AD_1, параллельной прямой BC_1 (рисунок 1). Этот угол найдем из треугольника AB_1D_1. Так как треугольник AB_1D_1 — равносторонний (каждая его сторона есть диагональ какой-либо грани куба), то искомый угол равен 60°.

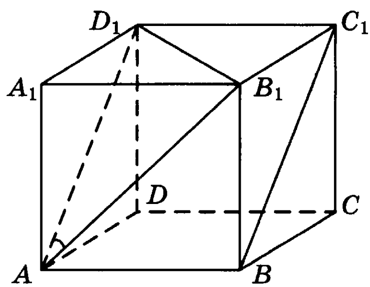


Рис. 1

Ответ: 60°.

Пример 2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти угол между прямыми BM и DE, где M — середина ребра SC.

Решение: Пусть точка M_1 — проекция точки M на плоскость основания данной пирамиды. Так как вершина S проектируется на эту плоскость в точку O — центр шестиугольника $ABCDEF$, то M_1 есть середина отрезка CO (рисунок 2). Точка M_1 также является серединой отрезка BD (рисунок 3), поэтому прямая BM проектируется на плоскость основания в прямую BD.

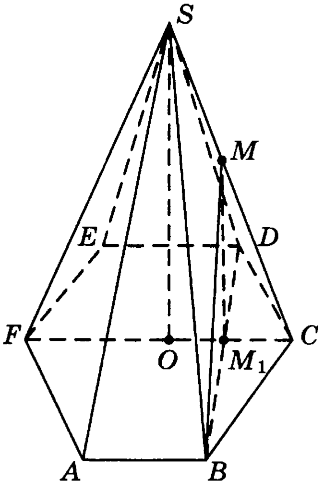


Рис. 2

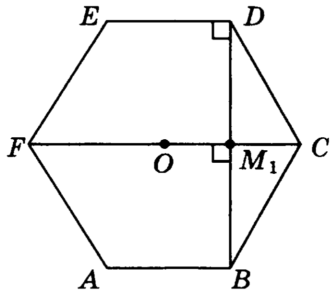


Рис. 3

Так как прямая BD перпендикулярна прямой DE, то по теореме о трех перпендикулярах прямая BM также перпендикулярна прямой DE.

Ответ: 90°.

Пример 3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$, $AA_1 = 2$. Найти угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1.

Решение: Пусть K — середина отрезка AA_1, L — середина отрезка B_1C_1, а M — центр грани BB_1C_1C (рисунок 4). Так как прямые KL и AM параллельны, то угол между прямыми KL и AC_1 равен углу между прямыми AM и AC_1. Будем искать этот угол из треугольника AMC_1. Имеем:

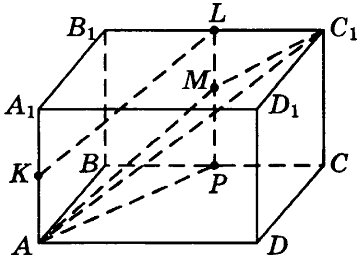


Рис. 4

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{36+9+4} = 7,$$

$$C_1M = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+4} = \sqrt{10},$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BP^2 + PM^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}.$$

Здесь P — середина отрезка BC. Далее, применив к треугольнику AMC_1 теорему косинусов, получим, что

$$\cos\angle MAC_1 = \frac{AM^2 + AC_1^2 - MC_1^2}{2AM \cdot AC_1} = \frac{19+49-10}{2\cdot 7\cdot\sqrt{19}} = \frac{29}{7\sqrt{19}}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}$.

Ответ: $\arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}$.

Пример 4. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

Решение: Пусть K — середина ребра BC, L — середина ребра AB. Проведем через точку K прямую KM, параллельную прямой CL. При этом пусть точка M лежит на стороне AB треугольника ABC, а, значит, является серединой отрезка BL (рисунок 5). Угол между прямыми SK и CL будет равен углу между прямыми SK и KM. Найдем этот угол из треугольника SKM. Имеем:

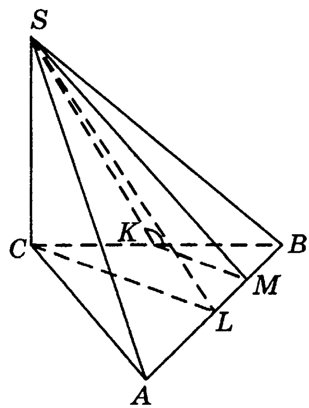


Рис. 5

$$SK = \sqrt{SC^2 + CK^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3},$$

$$KM = \frac{1}{2}CL = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 - BL^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32-8} = \sqrt{6},$$

$$SM = \sqrt{SL^2 + ML^2} = \sqrt{SC^2 + CL^2 + ML^2} = \sqrt{4+24+2} = \sqrt{30}.$$

Применив к треугольнику SKM теорему косинусов, получим, что

$$\cos\angle SKM = \frac{SK^2 + KM^2 - SM^2}{2SK \cdot KM} = \frac{12+6-30}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, угол SKM равен $135°$, а угол между прямыми SK и KM равен $45°$.

Ответ: $45°$.

Пример 5. Грань $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найти угол между прямыми A_1B и AS.

Решение: Пусть длина ребра куба равна 1. Рассмотрим сначала случай, когда точка S лежит внутри куба. Тогда S — центр куба, и прямая AS совпадает с прямой AC_1 (рисунок 6). Прямая AB_1, являющаяся проекцией прямой AC_1 на плоскость AA_1B_1B, перпендикулярна прямой A_1B. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, прямая AC_1 также перпендикулярна прямой A_1B.

Пусть теперь точка S лежит вне куба (рисунок 7). Осуществим параллельный перенос прямой AS, при котором точка A перейдет в точку A_1. При этом параллельном переносе точка S перейдет в точку S_1, являющуюся центром куба.

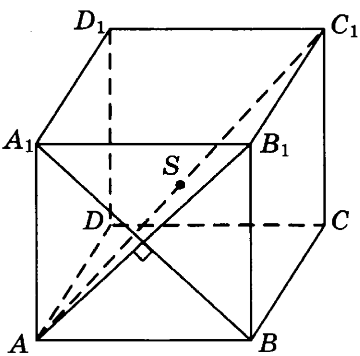


Рис. 6

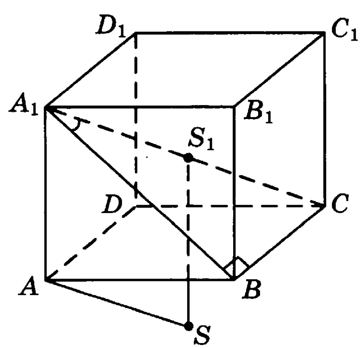


Рис. 7

Угол между прямыми A_1B и AS будет равен углу между прямыми A_1B и A_1S_1, или, что то же самое, углом между прямыми A_1B и A_1C. Найдем этот угол из треугольника A_1BC. Этот треугольник прямоугольный ($\angle A_1BC = 90°$), следовательно, $\operatorname{tg}\angle BA_1C = \frac{BC}{A_1B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $90°$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 6. Угол между скрещивающимися в пространстве прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F — середины отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найти угол ACB, если $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

Решение: Пусть A_1 и B_1 — проекции соответственно точек A и B на плоскость, проходящую через прямую CD параллельно прямой AB (рисунок 8). Тогда $A_1F = FB_1 = \sqrt{5}$, $AA_1 = BB_1 = \sqrt{13}$ и $\angle A_1FC = \arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$ (если поменять местами точки A и B, ответ будет тот же самый). Сначала по теореме косинусов из треугольников A_1FC и B_1FC найдем длины отрезков A_1C и B_1C. Имеем:

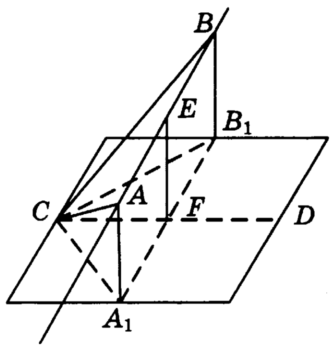


Рис. 8

$$A_1C = \sqrt{A_1F^2 + FC^2 - 2A_1F\cdot FC\cdot\cos\angle A_1FC} =$$
$$= \sqrt{5 + 7 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{35}}{10}} = \sqrt{5},$$
$$B_1C = \sqrt{B_1F^2 + FC^2 - 2B_1F\cdot FC\cdot\cos\angle B_1FC} =$$
$$= \sqrt{5 + 7 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{35}}{10}} = \sqrt{19}.$$

Далее,

$$AC = \sqrt{A_1C^2 + AA_1^2} = \sqrt{5+13} = 3\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{B_1C^2 + BB_1^2} = \sqrt{19+13} = 4\sqrt{2}.$$

Применив теперь теорему косинусов к треугольнику ABC, получим, что

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\cdot BC} = \frac{18+32-20}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{5}{8}.$$

Следовательно, угол ACB равен $\arccos\frac{5}{8}$.

Ответ: $\arccos\frac{5}{8}$.

Пример 7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P лежит на диагонали AC грани $ABCD$, а точка Q — на диагонали DC_1 грани CC_1D_1D, при этом PQ — общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1. Чему равна величина угла PDQ?

Решение: Пусть длина ребра куба равна 1. Обозначим через O и O_1 центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно и спроектируем прямую AC на плоскость A_1C_1D, параллельную этой прямой (рисунок 9). Пусть H — проекция точки O на плоскость A_1C_1D, а $Q \in DC_1$ — проекция точки $P \in AC$ на эту же плоскость (то есть PQ — общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1). Тогда $PQ = OH$. Найдем длину этого отрезка из треугольника DOO_1. Имеем:

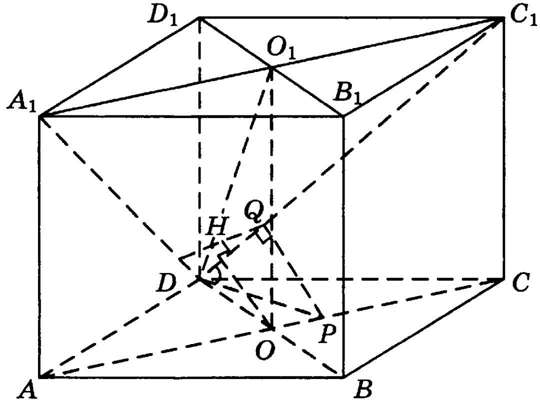


Рис. 9

$$DO_1 = \sqrt{OD^2 + OO_1^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$OH = \frac{OD \cdot OO_1}{DO_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из этого же треугольника найдем, что

$$DH = \sqrt{OD^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Для того, чтобы найти длину отрезка DQ, рассмотрим подобные треугольники DHQ и DO_1C_1. Имеем:

$$\frac{DH}{DO_1} = \frac{DQ}{DC_1} \Leftrightarrow DQ = \frac{DH \cdot DC_1}{DO_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Наконец, из прямоугольного треугольника PQD найдем, что $\operatorname{tg}\angle PDQ = \frac{PQ}{DQ} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Следовательно, угол PDQ равен $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Пример 8. Каждое из ребер треугольной пирамиды $ABCD$ имеет длину 1. Точка P на ребре AB, точка Q на ребре BC точка R на ребре CD взяты так, что $AP = \frac{1}{2}$, $BQ = CR = \frac{1}{3}$. Плоскость PQR пересекает прямую AD в точке S. Найти величину угла между прямыми SP и PR.

Решение: Построим сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR. Для этого в плоскости ABC проведем прямую PQ до пересечения с прямой AC в точке T. Далее, в плоскости ACD проведем прямую TR. Эта прямая пересечет прямую AD в точке S. Тогда $PQRS$ — искомое сечение (рисунок 10). Угол между прямыми SP и PR будем искать из треугольника SPR. Найдем стороны этого треугольника.

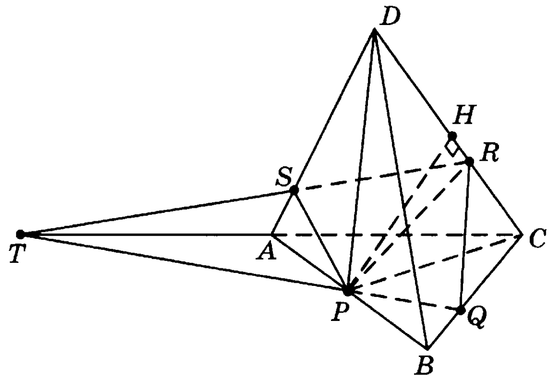


Рис. 10

Применив к треугольнику ABC и секущей PQ теорему Менелая, получим, что

$$\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AT}{TC}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{AT}{TC}=1 \Leftrightarrow \frac{AT}{TC}=\frac{1}{2}.$$

Применим теперь теорему Менелая к треугольнику ADC и секущей SR. Имеем:

$$\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{AT}{TC}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{DS}{SA}=\frac{4}{1},$$

откуда $DS=\frac{4}{5}$ и $AS=\frac{1}{5}$. Длину отрезка SP найдем по теореме косинусов из треугольника SAP. Имеем:

$$SP=\sqrt{AS^2+AP^2-2AS\cdot AP\cdot\cos\angle SAP}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{19}}{10}.$$

Аналогично, применив теорему косинусов к треугольнику SDR, найдем SR. Имеем:

$$SR=\sqrt{DS^2+DR^2-2DS\cdot DR\cdot\cos\angle SDR}=$$

$$=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{9}-2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{124}}{15}.$$

Для того, чтобы найти длину отрезка PR, рассмотрим треугольник PDC. В этом треугольнике $PD = PC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CR = \frac{1}{3}$, $DR = \frac{2}{3}$. Пусть H — середина стороны CD. Тогда PH — высота и $\cos\angle PCH = \frac{CH}{PC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Применив теперь теорему косинусов к треугольнику PCR, получим, что

$$PR = \sqrt{PC^2 + CR^2 - 2PC \cdot CR \cdot \cos\angle PCR} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{19}}{6}.$$

И, наконец, применим теорему косинусов к треугольнику SPR. Имеем:

$$\cos\angle SPR = \frac{SP^2 + PR^2 - SR^2}{2SP \cdot PR} = \frac{\frac{19}{100} + \frac{19}{36} - \frac{124}{225}}{2 \cdot \frac{\sqrt{19}}{10} \cdot \frac{\sqrt{19}}{6}} = \frac{5}{19}.$$

Таким образом, искомый угол равен $\arccos\frac{5}{19}$.

Ответ: $\arccos\frac{5}{19}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми AD_1 и OC_1, где O — центр грани $ABCD$.

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти угол между прямыми SB и CD.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 10$, $AD = 6$ и $AA_1 = 2$. Найти угол между прямыми AC_1 и KL, где K — центр грани AA_1D_1D, а L — середина отрезка AB.

4. В трехгранном угле $OABC$ с вершиной O все внутренние двугранные углы равны $\arccos\frac{1}{3}$. Найти угол между ребром OA и биссектрисой угла BOC.

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2. Ребро AE перпендикулярно основанию, длина этого ребра равна 1. Найти угол между прямыми AC и EF, где F — середина ребра AB.

6. В тетраэдре $SPQR$ угол между скрещивающимися ребрами SP и QR равен $\arccos\frac{1}{3}$. Пусть M — середина отрезка SP, а N — середина отрезка QR. Известно, что MN — общий перпендикуляр к прямым SP и QR. Кроме того, $SP = 12$, $QR = 4$, $MN = 3$. Найти угол QPR.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая l служит общим перпендикуляром к прямым BC_1 и B_1D_1. Найти угол между прямыми l и A_1D.

1.2. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. В том случае, если эта проекция является точкой, мы говорим, что данный угол равен 90°. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 21\sqrt{3}$, $SC = 29$. Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение: Пусть P и Q — середины ребер AS и BC соответственно, SO — высота пирамиды, точка H — проекция точки P на плоскость ABC (рисунок 11). Угол между прямой PQ и плоскостью ABC есть угол между прямыми PQ и HQ. Найдем этот угол из треугольника PHQ. В равностороннем треугольнике ABC медиана AQ равна $21\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{63}{2}$. Кроме этого, точка O делит отрезок AQ в отношении 2:1, считая от точки A, а H — середина отрезка AO. Поэтому $AH = HO = OQ = \dfrac{21}{2}$ и $HQ = 21$.

Из треугольника ASO найдем высоту SO пирамиды $SABC$.

Имеем:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} =$$

$$= \sqrt{29^2 - 21^2} = 20.$$

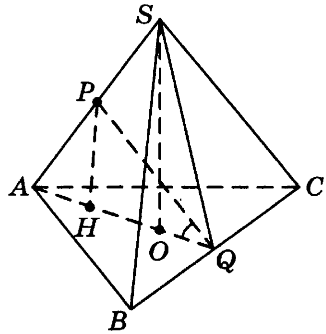


Рис. 11

Тогда отрезок PH равен половине высоты SO и равен 10. И, наконец, из треугольника PHQ получим, что $\operatorname{tg}\angle PQH = \dfrac{PH}{HQ} = \dfrac{10}{21}$. Таким образом, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{10}{21}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{10}{21}$.

Пример 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 3, а высота равна 1. Найти угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.

Решение: Так как плоскости AF_1C_1B и BB_1D_1D перпендикулярны, то перпендикуляр B_1H, опущенный из точки B_1 на плоскость AF_1C_1B, будет содержаться в плоскости BB_1D_1D, а основание H этого перпендикуляра будет лежать на линии пересечения этих плоскостей — прямой BO, между точками B и O, где O — точка пересечения отрезков B_1D_1 и C_1F_1 (рисунок 12). Тогда угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1 есть угол между прямыми F_1B_1 и F_1H. Найдем этот угол из треугольника F_1B_1H. В правильном шестиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной 3 длина диагонали F_1B_1 равна $3\sqrt{3}$. Найдем длину отрезка B_1H.

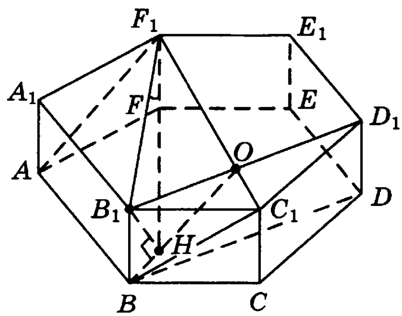


Рис. 12

Рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1O и его высоту B_1H. В этом треугольнике $BB_1 = 1$, $B_1O=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, поэтому $BO=\sqrt{BB_1^2+B_1O^2}=\sqrt{1+\frac{27}{4}}=\frac{\sqrt{31}}{2}$. Значит, $B_1H=\frac{BB_1\cdot B_1O}{BO}=$ $=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$. И, наконец, из треугольника F_1B_1H получим, что $\sin\angle B_1F_1H=\frac{B_1H}{B_1F_1}=\frac{1}{\sqrt{31}}$. Таким образом, искомый угол равен $\arcsin\frac{1}{\sqrt{31}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{31}}$.

Пример 3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Точка N — середина ребра CD. Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой AT, где T — середина отрезка SN.

Решение: Пусть SO — высота пирамиды, M — середина отрезка AB, H — проекция точки T на плоскость $ABCD$ (рисунок 13). Так как T — середина отрезка SN, то H — середина отрезка ON. Угол между прямой AT и плоскостью основания пирамиды есть угол между прямыми AT и AH. Найдем этот угол из треугольника ATH. Имеем:

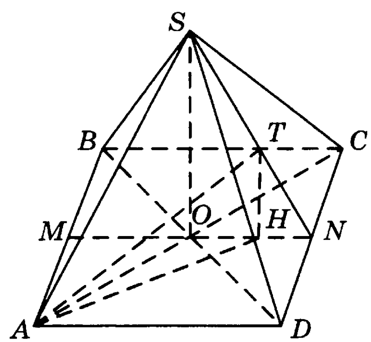


Рис. 13

$$TH=\frac{1}{2}SO=\frac{1}{2}\sqrt{SC^2-OC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{SC^2-\left(\frac{BC}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25-16}=\frac{3}{2}.$$

Длину отрезка AH найдем из треугольника AMH. В этом треугольнике $AM = 2\sqrt{2}$, $MH = 3\sqrt{2}$, поэтому

$$AH=\sqrt{AM^2+MH^2}=\sqrt{8+18}=\sqrt{26}.$$

Наконец, из треугольника ATH получим, что $\operatorname{tg}\angle TAH = \dfrac{TH}{AH} = \dfrac{3}{2\sqrt{26}}$. Таким образом, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2\sqrt{26}}$.

О т в е т: $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2\sqrt{26}}$.

Пример 4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 5. Точка M — середина ребра B_1C_1, а точка T — середина A_1M. Найти угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение: Пусть O — проекция точки T на плоскость ABC, а N — середина отрезка BC. В плоскости AA_1MN проведем перпендикуляр AH к прямой TN (рисунок 14). Так как плоскости AA_1MN и BCT перпендикулярны, то AH будет перпендикуляром к плоскости BCT. Таким образом, угол между прямой AT и плоскостью BCT есть угол между прямыми AT и TH.

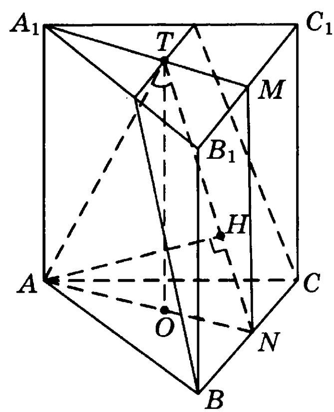


Рис. 14

Найдем этот угол из треугольника ATN. Треугольник ATN — равнобедренный: $AT = TN$, кроме того, $AN = 3$, $TO = 5$, O — середина AN.

Значит,

$$\angle ATN = 2\angle ATO = 2\operatorname{arctg}\frac{AO}{OT} = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{10}.$$

О т в е т: $2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{10}$.

Пример 5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S двугранный угол при ребре основания равен 45°. Найти угол между медианой CD грани SBC и плоскостью SAB.

Решение: Пусть O — центр грани ABC, M — середина отрезка AB, H — проекция точки C на плоскость SAB. Так как пирамида $SABC$ правильная, точка H принадлежит прямой SM (рисунок 15). Тогда угол между прямой CD и плоскостью SAB есть угол между прямыми CD и DH. Найдем этот угол из треугольника CDH. Предположим, что длина ребра основания пирамиды равна 1.

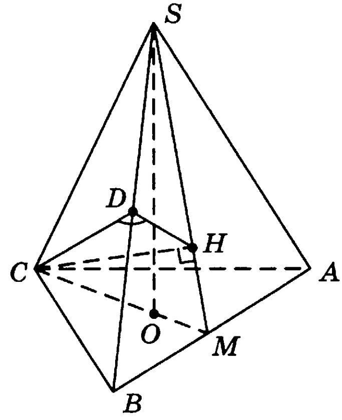


Рис. 15

Рассмотрим треугольник SMC в котором $MO = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, SO и CH — высоты, $\angle SMO = 45°$. Сначала заметим, что $SO = MO = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ и $SM = MO \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда

$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

и

$$CH = \frac{MC \cdot SO}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Длину отрезка CD найдем из треугольника BSC. В этом треугольнике $BS = SC = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$, $BC = 1$, CD — медиана. Применив формулу для вычисления длины медианы получим, что

$$CD = \frac{1}{2}\sqrt{2BC^2 + 2SC^2 - BS^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2 \cdot \frac{5}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{29}}{4\sqrt{3}}.$$

И, наконец, из треугольника CDH находим, что

$$\sin \angle CDH = \frac{CH}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{29}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$.

Пример 6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 2\sqrt{5}$, $AD = 1$, $AA_1 = 2$. Точка M лежит на отрезке BC_1, точка N лежит на отрезке BD, прямые AM и A_1N пересекаются. Найти угол между прямой D_1M и плоскостью BCC_1, если $BN:ND = 3:5$.

Решение: Так как прямые AM и A_1N пересекаются, то точки A, A_1, M и N лежат в одной плоскости. Построим эту плоскость. Сначала в плоскости $ABCD$ проведем прямую AN до пересечения с прямой BC в точке T. Затем в плоскости BB_1C_1C проведем прямую TT_1, параллельную прямой CC_1, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке T_1. Тогда ATT_1A_1 — искомая плоскость (рисунок 16), а точка M есть точка пересечения прямых BC_1 и TT_1.

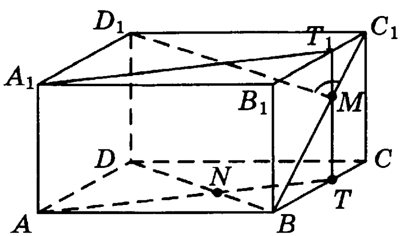


Рис. 16

Так как точка C_1 есть проекция точки D_1 на плоскость BB_1C_1C, то угол между прямой D_1M и плоскостью BCC_1 есть угол между прямыми D_1M и MC_1. Найдем этот угол из треугольника D_1MC_1. В плоскости $ABCD$ рассмотрим подобные треугольники AND и TNB. Имеем:

$$\frac{AD}{BT} = \frac{DN}{NB} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow BT = \frac{3}{5}AD = \frac{3}{5}$$

и $TC = T_1C_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Далее, рассмотрим в плоскости BB_1C_1C подобные треугольники BMT и C_1MT_1. Из этого подобия следует соотношение

$$\frac{TM}{MT_1}=\frac{BT}{T_1C_1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2-MT_1}{MT_1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow MT_1=\frac{4}{5}.$$

Из треугольника MT_1C_1 получим, что

$$MC_1=\sqrt{MT_1^2+T_1C_1^2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

И, наконец, из треугольника D_1MC_1 находим, что

$$\operatorname{tg}\angle D_1MC_1=\frac{D_1C_1}{MC_1}=2\sqrt{5}:\frac{2}{\sqrt{5}}=5.$$

Значит, искомый угол равен arctg 5.

Ответ: arctg 5.

Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10. Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 7. Медианы грани $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке T. Найти угол между плоскостью BCT и прямой AT.

3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые ребра равны 7, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, в которой $AB = 5$, $SA = 4$, точка E — середина ребра SB. Найти угол между прямой CE и плоскостью SBD.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра B_1C_1. Найти угол между прямой AK и плоскостью CD_1K.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Точка K лежит на стороне AB, а точка L — на стороне SC, при этом KL — общий перпендикуляр к прямым AB и SC. Найти угол между прямой KL и плоскостью BSC.

1.3. Угол между плоскостями

Угол между плоскостями определяется следующим образом. Пусть α и β — две данные плоскости, l — прямая их пересечения. Через любую точку прямой l проведем прямые a и b, лежащие в плоскостях α и β соответственно и перпендикулярные прямой l. Тогда углом между плоскостями α и β будем называть угол между прямыми a и b. Угол между параллельными плоскостями считаем равным нулю. Иногда для нахождения угла между плоскостями полезно применять следующую теорему. Пусть даны две неперпендикулярные пересекающиеся плоскости α и β, и пусть в плоскости α дан треугольник ABC. Пусть также $A_1B_1C_1$ — ортогональная проекция треугольника ABC на плоскость β. Тогда косинус угла между плоскостями α и β равен отношению площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1.

Решение: Пусть O — центр грани $ABCD$, а O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Так как треугольник AB_1D_1 — равнобедренный, то прямая AO_1 будет перпендикулярна прямой B_1D_1 (рисунок 17). Прямая O_1O, будучи перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1D_1$, также перпендикулярна прямой B_1D_1. Поэтому угол между плоскостями BDD_1B и AB_1D_1 есть угол между прямыми AO_1 и O_1O. Найдем этот угол из треугольника AO_1O. Предположим, что длина ребра куба равна 1.

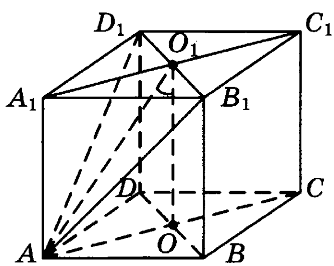


Рис. 17

Тогда $AO = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $O_1O = 1$. Поэтому $\operatorname{tg}\angle AO_1O = \dfrac{AO}{O_1O} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S, все ребра которой равны 1, найти угол между плоскостью SAD и плоскостью SAC.

Решение: Пусть O — центр грани $ABCD$, H — середина ребра SA. Так как треугольник SAD — равносторонний, то прямая DH будет перпендикулярна прямой SA (рисунок 18). Точка O является проекцией точки D на плоскость SAC, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, прямая OH будет также перпендикулярна SA.

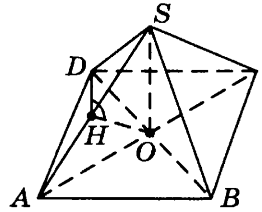


Рис. 18

Значит, угол между плоскостями SAD и SAC есть угол между прямыми DH и HO. Найдем этот угол из треугольника DHO. Треугольник SAD — равносторонний со стороной 1, поэтому его высота DH равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отрезок DO является половиной диагонали квадрата со стороной 1 и имеет длину $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\sin\angle DHO = \frac{DO}{DH} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Поэтому искомый угол равен $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Пример 3. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3. На отрезке AA_1 выбрана точка E так, что $AE{:}EA_1 = 1{:}2$. Найти угол между плоскостью основания призмы и плоскостью BED_1.

Решение: В плоскости AA_1D_1D проведем прямую D_1E до пересечения с прямой AD в точке P. Тогда точка P принадлежит как плоскости BED_1, так и плоскости $ABCD$. То же самое можно сказать и про точку B. Значит, прямая PB является линией пересечения этих двух плоскостей (рисунок 19). Из точки A опустим перпендикуляр AH на прямую PB. Так как точка A является проекцией точки E на плоскость основания призмы, то по теореме о трех перпендикулярах прямая EH также будет перпендикулярна PB. Следовательно, угол между плоскостями BED_1 и $ABCD$ есть угол между прямыми EH и AH. Найдем этот угол из треугольника EAH.

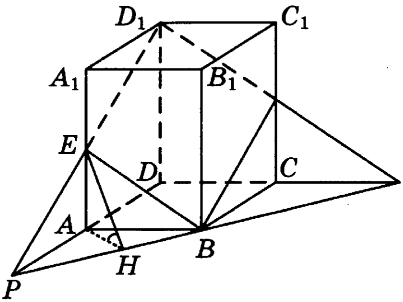


Рис. 19

Сначала рассмотрим подобные треугольники EA_1D_1 и EAP. Имеем:

$$\frac{A_1D_1}{AP} = \frac{EA_1}{EA} \Leftrightarrow AP = 1.$$

Далее, из треугольника PAB находим, что

$$PB = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{5} \text{ и } AH = \frac{AP \cdot AB}{PB} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Наконец, из треугольника EAH получаем, что

$$\operatorname{tg}\angle EHA = \frac{EA}{AH} = 1 : \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Пример 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 8$, $AD = 6$ и $CC_1 = 7$. Найти угол между плоскостями AD_1B_1 и CD_1B_1.

Решение: Наряду с данными двумя плоскостями рассмотрим плоскость BB_1D_1D. Из симметрии следует, что плоскости AD_1B_1 и CD_1B_1 образуют равные углы с этой плоскостью (рисунок 20).

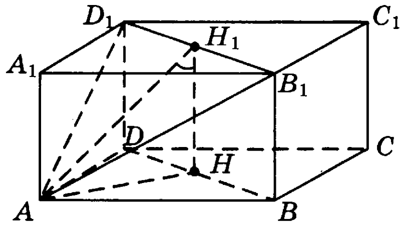


Рис. 20

Найдем угол между плоскостями AD_1B_1 и BB_1D_1B. Для этого в плоскости AD_1B_1 построим перпендикуляр AH_1 к прямой D_1B_1. Далее, из точки H_1 опустим перпендикуляр H_1H на плоскость $ABCD$. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, прямая AH будет перпендикулярна прямой DB. Угол между плоскостями AD_1B_1 и BB_1D_1D есть угол между прямыми AH_1 и H_1H. Найдем этот угол из треугольника AH_1H.

Длину отрезка AH будем искать из треугольника ADB. В этом треугольнике $AD = 6$, $AB = 8$, поэтому

$$DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 10 \text{ и } AH = \frac{AD \cdot AB}{DB} = 4{,}8.$$

Далее, из треугольника AH_1H получаем, что

$$\operatorname{tg}\angle AH_1H = \frac{AH}{H_1H} = \frac{4{,}8}{7} = \frac{24}{35}.$$

Значит, угол между плоскостями AD_1B_1 и BB_1D_1D равен $\operatorname{arctg}\frac{24}{35}$, а искомый угол равен $2\operatorname{arctg}\frac{24}{35}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{24}{35}$.

Пример 5. В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ известно, что $BC = 3$ и $BB_1 = 5$. На боковых ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 взяты точки L, M и N соответственно, так что $BL{:}LB_1 = 3{:}2$, $CM{:}MC_1 = 2{:}3$, $DN{:}ND_1 = 1{:}4$. Найти угол между плоскостями LMN и BCD.

Решение: Для вычисления искомого угла найдем площадь треугольника LMN, а также его проекции на плоскость основания прзмы — треугольника BCD (рисунок 21). Площадь равностороннего треугольника со стороной 3 равна $S_{\Delta BCD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Для нахождения площади треугольника LMN вычислим стороны этого треугольника.

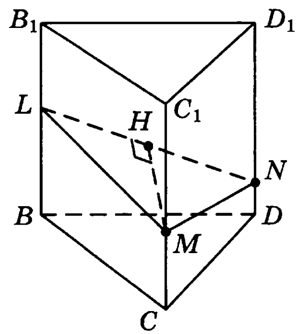


Рис. 21

Рассмотрим сначала прямоугольную трапецию $BCML$, в которой $BC = 3$, $BL = 3$, $CM = 2$. Гипотенуза этой трапеции равна

$$LM = \sqrt{BC^2 + (BL - CM)^2} = \sqrt{10}.$$

Аналогично, из прямоугольной трапеции $CDNM$ находим, что

$$MN = \sqrt{CD^2 + (CM - DN)^2} = \sqrt{10}.$$

И, наконец, из прямоугольной трапеции $BLND$ получаем, что

$$LN = \sqrt{BD^2 + (BL - DN)^2} = \sqrt{13}.$$

Таким образом, стороны треугольника LMN равны $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

Найдем теперь площадь треугольника LMN. Для этого проведем высоту MH этого треугольника. Так как треугольник LMN равнобедренный, то точка H есть середина отрезка LN. Тогда

$$MH = \sqrt{LM^2 - LH^2} = \sqrt{10 - \frac{13}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

и

$$S_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} LN \cdot MH = \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{39}}{4}.$$

Окончательно, косинус угла между плоскостями BCD и LMN равен отношению площадей этих треугольников, то есть

$$\cos\varphi = \frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta LMN}} = \frac{9\sqrt{3}}{4} : \frac{3\sqrt{39}}{4} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Пример 6. На боковых ребрах BB_1 и CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены точки L и M соответственно. Известно, что угол между прямыми A_1L и AB равен 45°, а угол между прямыми A_1M и AC равен 60°. Найти угол между плоскостями A_1LM и ABC.

Решение: Пусть прямая A_1L пересекает прямую AB в точке P, а прямая A_1M пересекает прямую AC в точке Q (рисунок 22). Проведем высоту AH треугольника APQ. Так как точка A является проекцией точки A_1 на плоскость ABC, то по теореме о трех перпендикулярах прямая A_1H будет также перпендикулярна прямой PQ. Значит, угол между плоскостями A_1LM и ABC есть угол между прямыми A_1H и AH. Найдем этот угол из треугольника AA_1H.

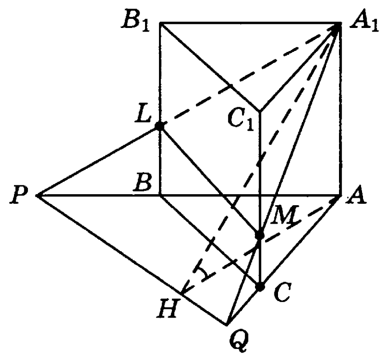


Рис. 22

Пусть, для определенности, $AA_1 = 1$. Найдем высоту AH треугольника APQ. Из прямоугольного треугольника AA_1P получаем, что $AP = AA_1 \cdot \operatorname{ctg}45° = 1$. Аналогично, из прямоугольного треугольника AA_1Q находим, что $AQ = AA_1 \cdot \operatorname{ctg}60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Применив теперь теорему косинусов к треугольнику APQ, найдем PQ. Имеем:

$$PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot \cos\angle PAQ} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{3} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Далее, $AH = \frac{AP \cdot AQ \cdot \sin\angle PAQ}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$.

Наконец, из треугольника AA_1H получаем, что $\operatorname{tg}\angle AHA_1 = \frac{AA_1}{AH} = \frac{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$. Следовательно, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$.

Пример 7. Плоские углы ASB, BSC и CSA трехгранного угла $SABC$ с вершиной S равны 30°, 45° и 60° соответственно. Найти внутренний двугранный угол при ребре SB этого трехгранного угла.

Решение: На луче SB возьмем точку Q на расстоянии 1 от точки S. Из этой точки восстановим перпендикуляры QP и QR к прямой SB в плоскостях SAB и SBC соответственно. Пусть эти перпендикуляры пересекут прямые SA и SC в точках P и R (рисунок 23). Тогда двугранный угол при ребре SB трехгранного угла $SABC$ есть угол PQR. Найдем этот угол из треугольника PQR.

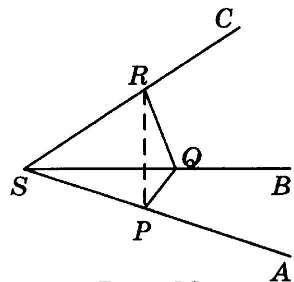


Рис. 23

Из прямоугольного треугольника PQS получаем, что $PQ = SQ\cdot\operatorname{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $SP = \frac{SQ}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Аналогично, из прямоугольного треугольника QRS находим, что $QR = SQ\cdot\operatorname{tg}45° = 1$ и $SR = \frac{SQ}{\cos 45°} = \sqrt{2}$. Применим теперь теорему косинусов к треугольнику PSR. Имеем:

$$PR = \sqrt{SP^2 + SR^2 - 2SP\cdot SR\cdot\cos\angle PSR} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} + 2 - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{6}}{3}}.$$

Наконец, применив теорему косинусов к треугольнику PQR, получаем, что

$$\cos\angle PQR = \frac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2PQ \cdot QR} = \frac{\frac{1}{3} + 1 - \frac{10 - 2\sqrt{6}}{3}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\arccos\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S, все ребра которой равны 1, найти угол между плоскостями ABG и CDF, где F — середина ребра SB, а G — середина ребра SC.

2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найти угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость через середины ребер DD_1 и D_1C_1 и вершину A. Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

4. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а боковое ребро равно 3. На боковых ребрах AA_1 и BB_1 взяты точки K и L соответственно так, что $AK = 1$, $BL = 2$. Найти угол между плоскостями ABC и KLC_1.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC, BAD и CAD при вершине A равны 120°, 45° и 135° соответственно. Найти угол между плоскостями BAD и CAD.

6. В правильной треугольной пирамиде угол при вершине между двумя боковыми ребрами равен 90°. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

7. Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 и углом A, равным 120°, расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания. Найти угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Расстоянием от точки до прямой будем называть длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. Точно так же, как длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость, определяем *расстояние от точки до плоскости*. Иногда это расстояние можно вычислить как высоту какой-либо треугольной пирамиды, предварительно найдя ее объем. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к этим прямым. Для нахождения этого расстояния полезно поместить данные скрещивающиеся прямые в параллельные плоскости.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до прямой C_1D_1.

Решение: Так как точка A_1 является проекцией точки A на плоскость $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и прямая A_1C_1 перпендикулярна прямой C_1D_1, то по теореме о трех перпендикулярах прямая AC_1 также перпендикулярна C_1D_1 (рисунок 24).

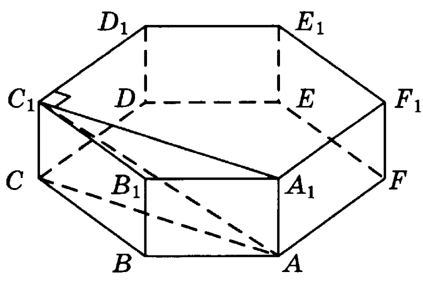


Рис. 24

Следовательно, длина отрезка AC_1 и будет служить расстоянием от точки A до прямой C_1D_1. Найдем эту длину из треугольника AA_1C_1. Треугольник AA_1C_1 — прямоугольный, в нем $AA_1 = 1$, $A_1C_1 = \sqrt{3}$, значит, $AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1C_1^2} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

Решение: Так как плоскость BB_1C_1C параллельна прямой AA_1, то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 есть расстояние между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C_1C (рисунок 25). Это расстояние, в свою очередь, равно длине высоты AH треугольника ABC, проведенной из вершины A, то есть $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

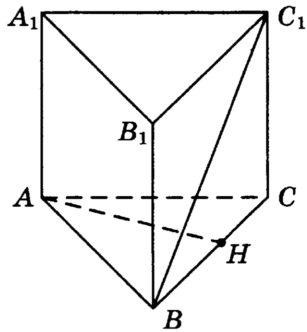


Рис. 25

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 1. На ребрах C_1D_1 и A_1D_1 взяты точки E и F такие, что $C_1E:ED_1 = 2:1$ и $D_1F:FA_1 = 1:2$. Через точки A, F и E проведена плоскость. Найти расстояние от точки A_1 до этой плоскости.

Решение: Сечением куба плоскостью AFE будет служить равнобедренная трапеция $ACEF$. Пусть основание EF этой трапеции пересекает диагональ B_1D_1 грани куба в точке G, пусть также O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно (рисунок 26). Прямая A_1C_1 параллельна прямой AC, значит, прямая A_1C_1 параллельна плоскости $ACEF$. Следовательно, расстояние от точки A_1 до плоскости $ACEF$ есть расстояние от любой точки прямой A_1C_1 до этой плоскости. В качестве такой точки возьмем точку O_1.

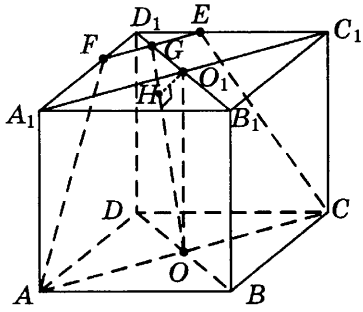


Рис. 26

В плоскости BDD_1B_1 из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1H на прямую GO. Так как плоскости BDD_1B_1 и $ACEF$ перпендикулярны, то прямая O_1H будет перпендикулярна плоскости $ACEF$. Найдем длину отрезка O_1H из треугольника GOO_1. Так как треугольники $A_1C_1D_1$ и FED_1 подобны с коэффициентом подобия, равным 3, то отрезок GD_1 составляет третью часть отрезка O_1D_1, а отрезок O_1G — две трети этого отрезка, следовательно, $O_1G = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Тогда

$$OG = \sqrt{OO_1^2 + O_1G^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

и

$$O_1H = \frac{OO_1 \cdot O_1G}{OG} = \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

Таким образом, искомое расстояние будет равно $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Пример 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти расстояние между прямыми A_1B и B_1C.

Решение: Поместим прямые A_1B и B_1C в параллельные плоскости A_1BD и B_1CD_1 соответственно. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию между этими плоскостями (рисунок 27). Рассмотрим прямую AC_1. Так как проекция этой прямой на плоскость $ABCD$ — прямая AC перпендикулярна прямой BD, то по теореме о трех перпендикулярах прямая AC_1 также перпендикулярна BD. Аналогично, прямая AC_1 перпендикулярна прямой A_1B, а значит, и плоскости A_1BD. Таким образом, расстояние между плоскостями A_1BD и B_1CD_1 есть длина отрезка прямой AC_1, заключенного между этими плоскостями.

Для нахождения этой длины рассмотрим сечение куба плоскостью AA_1C_1C (рисунок 28). Пусть O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Пусть также P и Q — точки персечения прямой AC_1 с плоскостями A_1BD и B_1CD_1, а значит, соответственно с прямыми A_1O и O_1C.

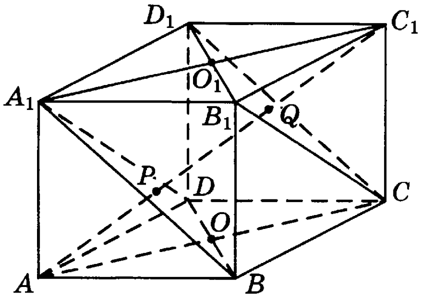


Рис. 27

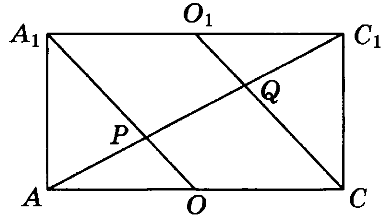


Рис. 28

По теореме Фалеса точки P и Q делят отрезок AC_1 на три равные части. Значит, длина отрезка PQ равна одной третьей длины отрезка AC_1, то есть равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, искомое расстояние также равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 5. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 1. Углы BAD, BAA_1 и DAA_1 равны $60°$ каждый. Найти расстояние от точки D до плоскости BCD_1.

Решение: Так как все грани призмы являются равными ромбами с острым углом $60°$, то длина каждого из отрезков AA_1, AB, AD, A_1D_1, D_1C, CB, BA_1, DA_1, DD_1, DC, DB равна 1. Докажем, что четырехугольник A_1D_1CB — квадрат (рисунок 29). Для этого достаточно доказать, что прямые A_1D_1 и A_1B перпендикулярны. Но это действительно так, поскольку треугольная пирамида DAA_1B является правильным тетраэдром (все ее ребра равны). В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра попарно перпендикулярны, поэтому прямая AD перпендикулярна прямой A_1B, а значит, прямая A_1D_1 также перпендикулярна прямой A_1B.

Итак, пирамида с вершиной D и основанием A_1D_1CB есть правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Пусть O центр основания этой пирамиды. Тогда длина отрезка DO и будет служить расстоянием от точки D до плоскости A_1D_1CB.

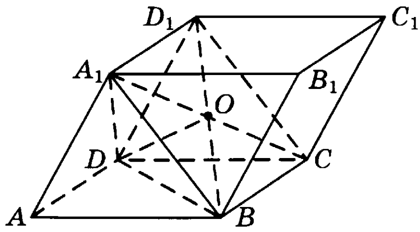


Рис. 29

Имеем: $DO = \sqrt{DA_1^2 - OA_1^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 6. Длина стороны правильного треугольника ABC равна 3. На перпендикуляре, восстановленном из вершины A к плоскости этого треугольника, отложен отрезок AD длины 1. Найти расстояние между прямыми AB и CD.

Решение: В плоскости ABC возьмем точку K, симметричную точке A относительно середины отрезка BC. Тогда прямая AB, будучи параллельной прямой CK, будет параллельна плоскости CKD (рисунок 30). Значит, расстояние между прямыми AB и CD есть расстояние от прямой AB до плоскости CKD, то есть расстояние от точки A до этой плоскости.

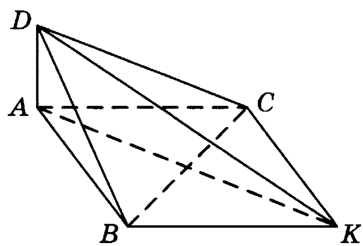


Рис. 30

Для нахождения этого расстояния рассмотрим пирамиду $ACKD$. Объем этой пирамиды равен

$$V_{ACKD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACK} \cdot AD = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

С другой стороны, тот же объем равен одной третьей площади треугольника CKD, умноженной на длину высоты AH, опущенной из точки A на плоскость CKD. Для нахождения площади треугольника CKD найдем стороны этого треугольника. Имеем:

$$CK = 3,\ KD = \sqrt{AK^2 + AD^2} = \sqrt{27+1} = \sqrt{28},$$

$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Пусть угол KCD треугольника CKD равен α. Применив к этому треугольнику теорему косинусов получим, что

$$\cos\alpha = \frac{CK^2 + CD^2 - KD^2}{2CK \cdot CD} = \frac{9+10-28}{2\cdot 3\cdot\sqrt{10}} = -\frac{3}{2\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{40}} = \frac{\sqrt{31}}{2\sqrt{10}}.$$

Таким образом, площадь треугольника CKD равна

$$S_{\Delta CKD} = \frac{1}{2}CK \cdot CD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{31}}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{31}}{4}.$$

И, наконец, применив формулу для вычисления объема пирамиды, находим, что

$$V_{ACKD} = \frac{1}{3}S_{\Delta CKD}\cdot AH \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{31}}{4}\cdot AH \Leftrightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}.$$

Следовательно, искомое расстояние равно $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$.

Пример 7. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A, B и C так, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найти расстояние между прямыми l и m, если расстояния от точек A, B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

Решение: Спроектируем прямые l и m на какую-либо плоскость, перпендикулярную прямой m. При этом проектировании прямая m перейдет в точку, обозначим ее через M, прямая l перейдет в прямую l_1, точки A, B и C — в точки A_1, B_1 и C_1 соответственно (рисунок 31). Расстояния от точек A_1, B_1 и C_1 до точки M будут такими же, как и расстояния от точек A, B и C до прямой m, а длины отрезков A_1B_1 и B_1C_1 будут пропорциональны длинам отрезков AB и BC. Расстояние же между прямыми l и m будет равно расстоянию от точки M до прямой l_1, то есть длине высоты треугольника A_1MC_1, опущенной из точки M.

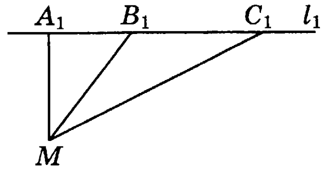


Рис. 31

Положим, $A_1B_1 = 5x$ и $B_1C_1 = 11x$. Пусть $\angle MA_1B_1 = \alpha$. Применив к треугольникам A_1MB_1 и A_1MC_1 теорему косинусов, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} MB_1^2 = MA_1^2 + A_1B_1^2 - 2MA_1 \cdot A_1B_1 \cdot \cos\angle MA_1B_1, \\ MC_1^2 = MA_1^2 + A_1C_1^2 - 2MA_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos\angle MA_1C_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 169 = 144 + 25x^2 - 120x\cos\alpha, \\ 400 = 144 + 256x^2 - 384x\cos\alpha; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25 = 25x^2 - 120x\cos\alpha, \\ 256 = 256x^2 - 384x\cos\alpha; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5x^2 - 24x\cos\alpha, \\ 16 = 16x^2 - 24x\cos\alpha. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения полученной системы второе, находим, что $x = 1$ и $\cos\alpha = 0$, то есть $\alpha = 90°$. Это означает, что отрезок MA_1 является высотой треугольника A_1MC_1, а его длина, равная 12, и будет служить расстоянием между прямыми l и m.

Ответ: 12.

Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, найти расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

2. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

3. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB — прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$ и $AB = 4$.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость π проходит через диагональ A_1C_1 грани куба и середину ребра DD_1. Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости π, если длина ребра куба равна 1.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найти расстояние от вершины A до плоскости B_1CD_1.

6. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найти расстояние между диагональю куба AC_1 и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани CD_1.

§ 3. МЕТОД КООРДИНАТ

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ будем называть число, равное $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляются по формулам: $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$. Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется из соотношения $\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Угол между прямыми есть либо угол между направляющими векторами этих прямых, либо дополнительный к нему.

Уравнение произвольной плоскости в пространстве имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля. При этом вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ является вектором нормали (то есть перпендикулярным вектором) к этой плоскости. Угол между плоскостями можно считать как угол между векторами нормали к этим плоскостям (или дополнительный к нему). Угол между прямой и плоскостью является дополнительным до 90° к углу между данной прямой и прямой, перпендикулярной к плоскости.

Расстояние от точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точка K на отрезке AB выбрана так, что $AK:KB = 4:1$, а точка L — середина отрезка CC_1. Найти угол между прямыми AL и KD_1.

Решение: Введем систему координат таким образом, что точка A является ее началом, а прямые AB, AD и AA_1 — осями x, y и z соответственно (рисунок 32). В этой системе координат точки имеют следующие координаты: $A\,(0,\ 0,\ 0)$; $L\,(5, 3, 1)$; $K\,(4, 0, 0)$; $D_1\,(0, 3, 2)$. Тогда координаты векторов равны $\overrightarrow{AL} = \{5, 3, 1\}$, $\overrightarrow{KD_1} = \{-4, 3, 2\}$.

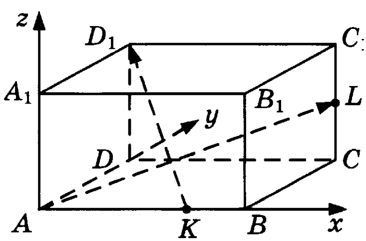


Рис. 32

Косинус угла между векторами есть отношение скалярного произведения этих векторов к произведению их длин. Имеем:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{KD_1}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{KD_1}\right)}{\left|\overrightarrow{AL}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KD_1}\right|} =$$

$$= \frac{5\cdot(-4) + 3\cdot 3 + 1\cdot 2}{\sqrt{25+9+1}\cdot\sqrt{16+9+4}} = -\frac{9}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{29}}.$$

Следовательно, угол между прямыми AL и KD_1, будучи острым углом, равен $\arccos\frac{9}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{29}}$.

Ответ: $\arccos\frac{9}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{29}}$.

Пример 2. Точка M лежит на ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем $BM:MB_1 = 2:1$, длина ребра куба равна 1. Найти расстояние между прямыми CD_1 и MD.

Решение: На ребре A_1B_1 куба возьмем точку N так, что $A_1N:NB_1 = 2:1$. Так как прямая CD_1 параллельна прямой MN, то прямая CD_1 также параллельна плоскости DMN. Следовательно, расстояние между прямыми CD_1 и MD есть расстояние от прямой CD_1 до плоскости DMN, или, что то же самое, расстояние от точки C до плоскости DMN (рисунок 33). Найдем это расстояние методом координат.

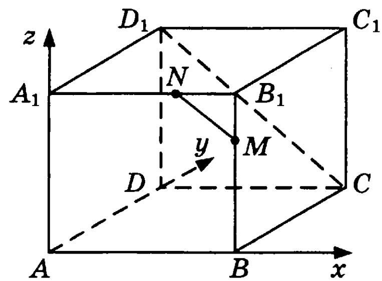


Рис. 33

Введем систему координат таким образом, что точка A является ее началом, а прямые AB, AD и AA_1 — осями x, y и z соответственно. В этой системе координат точки имеют следующие координаты: $C\ (1,\ 1,\ 0)$; $D\ (0,\ 1,\ 0)$; $M\left(1,\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$; $N\left(\frac{2}{3},\ 0,\ 1\right)$. Запишем уравнение плоскости DMN в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставив в это уравнение координаты точек, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ A + \frac{2}{3}C + D = 0, \\ \frac{2}{3}A + C + D = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + D = 0, \\ A - C = 0, \\ \frac{2}{3}A + C + D = 0. \end{cases}$$

Так как уравнение плоскости определяется с точностью до пропорциональности коэффициентов, можно положить

$A = C = 3$, тогда $B = 5$ и $D = -5$. Таким образом, уравнение плоскости DMN имеет вид $3x + 5y + 3z - 5 = 0$. Применив формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости, получим, что расстояние от точки C до плоскости DMN равно

$$\rho(C,\ DMN) = \frac{|3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{9 + 25 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{43}}.$$

Следовательно, искомое расстояние будет равно $\frac{3}{\sqrt{43}}$.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{43}}$.

Пример 3. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость π. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости π.

Решение: Пусть O — центр куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Введем систему координат таким образом, что точка A является ее началом, а прямые AB, AD и AA_1 — осями x, y и z соответственно (рисунок 34).

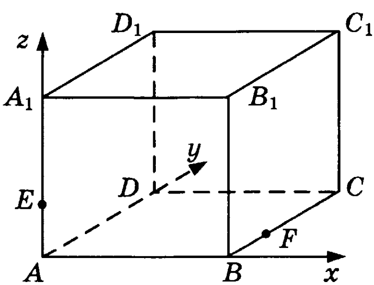


Рис. 34

В этой системе координат точки имеют следующие координаты: $B_1\,(1,\ 0,\ 1)$; $O\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$; $E\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3}\right)$; $F\left(1,\ \frac{1}{4},\ 0\right)$. Запишем уравнение плоскости OEF в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

Подставив в это уравнение координаты точек, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + D = 0, \\ \frac{1}{3}C + D = 0, \\ A + \frac{1}{4}B + D = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C + 2D = 0, \\ C + 3D = 0, \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$$

Так как уравнение плоскости определяется с точностью до пропорциональности коэффициентов, то можно считать, что $D = -3$. Тогда $C = 9$ и система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} A + B = -3, \\ 2A - B = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5, \\ B = -8. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение плоскости π имеет вид $5x - 8y + 9z - 3 = 0$. Применив формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости, находим, что расстояние от точки B_1 до плоскости π равно

$$\rho(B_1, \pi) = \frac{|5 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{25 + 64 + 81}} = \frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Ответ: $\frac{11}{\sqrt{170}}$.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 2, а высота равна 1. Найти угол между плоскостями SBC и MNP, где M — середина ребра AB, N — середина ребра AD, P — середина ребра SC.

Решение: Пусть O — центр грани $ABCD$. Выберем систему координат таким образом, что точка O является ее началом, ось x имеет то же направление, что и луч AB, ось y имеет то же направление, что и луч AD, луч OS является осью z этой системы координат (рисунок 35). В

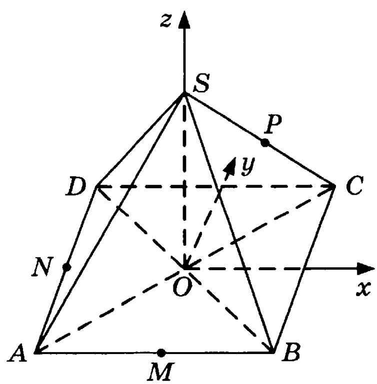


Рис. 35

этой системе координат точки имеют следующие координаты: $S\ (0,\ 0,\ 1)$; $B\ (1,\ -1,\ 0)$; $C\ (1,\ 1,\ 0)$; $M\ (0,\ -1,\ 0)$; $N\ (-1,\ 0,\ 0)$; $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

Запишем уравнение плоскости SBC в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставив в это уравнение координаты точек, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C + D = 0, \\ A - B + D = 0, \\ A + B + D = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + D = 0, \\ B = 0, \\ A + D = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются, например, числа $A = C = 1$, $B = 0$ и $D = -1$. Таким образом, уравнение плоскости SBC имеет вид $x + z - 1 = 0$, а вектор $\vec{n}_1 = \{1,\ 0,\ 1\}$ есть вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Теперь запишем в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ уравнение плоскости MNP. Подставив в это уравнение координаты точек, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -B + D = 0, \\ -A + D = 0, \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + D = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = D, \\ A = D, \\ A + B + C + 2D = 0. \end{cases}$$

Можно считать, что $A = B = D = 1$ и $C = -4$. Следовательно, уравнение плоскости MNP имеет вид $x + y - 4z + 1 = 0$, а вектор $\vec{n}_2 = \{1,\ 1,\ -4\}$ перпендикулярен этой плоскости.

Косинус угла между векторами есть отношение скалярного произведения этих векторов к произведению их длин. Имеем:

$$\cos\angle(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{1 + 0 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 16}} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ равен $120°$, а угол между плоскостями SBC и MNP, будучи острым углом, равен $60°$.

Ответ: $60°$.

Пример 5. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро равно 5. На ребрах AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 этой призмы выбраны соответственно точки E, F, G и H такие, что $AE = 1$, $BF = 2$, $CG = 3$ и $DH = 4$. Найти угол между прямой EG и плоскостью AFH.

Решение: Введем систему координат таким образом, что точка A является ее началом, а прямые AB, AD и AA_1 — осями x, y и z соответственно (рисунок 36). В этой системе координат точки имеют следующие координаты: $A\,(0,\ 0,\ 0)$; $E\,(0,\ 0,\ 1)$; $F\,(1,\ 0,\ 2)$; $G\,(1,\ 1,\ 3)$; $H\,(0,\ 1,\ 4)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{EG}$ равны $\{1,\ 1,\ 2\}$.

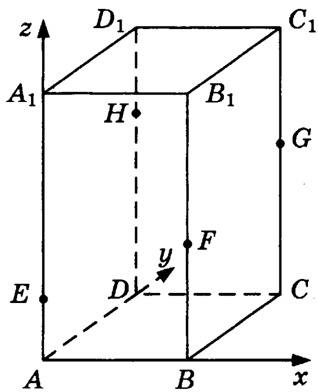


Рис. 36

Найдем теперь уравнение плоскости AFH. Запишем уравнение этой плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставив координаты точек, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} D = 0, \\ A + 2C = 0, \\ B + 4C = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0, \\ A = -2C, \\ B = -4C. \end{cases}$$

Решением этой системы являются, например, числа $A = 2$, $B = 4$, $C = -1$ и $D = 0$. Таким образом, уравнение плоскости AFH имеет вид $2x + 4y - z = 0$, а вектор $\vec{n} = \{2,\ 4,\ -1\}$ перпендикулярен этой плоскости.

Косинус угла между векторами есть отношение скалярного произведения этих векторов к произведению их длин. Имеем:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{EG},\ \vec{n}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{EG},\ \vec{n}\right)}{\left|\overrightarrow{EG}\right| \cdot |\vec{n}|} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+16+1}} = \frac{4}{3\sqrt{14}}.$$

Следовательно, угол между векторами $\overrightarrow{EG}$ и $\vec{n}$ равен $\arccos\frac{4}{3\sqrt{14}}$, а угол между прямой EG и плоскостью AFH равен $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{3\sqrt{14}}$ или, что то же самое, равен $\arcsin\frac{4}{3\sqrt{14}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4}{3\sqrt{14}}$.

Пример 6. Точка K лежит на ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем $BK:KB_1 = 1:2$, длина ребра куба равна 1. Найти расстояние от точки A_1 до прямой KO, где O — центр грани DCC_1D_1.

Решение: Введем систему координат таким образом, что точка A является ее началом, а прямые AB, AD и AA_1 — осями x, y и z соответственно (рисунок 37).

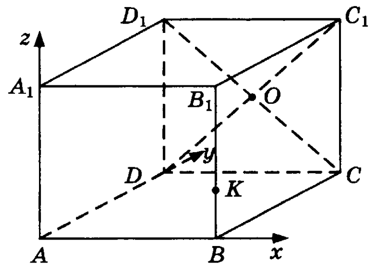


Рис. 37

В этой системе координат точки имеют следующие координаты: A_1 (0, 0, 1); $K\left(1, 0, \frac{1}{3}\right)$; $O\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. Тогда координаты векторов равны $\overrightarrow{KA_1} = \left\{-1, 0, \frac{2}{3}\right\}$, $\overrightarrow{KO} = \left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{6}\right\}$. Косинус угла между векторами есть отношение скалярного произведения этих векторов к произведению их длин. Имеем:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{KA_1}, \overrightarrow{KO}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{KA_1}, \overrightarrow{KO}\right)}{\left|\overrightarrow{KA_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KO}\right|} =$$

$$= \frac{(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{1+0+\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}}} = \frac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{46}}.$$

Следовательно, угол между прямыми KA_1 и KO равен $\arccos\frac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{46}}$.

Обозначим найденный угол через φ и рассмотрим треугольник A_1KO (рисунок 38). Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую KO. Тогда длина отрезка A_1H и будет служить расстоянием от точки A_1 до прямой KO. Из прямоугольного треугольника A_1KH получаем, что $A_1H = A_1K\cdot\sin\varphi$. Имеем:

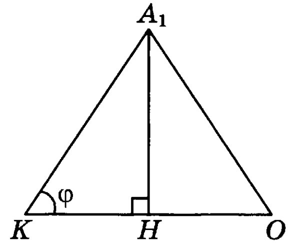


Рис. 38

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{121}{13\cdot 46}} = \frac{3\sqrt{53}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{46}},$$

$$A_1H = A_1K\cdot\sin\varphi = \frac{\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{53}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{46}} = \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{46}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{46}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и P — середины ребер AD и CD соответственно, точки N и Q — центры граней BCD и ABC соответственно. Найти угол между прямыми MN и PQ.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AB, а точка L на отрезке B_1C_1 выбрана так, что $B_1L:LC_1 = 2:1$. Найти угол между прямыми AL и KD_1.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 5$, $AD = 3$ и $AA_1 = 2$, найти расстояние от точки B_1 до плоскости AD_1C.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) сторона основания равна 2, а высота равна 3. Точка K — середина отрезка AB. Найти расстояние между прямыми AS и KC.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K и M — середины ребер AB и CC_1 соответственно. Найти угол между плоскостями AD_1M и A_1C_1K.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 4$, $AD = 6$ и $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра AA_1, а точка M — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямой AM и плоскостью BC_1K.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Точка P — центр грани $A_1B_1C_1$. Найти расстояние от точки B_1 до прямой AP.

§ 4. СЕЧЕНИЯ

Данный параграф посвящен задачам на построение сечений, а также нахождению площадей либо периметров полученных сечений.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найти площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через центр куба O и перпендикулярной его диагонали AC_1.

Решение: Данная плоскость состоит из всех прямых, проходящих через точку O и перпендикулярных прямой AC_1. Возьмем точку K — середину ребра BB_1 (рисунок 39).

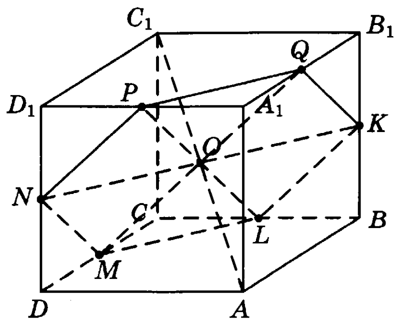


Рис. 39

Так как треугольник AKC_1 — равнобедренный, то прямая KO перпендикулярна прямой AC_1, следовательно, принадлежит плоскости сечения. Аналогично, этой плоскости принадлежат середины ребер BC, CD, DD_1, A_1D_1, A_1B_1 (обозначим их соответственно через L, M, N, P, Q). Тогда $KLMNPQ$ — искомое сечение. Шестиугольник $KLMNPQ$ — правильный, он вписан в окружность с центром в точке O и радиусом $OK = \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому его площадь равна

$$S_{KLMNPQ} = 6S_{\Delta OKL} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Пример 2. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, точка K делит отрезок AB в отношении $AK{:}KB = 2{:}1$. Найти площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точку K и параллельной ребрам AC и BD.

Решение: Проведем в плоскости ABC прямую KL ($L \in BC$), параллельную прямой AC, а в плоскости ABD проведем прямую KN ($N \in AD$), параллельную BD (рисунок 40). Точку M на отрезке CD выберем таким образом, что прямые NM и AC параллельны. Тогда точки K, L, M, N лежат в одной плоскости и $KLMN$ — искомое сечение тетраэдра. Действительно, плоскость $KLMN$ параллельна прямой AC, так как прямая, лежащая в этой плоскости (прямая KL), параллельна AC. Аналогично, плоскость $KLMN$ параллельна прямой BD.

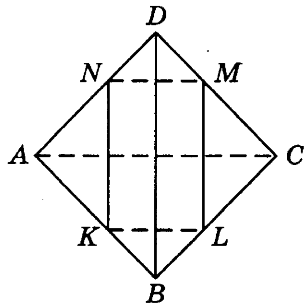


Рис. 40

Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм (по признаку: отрезки KL и NM параллельны и равны каждый $\frac{1}{3}$ отрезка AC). Кроме того, этот четырехугольник является прямоугольником, так как из перпендикулярности прямых AC и BD следует перпендикулярность прямых KL и KN. Далее,

$$KL = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}, \quad KN = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \text{ и } S_{KLMN} = KL \cdot KN = \frac{2}{9}.$$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

Пример 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найти периметр сечения этого куба плоскостью, проходящей через точку A, точку K — середину отрезка BB_1 и точку O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

Решение: Сначала в плоскости ABB_1A_1 проведем прямую AK до пересечения с прямой A_1B_1 в точке P (рисунок 41). Из равенства треугольников ABK и PB_1K будет следовать равенство отрезков AB и B_1P. В плоскости $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую PO. Пусть эта прямая пересекает прямую B_1C_1 в точке L, а прямую A_1D_1 в точке M. Тогда $AKLM$ — искомое сечение.

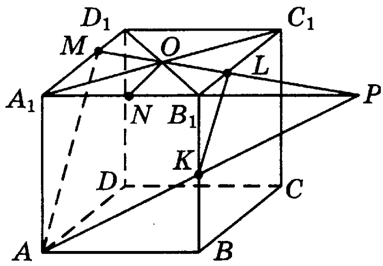


Рис. 41

Проведем в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ отрезок ON, где N — середина A_1B_1. Тогда из подобия треугольников PB_1L и PNO (коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$) получаем, что $B_1L = \frac{1}{3}$, а из подобия треугольников PB_1L и PA_1M (коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$) находим, что $A_1M = \frac{2}{3}$. Длину отрезка ML вычислим из прямоугольной трапеции A_1B_1LM: $ML = \sqrt{A_1B_1^2 + (A_1M - B_1L)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Четырехугольник $AKLM$ — трапеция, у которой основание AM в два раза больше основания KL. Это следует из подобия треугольников PKL и PAM с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{2}$. Длину отрезка KL найдем из прямоугольного треугольника B_1KL: $KL = \sqrt{B_1K^2 + B_1L^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$. Значит, $AM = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Длину отрезка AK найдем из прямоугольного треугольника ABK: $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, периметр четырехугольника $AKLM$ равен

$$AK + KL + LM + AM = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) длина каждого ребра равна 1. На отрезке SB взята точка K так, что $SK:KB = 2:1$, а на отрезке SD взята точка L таким образом, что $SL:LD = 1:2$. Через точки A, K и L проведено сечение. Найти длины диагоналей полученного сечения.

Решение: Пусть SH — высота пирамиды. В плоскости BSD отрезок KL пересекает отрезок SH в точке O (рисунок 42). В плоскости ASC проведем прямую AO до пересечения с отрезком SC в точке M. Тогда $AKML$ — искомое сечение. Найдем диагональ KL четырехугольника $AKML$. Заметим, что треугольник BSD — прямоугольный, так как длины его сторон равны 1, 1 и $\sqrt{2}$.

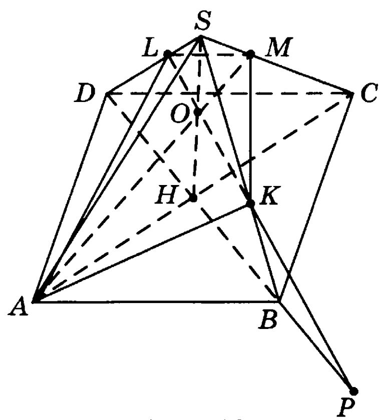


Рис. 42

Поэтому, $KL = \sqrt{SK^2 + SL^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

В плоскости BSD проведем прямую LK до пересечения с прямой DB в точке P. Применим к треугольнику DSB и секущей LK теорему Менелая:

$$\frac{DL}{LS} \cdot \frac{SK}{KB} \cdot \frac{BP}{PD} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{BP}{PD} = 1 \Leftrightarrow \frac{BP}{PD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BP}{PH} = \frac{2}{5}.$$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику HSB и секущей OK, получим, что

$$\frac{HO}{OS} \cdot \frac{SK}{KB} \cdot \frac{BP}{PH} = 1 \Leftrightarrow \frac{HO}{OS} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{HO}{OS} = \frac{5}{4}.$$

Рассмотрим теперь плоскость ASC. В этой плоскости к треугольнику CSH и секущей MO применим теорему Менелая. Имеем:

$$\frac{CM}{MS}\cdot\frac{SO}{OH}\cdot\frac{HA}{AC}=1 \Leftrightarrow \frac{CM}{MS}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{CM}{MS}=\frac{5}{2},$$

откуда $SM=\frac{2}{7}SC=\frac{2}{7}$. Длину отрезка AM найдем из прямоугольного треугольника ASC:

$$AM=\sqrt{SA^2+SM^2}=\sqrt{1+\frac{4}{49}}=\frac{\sqrt{53}}{7}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\sqrt{53}}{7}$.

Пример 5. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найти радиус шара.

Решение: Рассмотрим сечение шара плоскостью π, проходящей через его центр O и перпендикулярной к двум данным параллельным плоскостям. Пусть плоскость π пересекает эти плоскости по прямым l и m, причем прямая l проходит через точку O (рисунок 43). Пусть также прямая m пересекает сферу, ограничивающую данный шар, в точках A и B, а точка O_1 — середина отрезка AB — является центром сечения шара одной из параллельных плоскостей.

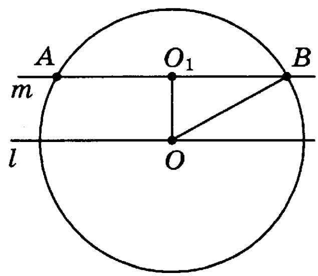


Рис. 43

Так как отношение площадей сечений шара параллельными плоскостями равно 0,84, то отношение радиусов этих сечений (которые являются кругами) равно $\sqrt{0,84}=\frac{\sqrt{21}}{5}$. Поэтому можно считать, что $O_1B=\sqrt{21}x$, а $OB=5x$. Из прямоугольного треугольника OO_1B, в котором $OO_1 = 2$, получаем уравнение

$$OB^2 = OO_1^2 + O_1B^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 4 + 21x^2 \Leftrightarrow x = 1,$$

откуда $OB = 5$ — радиус шара.

Ответ: 5.

Пример 6. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Середина D гипотенузы AB этого треугольника является основанием высоты SD данной пирамиды. Через середину E высоты SD проведено сечение пирамиды плоскостью π, параллельной ребрам AC и SB. Найти площадь сечения пирамиды данной плоскостью, если $SD = 2$, $AC = 1$, $AB = 2$.

Решение: Построим сечение пирамиды $SABC$ плоскостью π. Для этого в плоскости ASB через точку E проведем прямую KL, параллельную прямой SB. Пусть эта прямая пересечет ребро SA в точке K, а ребро AB — в точке L (рисунок 44).

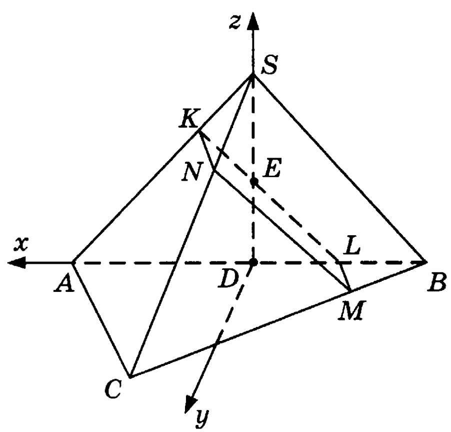


Рис. 44

Так как EL — средняя линия треугольника SDB, то $AL{:}LB = 3{:}1$, $KL = \dfrac{3}{4}SB = \dfrac{3}{4}\sqrt{SD^2 + DB^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. Далее, в плоскости ABC проведем прямую LM, параллельную прямой AC, пусть эта прямая пересечет ребро BC в точке M. Тогда

$LM = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}$. И, наконец, в плоскости BSC параллельно прямой SB проведем прямую MN до пересечния с ребром SC в точке N. Тогда $KLMN$ — искомое сечение. Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм (по признаку: отрезки KL и MN параллельны и равны каждый $\frac{3}{4}$ отрезка SB).

Найдем площадь этого параллелограмма. Для этого необходимо вычислить угол между прямыми AC и SB, который также равен углу между прямыми LM и MN. Сделаем это векторным способом. Введем систему координат таким образом, что точка D является ее началом, прямые DA и DS — осями x и z соответственно, а ось y расположена в плоскости ABC, перпендикулярна прямой AB и направлена таким образом, что точка C имеет на этой оси положительную координату. Нетрудно посчитать координаты вершин данной пирамиды в такой системе координат: $A\ (1,\ 0,\ 0)$; $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$; $B\ (-1,\ 0,\ 0)$; $S\ (0,\ 0,\ 2)$. Тогда координаты векторов равны $\overrightarrow{AC} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$; $\overrightarrow{BS} = \{1,\ 0,\ 2\}$. Косинус угла φ между прямыми AC и BS равен

$$\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BS}\right)\right| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BS}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BS}\right|} =$$

$$= \frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 2\right|}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Значит,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} \text{ и } S_{KLMN} = KL\cdot LM\cdot\sin\varphi = \frac{3\sqrt{19}}{32}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{19}}{32}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 12. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Точки K и L — середины отрезков B_1C_1 и C_1D_1 соответственно. Найти периметр сечения куба плоскостью AKL.

3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Точка P — середина отрезка BB_1, а точка Q — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найти площадь сечения призмы плоскостью APQ.

4. Два шара с центрами O_1 и O_2 радиусов 3 и 1 касаются друг друга внешним образом. Плоскость, параллельная прямой O_1O_2, пересекает шар меньшего радиуса по кругу, площадь которого равна $\pi/4$. Найти площадь сечения шара большего радиуса этой плоскостью.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина), все ребра которой равны 1. Найти площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым AS и BD.

6. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а боковое ребро равно 16. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = LM = 4$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивестно, что $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 2:3, считая от вершины B. Найти площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

§ 5. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

В данном параграфе мы рассмотрим несколько задач, аналогичных задачам, предлагавшимся на вступительных экзаменах в вузы и ЕГЭ по математике.

Пример 1. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причем $BE = 1$. Построить сечение призмы плоскостью A_1C_1E. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение: Пусть диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O_1, а диагонали квадрата $ABCD$ — в точке O. В плоскости DD_1B_1B проведем прямую O_1E до пересечения с прямой DB в точке K. Так как $BD_1 = \sqrt{BC^2 + CD^2 + DD_1^2} = 3$, а $BE = 1$, то $BE{:}ED_1 = 1{:}2$ (рисунок 45). Из подобия треугольников BEK и D_1EO_1 получаем, что $\dfrac{D_1O_1}{BK} = \dfrac{D_1E}{EB} = \dfrac{2}{1}$.

Так как $D_1B_1 = 2\sqrt{2}$, то $D_1O_1 = \sqrt{2}$ и $BK = KO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Теперь через точку K в плоскости основания проведем прямую LM, параллельную прямой AC. Пусть эта прямая пересекает прямую AB в точке L, а прямую BC — в точке M. Тогда A_1C_1ML — искомое сечение.

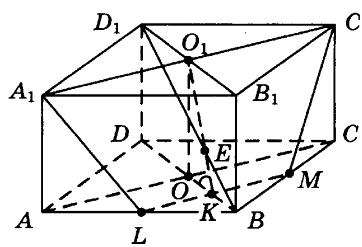


Рис. 45

Угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC есть угол O_1KO. Действительно, $OK \perp LM$ и, следовательно, $O_1K \perp LM$ по теореме о трех перпендикулярах. Тангенс этого угла равен

$$\operatorname{tg}\angle O_1KO = \frac{OO_1}{OK} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, $\angle O_1KO = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Пример 2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых ребер пирамиды равны $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$. Доказать, что SA — высота пирамиды. Найти угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Решение: Так как $SA^2 + AB^2 = SB^2$ $(7 + 5 = 12)$, то по теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник SAB — прямоугольный. Аналогично можно доказать, что треугольник SAD также прямоугольный (угол SAD — прямой). Следовательно, $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, поэтому прямая SA перпендикулярна плоскости $ABCD$, то есть является высотой пирамиды (рисунок 46).

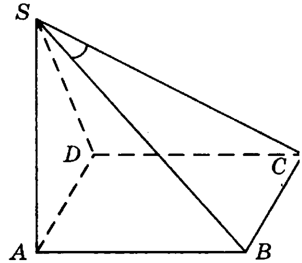


Рис. 46

Так как SA — высота пирамиды, то плоскость ASB перпендикулярна плоскости основания. Поэтому проекцией точки C на эту плоскость будет служить точка B, и искомый угол есть угол CSB. Тангенс этого угла равен $\operatorname{tg}\angle CSB = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, $\angle CSB = 30°$.

Ответ: 30°.

Пример 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость π содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Доказать, что плоскость π делит медиану основания CL в отношении 5:1, считая от точки C. Найти расстояние от точки A до плоскости π.

Решение: Построим сечение пирамиды $SABC$ плоскостью π. Пусть прямая SL пересекает прямую MN в точке K. Тогда K — середина отрезка SL. Опустим из точек S и K перпендикуляры SO и KH на плоскость ABC (рисунок 47). Так как $O \in CL$ и $CO{:}OL = 2{:}1$, а KH — средняя линия треугольника SOL, то $H \in CL$, $OH = HL$, поэтому $CH{:}HL = 5{:}1$. Через точку H проведем прямую PQ, параллельную прямой AB. Пусть эта прямая пересекает прямые AC и BC

соответственно в точках P и Q. Тогда $PQNM$ — искомое сечение. Из построения ясно, что плоскость π делит медиану основания CL в отношении 5:1, считая от точки C.

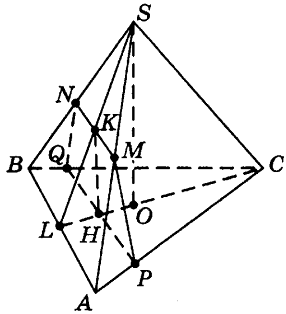


Рис. 47

Так как прямая AB параллельна плоскости π, то расстояние от точки A до плоскости π равно расстоянию от точки L до этой плоскости. Таким образом, искомым расстоянием будет служить длина отрезка LH, которая равна

$$LH = \frac{1}{6}\cdot CL = \frac{1}{6}\cdot 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Пример 4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M — середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L. Доказать, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ. Найти объем пирамиды, вершиной которой является точка M, а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение: Построим сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью γ. Через точки K и L проведем прямые KP и LN, параллельные прямой AC. Пусть эти прямые пересекают прямые BC и A_1B_1 соответственно в точках P и N. Пусть также прямая KP пересекает медиану BE треугольника ABC в точке O, а прямая LN пересекает прямую B_1M в точке Q. В плоскости BB_1ME проведем

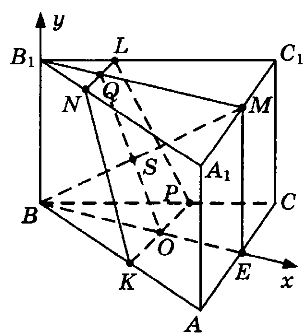


Рис. 48

прямую OQ до пересечения с прямой BM в точке S (рисунок 48). Необходимо доказать, что угол BSO — прямой.

Сделаем это векторным методом. В плоскости BB_1ME введем систему координат таким образом, чтобы точка B являлась началом этой системы координат, вектор $\overrightarrow{BE}$ служил направляющим вектором оси x, а вектор $\overrightarrow{BB_1}$ — направляющим вектором оси y. В этой системе координат точки будут иметь следующие координаты: $B\,(0,\ 0)$; $M\left(3\sqrt{3},\ 3\right)$; $O\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$; $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 3\right)$. Тогда $\overrightarrow{BM}=\left\{3\sqrt{3},\ 3\right\}$, $\overrightarrow{OQ}=\left\{-\sqrt{3},\ 3\right\}$ и $\left(\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{OQ}\right)=-9+9=0$. Следовательно, прямые BM и OQ перпендикулярны.

Для нахождения объема пирамиды $MKPLN$ необходимо найти площадь основания (трапеции) $KPLN$ и длину высоты MS. Так как $KP = 3$, $NL = 1$, а $OQ=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$, то

$$S_{KPLN}=\frac{KP+NL}{2}\cdot OQ=4\sqrt{3}.$$

Далее, $BM=\left|\overrightarrow{BM}\right|=\sqrt{27+9}=6$.

Из подобия треугольников MSQ и BSO находим, что $\dfrac{MS}{SB}=\dfrac{MQ}{BO}=\dfrac{5}{3}$, откуда $MS=\dfrac{5}{8}\cdot BM=\dfrac{15}{4}$.

Следовательно,

$$V_{MKPLN}=\frac{1}{3}\cdot S_{KPLN}\cdot MS=\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{15}{4}=5\sqrt{3}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$.

Пример 5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота равна 4. На ребрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = DN = 4$ и $AK = 3$. Доказать, что плоскости MNK и SBC параллельны. Найти расстояние от точки K до плоскости SBC.

Решение: Пусть SO — высота пирамиды. Тогда

$$AS=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2+16}=12.$$

Так как $\frac{AM}{AB}=\frac{4}{16}=\frac{3}{12}=\frac{AK}{AS}$, то прямые MK и BS параллельны (рисунок 49). С другой стороны, прямая MN параллельна прямой BC. Отсюда следует, что плоскость MNK параллельна плоскости SBC.

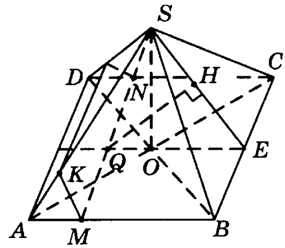


Рис. 49

В силу доказанного, расстояние от точки K до плоскости SBC будет таким же, как и расстояние от любой точки плоскости MNK до плоскости SBC. Возьмем в качестве такой точки середину Q отрезка MN. Пусть E — середина BC, тогда

$$SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=\sqrt{16+64}=4\sqrt{5}.$$

Найдем высоту QH треугольника SQE, длина которой и будет служить искомым расстоянием.

Имеем:

$$S_{\Delta SQE}=\frac{1}{2}\cdot QE\cdot SO=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4=24$$

и

$$QH=\frac{2S_{\Delta SQE}}{SE}=\frac{48}{4\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Пример 6. На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причем $AM:MB = CN:NB = 3:1$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно. Доказать, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости. Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

Решение: Прямая PQ параллельна прямой AC как средняя линия треугольника ADC. Прямая MN параллельна прямой AC, поскольку точки M и N делят в одинаковом отношении отрезки AB и CB ($AM : MB = CN : NB = 3 : 1$). Следовательно, прямые PQ и MN параллельны и точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости (рисунок 50).

Продолжим прямые PM и QN до пересечения с прямой DB в точке S. Применив теорему Менелая к треугольнику ABD и секущей PM, получим, что

$$\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BS}{SD}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{BS}{SD}=1 \Leftrightarrow \frac{BS}{SD}=\frac{1}{3}.$$

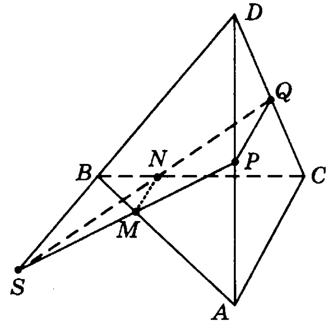


Рис. 50

Рассмотрим пирамиды $PQDS$ и $ACDB$. Площадь основания (треугольника PQD) первой пирамиды в 4 раза меньше площади основания (треугольника ACD) второй пирамиды, а высота первой пирамиды, проведенная из вершины S, в $\frac{3}{2}$ раза больше высоты второй пирамиды, проведенной из вершины B. Значит, объем первой пирамиды в $\frac{8}{3}$ раза меньше объема второй, то есть $V_{PQDS}=\frac{3}{8}\cdot V_{ABCD}$. Аналогично, $V_{MBNS}=\frac{1}{32}\cdot V_{ABCD}$, так как площадь треугольника MBN в 16 раз меньше площади треугольника ABC, а длина перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость ABC, в два раза меньше длины перпендикуляра, опущенного из точки D на эту же плоскость. Таким образом, объем многогранника $MNQPDB$ составляет

$$V_{MNQPDB}=V_{PQDS}-V_{MNBS}=\frac{3}{8}\cdot V_{ABCD}-\frac{1}{32}\cdot V_{ABCD}=\frac{11}{32}\cdot V_{ABCD}.$$

Следовательно, плоскость $PQNM$ делит объем пирамиды $ABCD$ в отношении 11:21.

Ответ: $\frac{11}{21}$.

Пример 7. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB=3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Высота пирамиды падает в центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB. Доказать, что P — середина BQ. Найти угол между плоскостями SBA и SBC, если $SD = 9$.

Решение: Проведем SK и SL — высоты треугольников SAB и SBC соответственно. Так как, очевидно, все боковые ребра пирамиды равны между собой, то точки K и L — середины отрезков AB и BC соответственно (рисунок 51).

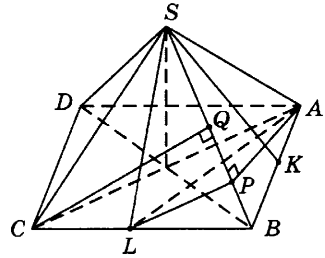


Рис. 51

Из подобия треугольников APB и SKB находим, что

$$\frac{PB}{KB} = \frac{AB}{SB} \Leftrightarrow PB = \frac{KB \cdot AB}{SB} = \frac{9}{SB}.$$

Аналогично, из подобия треугольников CQB и SLB получаем, что

$$\frac{QB}{LB} = \frac{CB}{SB} \Leftrightarrow QB = \frac{LB \cdot CB}{SB} = \frac{18}{SB}.$$

Следовательно, $QB = 2PB$, что и требовалось доказать.

Так как $SD = SB = 9$, то $PB = 1$ и $QB = 2$. Проведем среднюю линию LP треугольника CQB. Тогда $LP \perp SB$ и угол APL является линейным углом внутреннего двугранного угла при боковом ребре SB пирамиды $SABCD$. Найдем этот угол. Имеем:

$$LP = \sqrt{LB^2 - PB^2} = 2\sqrt{2}\,,\ \ AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{17}\,,$$

$$AL = \sqrt{AB^2 + LB^2} = 3\sqrt{3}\,.$$

Следовательно, по теореме косинусов

$$\cos\angle APL = \frac{LP^2 + AP^2 - AL^2}{2 \cdot LP \cdot AP} = \frac{8 + 17 - 27}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = -\frac{1}{2\sqrt{34}}.$$

Так как в данном случае угол между плоскостями есть по определению острый угол, то ответом к задаче будет служить угол $\varphi = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{34}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{34}}$.

Пример 8. В основании пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90°, плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, а прямые AB и CD пересекаются в точке K. Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD. Найти объем пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 8.

Решение: Из условия задачи следует, что угол между прямыми AB и CD равен 90°. Так как плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, то линия пересечения этих плоскостей — прямая PK также перпендикулярна плоскости основания (рисунок 52). Тогда угол AKD является линейным углом внутреннего двугранного угла при ребре PK пирамиды $ADKP$. Так как этот угол прямой, то плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

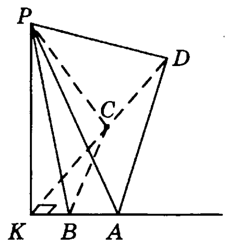


Рис. 52

Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, поэтому $\angle BAD = \angle ADC = 45°$. Следовательно, $\angle KBC = \angle BCK = 45°$ и $BK = KC = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Это означает, что

$$S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} BK \cdot KC = \frac{9}{4} \text{ и } V_{PKBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BCK} \cdot PK = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 9. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AC = 6$, $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1.

Решение: Так как $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = 10$, а AN — биссектриса угла A треугольника ACC_1, то $CN = 3$ и $NC_1 = 5$ согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла. Кроме того, $BM = MB_1 = 4$ (рисунок 53). Пусть $BC = a$, а высота AH треугольника ABC, проведенная из вершины A, равна h. Ясно, что прямая AH перпендикулярна плоскости BB_1C_1C.

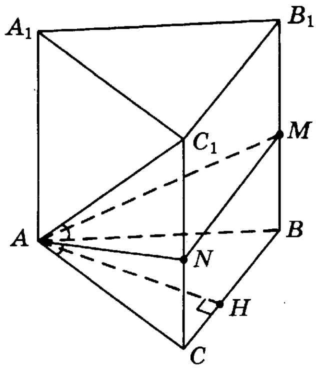


Рис. 53

Тогда объем призмы равен

$$V = V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} a \cdot h \cdot 8 = 4ah .$$

Объем пирамиды $BMNCA$ равен

$$V_1 = V_{BMNCA} = \frac{1}{3} \cdot S_{BMNC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{BM + CN}{2} \cdot h = \frac{7}{6} ah .$$

Следовательно, $\frac{V_1}{V} = \frac{7}{6} : 4 = \frac{7}{24}$ и объемы частей, на которые плоскость AMN делит призму $ABCA_1B_1C_1$, относятся как 7:17.

Ответ: $\frac{7}{17}$.

Пример 10. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны друг другу. На ребре SA взята точка M такая, что $SM = MA$, на ребре SB — точка N такая, что $SN = \frac{1}{3} SB$. Через точки M и N проведена плоскость π, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $SABC$.

Решение: Построим сечение пирамиды $SABC$ плоскостью π. Для этого в плоскости SAD проведем прямую MK, параллельную прямой AD. Пусть эта прямая пересекает прямую SD в точке K. Тогда K — середина SD. Теперь в плоскости SBC проведем прямую NK до пересечения с прямой BC в точке C_1 (рисунок 54). Применив теорему Менелая к треугольнику SBD и секущей NK, получим, что

$$\frac{BN}{NS}\cdot\frac{SK}{KD}\cdot\frac{DC_1}{C_1B}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{DC_1}{C_1B}=1 \Leftrightarrow \frac{DC_1}{C_1B}=\frac{1}{2}.$$

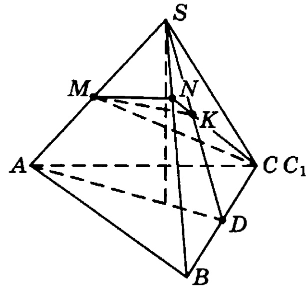


Рис. 54

Следовательно, точки C и C_1 совпадают, и CMN — искомое сечение.

Найдем теперь отношение объемов пирамид $SCMN$ и $SABC$. Так как эти пирамиды имеют общую высоту, проведенную из вершины C, то их объемы относятся так же, как и площади треугольников SMN и SAB, являющихся основаниями этих пирамид. Имеем:

$$\frac{V_{SCMN}}{V_{SABC}}=\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot SM\cdot SN\cdot\sin\angle MSN}{\frac{1}{2}\cdot SA\cdot SB\cdot\sin\angle ASB}=$$

$$=\frac{SM\cdot SN}{SA\cdot SB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Пусть E — середина ребра DC, F — середина ребра BB_1. Найти объем пирамиды AD_1EF.

Решение: Треугольник AD_1E — равнобедренный, в нем $AE=D_1E=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $AD_1=\sqrt{2}$. Высота EH этого треугольника равна $EH=\sqrt{EA^2-AH^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а его площадь равна $S=S_{AD_1E}=\frac{1}{2}AD_1\cdot EH=\frac{\sqrt{6}}{4}$ (рисунок 55). Найдем теперь расстояние от точки F до плоскости AD_1E.

Для этого введем систему координат таким образом, что точка A является ее началом, а лучи AB, AD и AA_1 —

осями x, y, z соответственно. В этой системе координат точки имеют следующие координаты: $A\ (0, 0, 0)$; $D_1\ (0, 1, 1)$; $E\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$; $F\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

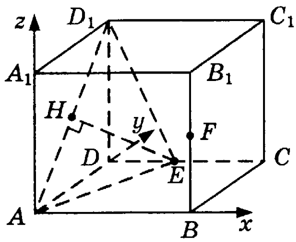


Рис. 55

Запишем уравнение плоскости AD_1E в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставив в это уравнение координаты точек, получим следующую систему:

$$\begin{cases} D = 0, \\ B + C = 0, \\ \frac{1}{2}A + B = 0. \end{cases}$$

Можно предположить, что $A = 2$, откуда $B = -1$ и $C = 1$. Тогда уравнение плоскости AD_1E примет вид $2x - y + z = 0$. Искомое расстояние h найдем по формуле

$$h = \frac{\left|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

Таким образом, объем пирамиды AD_1EF равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{5}{24}.$$

Ответ: $\frac{5}{24}$.

Пример 12. Пусть S — вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 3. Через точку A и точку E ребра SC проведена плоскость P, перпендикулярная плоскости SAC, причем $SE = 1$. Определить объем четырехугольной пирамиды, отсекаемой плоскостью π от данной пирамиды.

Решение: Построим сечение данной пирамиды плоскостью π. Для этого в плоскости ASC проведем прямую AE до пересечения с высотой SO пирамиды в точке T. Далее, через точку T в плоскости BSD проведем прямую PQ, перпендикулярную прямой SO. Пусть эта прямая пересечет ребро SB в точке P, а ребро SD в точке Q (рисунок 56). Тогда $APEQ$ — искомое сечение. Найдем площадь четырехугольника $APEQ$.

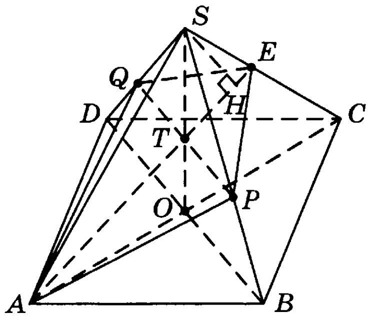


Рис. 56

Применив теорему Менелая к треугольнику OSC и секущей ET, получим, что

$$\frac{CE}{ES}\cdot\frac{ST}{TO}\cdot\frac{OA}{AC}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{ST}{TO}\cdot\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{ST}{TO}=1.$$

Следовательно, точка T является серединой отрезка SO и PQ — средняя линия треугольника BSD, $PQ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Заметим, что треугольник ASC — прямоугольный ($SA^2+SC^2=AC^2$), поэтому $AE=\sqrt{SA^2+SE^2}=\sqrt{10}$ и площадь четырехугольника $APEQ$ равна $S=S_{APEQ}=\frac{1}{2}AE\cdot PQ=\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Высоту SH треугольника ASE, являющуюся также высотой пирамиды $SAPEQ$, находим из соотношения $h=SH=\frac{SA\cdot SE}{AE}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Таким образом, объем пирамиды $SAPEQ$ равен

$$V=V_{SAPEQ}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость π проходит через диагональ A_1C_1 грани куба и середину ребра DD_1. Построить сечение куба плоскостью π. Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости π, если ребро куба равно 4.

2. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Построить сечение куба плоскостью α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

3. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость π, пересекающая ребро CD в точке M, при этом $DM:MC = 2:3$. Построить сечение пирамиды плоскостью π. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

4. Правильную четырехугольную пирамиду пересекает плоскость π, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Построить сечение пирамиды плоскостью π. Найти отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра, если площадь получившегося сечения в два раза меньше площади основания пирамиды.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра AB равна 4, длина ребра AD равна 6, длина ребра AA_1 равна 8. Точка K, лежащая на ребре AA_1, удалена от вершины A на расстояние 4. Расстояние от точки L ребра DD_1 до вершины D равно 2. Точка M лежит на отрезке B_1C так, что длина MC вдвое больше длины B_1M. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L и M. Найти площадь этого сечения.

6. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B, на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

Доказать, что прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны. Найти угол между прямыми AC_1 и BB_1, если $AB = 6$, $B_1C_1 = 8$, $BB_1 = 15$.

7. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причем CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$. Доказать, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45°. Найти объем цилиндра.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6. Доказать, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90°. Найти расстояние между прямыми AC и BD_1.

9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно. На боковом ребре SA отмечена точка K. Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырехугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q. Доказать, что точка Q лежит на высоте пирамиды. Найти объем пирамиды $QMNB$, если $AB = 12$, $SA = 10$, $SK = 2$.

Глава III

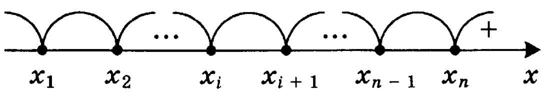
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Пусть дано неравенство

$$\frac{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_i)^{k_i}}{(x-x_{i+1})^{k_{i+1}}\dots(x-x_{n-1})^{k_{n-1}}(x-x_n)^{k_n}} > 0\ (< 0, \geq 0, \leq 0),$$

и пусть для определенности $x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n$. Точки $x = x_1, \dots, x = x_n$ разбивают числовую прямую на промежутки.



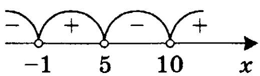
На промежутке $(x_n, +\infty)$ ставим знак «плюс». Далее правило чередования знаков следующее. Если число k_i нечетное, то знак при переходе через точку $x = x_i$ меняется на противоположный, а если четное, то знак остается прежним. Кроме того, если неравенство нестрогое, то в ответ включаются корни числителя и исключаются корни знаменателя, а если строгое, то исключаются как корни числителя, так и корни знаменателя.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x+1)(x-10)}{x-5} < 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках



.

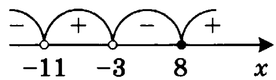
Согласно правилу, на промежутке $(10, +\infty)$ мы ставим знак «плюс», а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корни числителя не включаются в ответ, так как неравенство строгое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «минус».

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup (5, 10)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x-8}{(x+3)(x+11)} \geq 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(8, +\infty)$ мы ставим знак «плюс», а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корень числителя $x = 8$ включается в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «плюс».

Ответ: $x \in (-11, -3) \cup [8, +\infty)$.

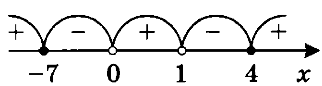
Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{(4-x)(x+7)}{x(x-1)} \leq 0.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на (-1), т.е. выражение $(4 - x)$ изменим на $(x - 4)$, поменяв при этом знак неравенства на противоположный. Имеем:

$$\frac{(x-4)(x+7)}{x(x-1)} \geq 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



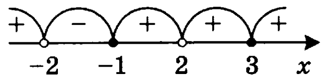
Согласно правилу, на промежутке $(4, +\infty)$ мы ставим знак «плюс», а далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, корни числителя $x = 4$ и $x = -7$ включаются в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «плюс».

Ответ: $x \in (-\infty, -7] \cup (0,1) \cup [4, +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x-3)^4(x+1)^3}{(x-2)^2(x+2)} \le 0.$$

Решение. Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(3, +\infty)$ ставим знак «плюс». Далее знак не меняется в точках $x = 3$ и $x = 2$ и меняется в точках $x = -1$ и $x = -2$. Кроме того, так как неравенство нестрогое, корни числителя $x = -1$ и $x = 3$ мы включаем в ответ, а корни знаменателя $x = -2$ и $x = 2$ из ответа исключаем. Корень числителя $x = 3$ входит в ответ как изолированная точка.

Ответ: $x \in (-2, -1] \cup \{3\}$.

Пример 5. Решить неравенство

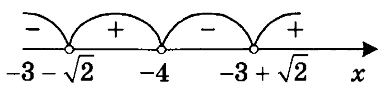
$$x + 2 < \frac{1}{x+4}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$x + 2 < \frac{1}{x+4} \Leftrightarrow x + 2 - \frac{1}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+4)-1}{x+4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+7}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})}{x+4} < 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(-3+\sqrt{2}, +\infty)$ ставим знак «плюс», далее знаки меняются во всех точках. В ответ запишем промежутки, на которых стоит знак «минус», при этом корни числителя в ответ не включаем, так как неравенство строгое.

Ответ: $x \in (-\infty, -3-\sqrt{2}) \cup (-4, -3+\sqrt{2})$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{4}{1-x} > x+2.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$\frac{4}{1-x} > x+2 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} + x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{4+(x-1)(x+2)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+(x^2+x-2)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+2}{x-1} < 0.$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 2$ отрицательный, то выражение, стоящее в числителе полученной дроби, положительно при любом значении переменной x. Поэтому, чтобы дробь была отрицательна, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель дроби был отрицателен. Имеем: $x - 1 < 0$, то есть $x < 1$.

Ответ: $x \in (-\infty,\ 1)$.

Пример 7. Решить неравенство

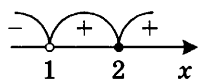
$$x \le 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, удобному для его решения методом интервалов:

$$x \le 3 - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + x - 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1+(x-1)(x-3)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(2,\ +\infty)$ ставим знак «плюс», далее знак не меняется в точке $x = 2$ и меняется в точке $x = 1$. Кроме того, корень числителя $x = 2$ является решением неравенства, так как неравенство нестрогое. В ответ запишем промежуток $(-\infty,\ 1)$ на котором стоит знак «минус», и точку $x = 2$.

Ответ: $x \in (-\infty,\ 1) \cup \{2\}$.

Пример 8. Решить неравенство

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$$

Решение. Пусть $x^2 + 3x - 1 = y$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

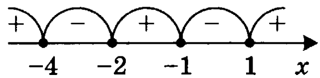
$$(y + 2)(y - 2) \geq 5 \Leftrightarrow y^2 - 4 \geq 5 \Leftrightarrow y^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)(y + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 1 - 3)(x^2 + 3x - 1 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 4)(x + 1)(x + 2) \geq 0.$$

Нанесем точки на числовую прямую и определим знаки на полученных промежутках.



Согласно правилу, на промежутке $(1, +\infty)$ ставим знак «плюс», далее знаки меняются во всех точках. Кроме того, все концы промежутков входят в ответ, так как неравенство нестрогое. В ответ записываем промежутки, на которых стоит знак «плюс».

Ответ: $x \in (-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup [1, +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $(x - 1)(x + 2)(x - 6) < 0$.
2. Решить неравенство $(x + 1)(3 - x)(x - 4)(x + 7) \geq 0$.
3. Решить неравенство $\dfrac{(x-1)}{x(x+6)} < 0$.
4. Решить неравенство $\dfrac{(x+8)(x+3)}{4-x} < 0$.
5. Решить неравенство $\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$.
6. Решить неравенство $\dfrac{(x+3)(x-8)}{x(5-x)} \geq 0$.
7. Решить неравенство $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)^3(x+1)} \geq 0$.
8. Решить неравенство $\dfrac{(x+4)(x-1)^3}{x^4(x-5)^2} \leq 0$.

9. Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x+6}{1-x}<0.$

10. Найти целое решение неравенства $\dfrac{2x^2+x+2}{x^2-1}<0.$

11. Решить неравенство $\dfrac{x-3}{x^2+2x-5}>\dfrac{1}{2}.$

12. Найти наименьшее положительное решение неравенства $\dfrac{x^2-5x+4}{(x^2+2)(x+2)}\le 0.$

13. Решить неравенство $x-3+\dfrac{4}{x+1}>0.$

14. Найти наименьшее решение неравенства $x\ge\dfrac{25}{1-x}-9.$

15. Решить неравенство $x-1>\dfrac{4x}{3-x}.$

16. Найти наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{4x^2+45x}{x-1}\ge 25.$

17. Решить неравенство $\dfrac{1}{2x}\ge\dfrac{1}{1-x}.$

18. Найти сумму целых решений неравенства $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}.$

19. Решить неравенство $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x-3}+1\le 0.$

20. Найти сумму целых отрицательных решений неравенства $\dfrac{3x^2+x-9}{x}\ge -5.$

21. Решить неравенство $\dfrac{x}{x-1}\le\dfrac{x-2}{x}.$

22. Найти середину промежутка конечной длины, который является решением неравенства $\dfrac{2}{x+8}<\dfrac{2x-1}{x^2-1}.$

23. Решить неравенство $\dfrac{30x-9}{x-2}\ge 25(x+2).$

24. Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+8x-9}\ge\dfrac{1}{3x^2-5x+2}.$

§ 2. РАСКРЫТИЕ МОДУЛЕЙ В УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ решается следующим образом:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Такое решение называется «раскрытием модуля по определению». Кроме того, существует и другой способ решения этого уравнения:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

В частности, уравнение вида $|f(x)| = a$, где $a \ge 0$, можно решать следующим образом:

$$|f(x)| = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно следующей совокупности:

$$|f(x)| = |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ и $|f(x)| > g(x)$ можно решать, раскрывая модуль по определению:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Кроме того, существует и другой способ решения этих неравенств:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ -f(x) > g(x); \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

В частности, неравенство вида $|f(x)| < c$ ($|f(x)| > c$), где $c > 0$, равносильно следующей системе (совокупности):

$$|f(x)| < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < c, \\ f(x) > -c; \end{cases} \qquad |f(x)| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > c, \\ f(x) < -c. \end{array}\right.$$

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$ решается следующим образом:

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0.$$

Если в уравнении или неравенстве модулей два или больше, мы поступаем следующим образом. Приравниваем все выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю и полученные точки в нужном порядке расставляем на числовой прямой. Затем определяем знаки подмодульных выражений на каждом из образовавшихся промежутков и в соответствие с этими знаками раскрываем модули, т.е. данный модуль раскрывается на промежутке без изменения знака, если подмодульное выражение положительно, и с изменением знака, если оно отрицательно. Что касается концов промежутков, то поскольку подмодульное выражение там равно нулю, то модуль можно раскрыть любым из этих двух способов, т.е. общий конец двух промежутков можно включить в любой из них на свой выбор.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$x^2+4|x-3|-7x+11=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\ge 0, \\ x^2+4(x-3)-7x+11=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3<0, \\ x^2-4(x-3)-7x+11=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3, \\ x^2-3x-1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ x^2-11x+23=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{29}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, \\ x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|x^2+x-1|=2x-1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$|x^2+x-1|=2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=2x-1, \\ x^2+x-1=1-2x; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x=0, \\ x^2+3x-2=0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=1$, $x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^2 - 7x - |3x - 1| < 12.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$x^2 - 7x - |3x - 1| < 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 7x - (3x - 1) < 12, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 1 < 0, \\ x^2 - 7x + (3x - 1) < 12; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x \ge 1, \\ x^2 - 10x - 11 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < 1, \\ x^2 - 4x - 13 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{3}, \\ -1 < x < 11, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ , 2 - \sqrt{17} < x < 2 + \sqrt{17}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le x < 11, \\ 2 - \sqrt{17} < x < \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{17}, 11).$$

Ответ: $x \in (2 - \sqrt{17}, 11)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$5x - 3| > > x^2 - x - 2.$$

Это неравенство равносильно следующей совокупности:

$$|5x - 3| > x^2 - x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 3 > x^2 - x - 2, \\ 5x - 3 < 2 + x - x^2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 1 < 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2}, \\ -5 < x < 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in (-5; 3 + 2\sqrt{2}).$$

Ответ: $x \in (-5; 3 + 2\sqrt{2})$.

Пример 5. Решить уравнение

$$|x^2 - x - 1| = |x + 2|.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$|x^2 - x - 1| = |x + 2| \Leftrightarrow$$

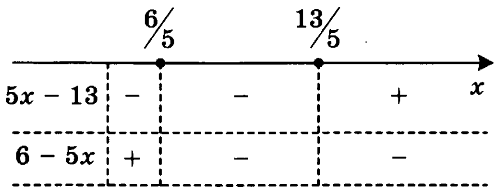
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = x + 2, \\ x^2 - x - 1 = -x - 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -1$, $x = 3$.

Пример 6. Решить уравнение

$$|5x - 13| - |6 - 5x| = 7.$$

Решение. Разобьем числовую ось на три промежутка и определим знаки подмодульных выражений на каждом из этих промежутков.



Раскрывая модули по определению, получим следующую совокупность:

$$|5x - 13| - |6 - 5x| = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{6}{5}, \\ 13 - 5x - (6 - 5x) = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{6}{5} < x \le \dfrac{13}{5}, \\ 13 - 5x - (5x - 6) = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{13}{5}, \\ 5x - 13 - (5x - 6) = 7; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{6}{5}, \\ 7 = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{6}{5} < x \le \dfrac{13}{5}, \\ x = \dfrac{6}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{13}{5}, \\ -7 = 7; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{6}{5}\right].$$

Ответ: $x \in \left(-\infty, \dfrac{6}{5}\right]$.

Пример 7. Решить неравенство

$$3|x-2|+|5x-4|\le 10.$$

Решение. Разобьем числовую ось на три промежутка и определим знаки подмодульных выражений на каждом из этих промежутков.

x		$\frac{4}{5}$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$5x-4$	$-$		$+$		$+$

Раскрывая модули по определению, получим следующую совокупность:

$$3|x-2|+|5x-4|\le 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le \dfrac{4}{5}, \\ -3(x-2)-(5x-4)\le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4}{5}<x\le 2, \\ -3(x-2)+5x-4\le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ 3(x-2)+5x-4\le 10; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le \dfrac{4}{5}, \\ -8x+10\le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4}{5}<x\le 2, \\ 2x+2\le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ 8x-10\le 10; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le \dfrac{4}{5}, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4}{5}<x\le 2, \\ x\le 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x\le \dfrac{5}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{4}{5}<x\le 2, \\ 2<x\le \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{5}{2}\right].$$

Ответ: $x\in\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$.

Пример 8. Решить уравнение

$$2|x-5|-1=3|2x-5|-4|x-1|.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$2|x-5|-1=3|2x-5|-4|x-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ 2(5-x)-1=3(5-2x)+4(x-1), \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le \frac{5}{2}, \\ 2(5-x)-1=3(5-2x)-4(x-1), \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5}{2} < x \le 5, \\ 2(5-x)-1=3(2x-5)-4(x-1), \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5, \\ 2(x-5)-1=3(2x-5)-4(x-1); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ 9=11, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le \frac{5}{2}, \\ 8x=10, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5}{2} < x \le 5, \\ 4x=20, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5, \\ 11=11; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{4}, \\ x=5, \\ x>5; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup [5,+\infty).$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup [5,+\infty)$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\frac{|x-2|}{\left|x-1\right|-1}=1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ \dfrac{2-x}{(1-x)-1}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le 2, \\ \dfrac{2-x}{(x-1)-1}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x-2}{(x-1)-1}=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1, \\ \dfrac{x-2}{x}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le 2, \\ \dfrac{2-x}{x-2}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x-2}{x-2}=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнения первых двух систем решений не имеют, третья система имеет решением $x > 2$.

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ \dfrac{(5-x)-1}{2(6-x)-4} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \dfrac{(x-5)-1}{2(6-x)-4} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{(x-5)-1}{2(x-6)-4} \le 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ \dfrac{4-x}{8-2x} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \dfrac{x-6}{8-2x} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{x-6}{2x-16} \le 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 4, \\ \dfrac{1}{2} \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \dfrac{3x-14}{x-4} \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \dfrac{x-10}{x-8} \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 4, \end{cases} \\ \begin{cases} 5 < x \le 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{14}{3}, \\ x < 4, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 8, \\ x \ge 10; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 4, \end{cases} \\ 5 < x \le 6, \\ 6 < x < 8, \\ x \ge 10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 4) \cup (4, 8) \cup [10, +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty,\ 4) \cup (4,\ 8) \cup [10,\ +\infty)$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\big||3 - x| - x + 1\big| + x = 6.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\big||3 - x| - x + 1\big| + x = 6 \Leftrightarrow \big||3 - x| - x + 1\big| = 6 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| - x + 1 = 6 - x, \\ |3 - x| - x + 1 = x - 6; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 6, \\ \left[\begin{array}{l} |3 - x| = 5, \\ |3 - x| = 2x - 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Первое из полученных уравнений равносильно совокупности:

$$|3 - x| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3 - x = 5, \\ 3 - x = -5; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Решением системы при этом будет служить значение $x = -2$. Второе из полученных уравнений равносильно следующей системе:

$$|3-x| = 2x-7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3-x = 2x-7, \\ 3-x = 7-2x; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}, \\ x = 4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4,$$

что также является решением задачи.

Ответ: $x = -2$, $x = 4$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\big|x + |1-x|\big| > 3.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\big|x + |1-x|\big| > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + |1-x| > 3, \\ x + |1-x| < -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1-x| > 3-x, \\ |1-x| < -3-x; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x > 3-x, \\ 1-x < x-3, \\ \begin{cases} 1-x < -3-x, \\ 1-x > 3+x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 > 3, \\ x > 2, \\ \begin{cases} 1 < -3, \\ x < -1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Пример 13. Решить неравенство

$$|x^2 - 2x - 3| < |x^2 - x + 4|.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$|x^2 - 2x - 3| < |x^2 - x + 4| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x^2 - 2x - 3) - (x^2 - x + 4)) \times$$
$$\times ((x^2 - 2x - 3) + (x^2 - x + 4)) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x-7)(2x^2 - 3x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-1)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-7; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(-7; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $x^2 + 3x + |x + 3| = 0$.

2. Решить уравнение $|x^2 - 2x - 1| = x - 1$.

3. Решить уравнение $\dfrac{2x^2 - 6}{|x| - 1} = |x| + 3$.

4. Решить неравенство $x^2 - 2|x + 1| < 0$.

5. Решить неравенство $\left|\dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}\right| \geq 2$.

6. Решить неравенство $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$.

7. Найти наибольшее целое решение неравенства

$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3.$$

8. Найти наименьший из корней уравнения

$$|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|.$$

9. Найти наименьший целый корень уравнения

$$|x - 3| + 2|x + 1| = 4.$$

10. Решить уравнение $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.

11. Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.

12. Решить уравнение $\dfrac{|2x - 1|}{|x - 1|} = \dfrac{|2x + 1|}{|x + 1|}$.

13. Решить неравенство $|x - 1| + |2 - x| > 3$.

14. Решить неравенство $|x^2 - 1| < x^2 - |x| + 1$.

15. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| + 2|x - 2| < 5$.

16. Решить неравенство $\dfrac{2x + 5}{|x + 1|} \geq 1$.

17. Решить неравенство $\dfrac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1$.

18. Решить неравенство $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{|x| - 1} \geq \dfrac{2}{x - 1}$.

19. Решить неравенство $\dfrac{|x - 3|}{|x - 2| - 1} \geq 1$.

20. Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \le 2.$

21. Решить уравнение $||x-1|-7| = 10.$

22. Решить уравнение $|x^2 - 3|x| + 1| = 1.$

23. Решить уравнение $|4x - |x-2| + 3| = 16.$

24. Решить уравнение $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.$

25. Решить неравенство $|x^2 + x - 2| + |x + 4| \le x^2 + 2x + 6.$

26. Решить неравенство $\dfrac{3|x|-11}{x-3} > \dfrac{3x+14}{6-x}.$

27. Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \le 0.$

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно следующей системе:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно решать одним из следующих двух способов:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно следующей системе:

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ решается следующим образом:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

И, наконец, неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Если в уравнении или неравенстве радикалов два или больше, мы поступаем следующим образом: находим область определения, возводим в квадрат два раза, при этом следим за знаками обеих частей уравнения или неравенства. Если знаки левой и правой частей разные, то в квадрат возводить нельзя. Возможно также рассмотрение двух случаев в зависимости от знака одной из частей неравенства.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4x \ge 0, \\ 24 - 10x = (3 - 4x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{4}, \\ 16x^2 - 14x - 15 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}, \\ x = -\dfrac{5}{8}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}.$$

Ответ: $x = -\dfrac{5}{8}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+5x-1}=\sqrt{x+4}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x^2+5x-1}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4\ge 0, \\ x^2+5x-1=x+4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4, \\ x^2+4x-5=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $x=1$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x-3}\ge\sqrt{2x^2+x-3}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x^2-x-3}\ge\sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-3\ge 0, \\ x^2-x-3\ge 2x^2+x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-3\ge 0, \\ x^2+2x\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup[1,+\infty), \\ x\in[-2,0]; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-2,-\dfrac{3}{2}\right].$$

Ответ: $x\in\left[-2,-\dfrac{3}{2}\right]$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x^2+4x-5}>2x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3<0, \\ x^2+4x-5\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ x^2+4x-5>(2x-3)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{3}{2}, \\ x\in(-\infty,-5]\cup[1,+\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2}, \\ 3x^2-16x+14<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty,-5]\cup\left[1,\dfrac{3}{2}\right), \\ \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{8-\sqrt{22}}{3}<x<\dfrac{8+\sqrt{22}}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty,-5]\cup\left[1,\dfrac{3}{2}\right), \\ \dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{8+\sqrt{22}}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-5]\cup\left[1,\frac{8+\sqrt{22}}{3}\right).$$

Ответ: $x\in(-\infty,-5]\cup\left[1,\dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.

Пример 5. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{x^2-3x+2}\le 3x-3.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{x^2-3x+2}\le 3x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ 3x-3\ge 0, \\ x^2-3x+2\le(3x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)\ge 0, \\ x\ge 1, \\ 8x^2-15x+7\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty), \\ x\in[1,+\infty), \\ x\in\left(-\infty,\dfrac{7}{8}\right]\cup[1,+\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{1\}\cup[2,+\infty).$$

Ответ: $x\in\{1\}\cup[2,+\infty)$.

Пример 6. Найти все действительные решения уравнения

$$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}2x^2-4x\ge 0,\\ x^2-1\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty),\\ x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty);\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -1]\cup[2,\ +\infty).$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$2x^2-4x=x^2+1+2\sqrt{x^4-1}+x^2-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^4-1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\ge 0,\\ x^4-1=4x^2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ \left(x^2-(2+\sqrt{5})\right)\left(x^2-(2-\sqrt{5})\right)=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ x^2=2+\sqrt{5};\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

Проверкой убеждаемся, что найденный корень принадлежит области определения данного уравнения.

Ответ: $x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{15+5x}-\sqrt{19-5x}=2.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}15+5x\ge 0,\\ 19-5x\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3,\\ x\le\dfrac{19}{5};\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-3,\frac{19}{5}\right].$$

Перепишем исходное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{15+5x}=\sqrt{19-5x}+2.$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$15 + 5x = 19 - 5x + 4\sqrt{19 - 5x} + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{19 - 5x} = 5x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4 \ge 0, \\ 76 - 20x = (5x - 4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{5}, \\ 5x^2 - 4x - 12 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 2.$$

Найденный корень принадлежит области определения данного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 8. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x - 3}.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x + 2 \ge 0, \\ x - 1 \ge 0, \\ 2x - 3 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{x + 2} = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 3}.$$

Так как на области определения обе части уравнения неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$x + 2 = x - 1 + 2\sqrt{(x - 1)(2x - 3)} + 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \ge 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 = (3 - x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Области определения удовлетворяет $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 9. Найти все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(x+1)(\sqrt{x^2+x-2}-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=0, \\ x^2+x-2 \ge 0, \end{cases} \\ \sqrt{x^2+x-2}-2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2} = 2 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2,\ x = -3.$$

Ответ: $x = -3$, $x = 2$.

Пример 10. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0, \\ \begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x-1 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \\ \begin{cases} x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty), \\ x \ge 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \\ x \in (2,+\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [2,+\infty).$$

Ответ: $x \in \{-1\} \cup [2, +\infty)$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}<\sqrt{x-1}.$$

Решение. Найдем область определения данного неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x+3\geq 0, \\ x-2\geq 0, \\ x-1\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[2,+\infty).$$

Преобразуем неравенство к виду $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}$.

Так как на области определения обе части полученного неравенства неотрицательны, можем возвести их в квадрат:

$$x+3<x-2+2\sqrt{(x-2)(x-1)}+x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x+2}>6-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-x\geq 0, \\ 4(x^2-3x+2)>(6-x)^2, \\ x\geq 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x<0, \\ x\geq 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq 6, \\ x^2>\dfrac{28}{3}, \\ x\geq 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>6, \\ x\geq 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq 6, \\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{28}{3}}\right),\cup\left(\sqrt{\dfrac{28}{3}},+\infty\right), \\ x\geq 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>6, \\ x\geq 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left(\sqrt{\dfrac{28}{3}},6\right], \\ x>6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{\frac{28}{3}},+\infty\right).$$

При этом равносильный переход от неравенства к совокупности был осуществлен с учетом найденной области определения.

Ответ: $x\in\left(\sqrt{\dfrac{28}{3}},+\infty\right)$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\ge 0,\\ x\ge 0,\\ 1-x>x,\\ 1-x-2\sqrt{(1-x)x}+x>\frac{1}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1,\\ x\ge 0,\\ x<\frac{1}{2},\\ \sqrt{x-x^2}<\frac{1}{3};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<\frac{1}{2},\\ x-x^2<\frac{1}{9};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<\frac{1}{2},\\ 9x^2-9x+1>0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<\frac{1}{2},\\ x\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6},+\infty\right);\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right).$$

О т в е т: $x\in\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

2. Решить уравнение $2\sqrt{x+5}=x+2$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x^3-x}=\sqrt{x-1}$.

4. Решить уравнение $\sqrt{-x^2-x}=\sqrt{x^2-1}$.

5. Решить уравнение $\sqrt{x^4-10x^2+25}=\sqrt{x^4-4x^2+4}$.

6. Решить неравенство $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{3x-10}$.

7. Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-1} > \sqrt{x+7}$.

8. Решить неравенство $\sqrt{7+x} \geq 7-2x$.

9. Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

10. Решить неравенство $\sqrt{2x^2+15x-17} > x+3$.

11. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 3-x$.

12. Решить неравенство $\sqrt{9x-20} < x$.

13. Решить неравенство $x > \sqrt{x^2-x-12}$.

14. Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 4-x$.

15. Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.

16. Решить уравнение $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

17. Решить уравнение $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}$.

18. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$.

19. Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$.

20. Решить неравенство $\sqrt{1+x} > 1+\sqrt{1-x}$.

21. Решить неравенство $\sqrt{2-x} - \sqrt{4+x} \leq \sqrt{x+3}$.

22. Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{2-x} < 0.$$

23. Решить неравенство $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$.

24. Решить неравенство $\sqrt{x^2+3x+2} < 1+\sqrt{x^2-x+1}$.

25. Решить уравнение $(x^2-x-6)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x}} = 0$.

26. Решить уравнение $(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23)$.

27. Решить неравенство $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0$.

28. Решить неравенство

$$\sqrt{-25x^2+15x-2} \cdot (8x^2-6x+1) \geq 0.$$

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

4.1. Основные формулы и решение простейших уравнений и неравенств

В этом разделе мы приведем основные формулы, которые будут необходимы при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Кроме этого, приводятся схемы решений простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств:

$$a_m \cdot a_n = a^{m+n}; \qquad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \text{ но } \log_a bc = \log_a|b| + \log_a|c|;$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \text{ но } \log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|;$$

$$c\log_a b = \log_a b^c, \text{ но } \log_a b^c = c\log_a|b|;$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_{|a|} b;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \Rightarrow \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ при $a > 1$ и неравенству $f(x) < g(x)$ при $a \in (0, 1)$.

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно одной из следующих систем:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\log_{f(x)}g(x) = a$ равносильно системе

$$\log_{f(x)}g(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (f(x))^a = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Уравнение вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$ равносильно следующей совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = 1, \\ \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

если $a > 1$, и системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

если $a \in (0,1)$.

4.2. Преобразование суммы и разности логарифмов

Рассмотрим несколько примеров, при решении которых применяются формулы преобразования суммы и разности логарифмов. При решении данного типа задач необходимо найти область определения уравнения или неравенства.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 x - \log_3(x + 8) = -\log_3(x + 3).$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 8 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -8, \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty).$$

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3(x+3) =$$
$$= \log_3(x+8) \Leftrightarrow \log_3 x(x+3) = \log_3(x+8) \Leftrightarrow x(x+3) = x+8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ или } x = -4.$$

Области определения удовлетворяет только $x = 2$.
Ответ: $x = 2$.

Пример 2. Решить неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \geq 1.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, +\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 - 1 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}2(x-2)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)2 \leq x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 5].$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (2, 5]$.
Ответ: $x \in (2, 5]$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\lg(x-3) + \lg x < \lg\left(\frac{9x}{2} + 4\right).$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x > 0, \\ \dfrac{9x}{2} + 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > 0, \\ x > -\dfrac{8}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3, +\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\lg(x-3)+\lg x<\lg\left(\frac{9x}{2}+4\right)\Leftrightarrow \lg(x(x-3))<\lg\left(\frac{9x}{2}+4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x<\frac{9x}{2}+4\Leftrightarrow 2x^2-15x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},8\right).$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (3, 8)$.
Ответ: $x \in (3, 8)$.

Пример 4. Найти число корней уравнения

$$\log_3(x+8)+\frac{1}{2}\log_3 x^2=2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\log_3(x+8)+\frac{1}{2}\log_3 x^2=2\Leftrightarrow \log_3(x+8)+\log_3|x|=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+8)|x|=\log_3 9\Leftrightarrow (x+8)|x|=9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\(x+8)x=9,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\-(x+8)x=9;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\x^2+8x-9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\x^2+8x+9=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-4\pm\sqrt{7}.\end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня.
Ответ: 3.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_2((x-3)(x+2))+\log_{\frac{1}{2}}((x+2)(x-6))\le 2.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}(x-3)(x+2)>0,\\(x+2)(x-6)>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty),\\x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty);\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_2((x-3)(x+2)) + \log_{\frac{1}{2}}((x+2)(x-6)) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2((x-3)(x+2)) \le \log_2((x+2)(x-6)) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2((x-3)(x+2)) \le \log_2 4((x+2)(x-6)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) \le 4(x+2)(x-6) \Leftrightarrow (x+2)(4(x-6) -$$
$$- x + 3) \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(3x-21) \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [7, +\infty).$$

С учетом области определения получаем, что $x \in (-\infty, -2) \cup$ $\cup [7, +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup [7, +\infty)$.

Пример 6. Решить уравнение $\dfrac{\log_2(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x-5)} = 1$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{\log_2(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x-5)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x-5)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x-5)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+3) + \log_2(x-5)}{\log_2(x-5)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 > 0, \\ \log_2(x-5) \ne 0, \\ \log_2(x+3) + \log_2(x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \ne 6, \\ \log_2(x+3)(x-5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \ne 6, \\ (x+3)(x-5) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \ne 6, \\ x^2 - 2x - 16 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{17}.$$

Ответ: $x = 1 + \sqrt{17}$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_4(4-x)^2-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}(4-x)^2>0,\\ \dfrac{4-x}{5-x}>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 4,\\ x\in(-\infty,4)\cup(5,+\infty);\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty,4)\cup(5,+\infty).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_4(4-x)^2-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0\Leftrightarrow\log_2|4-x|-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\frac{|4-x|(5-x)}{4-x}>0.$$

Если $x<4$, данное неравенство принимает вид $\log_2(5-x)>0$, откуда $5-x>1$ и $x<4$. Если же $x>5$ получаем, что $\log_2(x-5)>0$, следовательно, $x-5>1$ и $x>6$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x\in(-\infty,4)\cup(6,+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty,4)\cup(6,+\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(6+x-x^2)+\log_2(x^2-4x+4)+2>2\log_4(x^2-6x+8)^2.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases}6+x-x^2>0,\\ x^2-4x+4>0,\\ (x^2-6x+8)^2>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<3,\\ x\neq 2,\\ x\neq 2,\ x\neq 4;\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2,2)\cup(2,3).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{\sqrt{2}}(6+x-x^2)+\log_2(x^2-4x+4)+2>2\log_4(x^2-6x+8)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(6+x-x^2)+2\log_2|x-2|+2>2\log_2(|x-2|\cdot|x-4|)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2(6+x-x^2)+\log_2|x-2|+1>\log_2(|x-2|\cdot(4-x)),$$

так как на всей области определения выполнено неравенство $x<4$. Имеем далее:

$$\log_2(6 + x - x^2) + \log_2|x - 2| + 1 > \log_2(|x - 2| \cdot (4 - x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(2(6 + x - x^2) \cdot |x - 2|) > \log_2(|x - 2| \cdot (4 - x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(6 + x - x^2) \cdot |x - 2| > |x - 2| \cdot (4 - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(6 + x - x^2) > 4 - x,$$

так как число $|x - 2|$ положительно при всех x из области определения. И, наконец,

$$2(6+x-x^2) > 4-x \Leftrightarrow 2x^2-3x-8<0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right).$$

С учетом области определения получаем, что $x \in \left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 2\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 2\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $3 + 2\log_2(x - 7) = \log_2(2x + 1)$.
2. Решить уравнение
$$2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x - 1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2.$$
3. Решить уравнение
$$\log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}.$$
4. Найти число корней уравнения
$$2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0.$$
5. Решить уравнение $\log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x-1)$.
6. Решить уравнение
$$\log_{16}(x^2 - 2x - 3)^2 - 2\log_{16}(x^2 + x - 2) = \frac{1}{2}.$$
7. Найти наименьшее целое решение неравенства
$$\log_{0,5}(x^2 - 3x + 4) - \log_{0,5}(x - 1) < -1.$$
8. Решить неравенство
$$\log_5(x + 2) + \log_5(1 - x) \geq \log_5((1 - x)(x^2 - 8x - 8)).$$

9. Решить неравенство $4\log_4(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-5) < 6$.

10. Решить неравенство $\log_2 \dfrac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \dfrac{(x-1)^3}{3x-2} < 1$.

11. Решить неравенство

$$\log_3(x^3 + x^2 - 2x) - 2\log_9(x^2 - x) < \log_3 5.$$

12. Решить неравенство

$$\log_{27}(x^2 + 4x + 3)^3 + \log_3(x^2 - 4x + 3) < 2.$$

13. Решить неравенство

$$\log_2((3 + 2x - x^2)(x - 2)) - \log_3((4 - 4x + x^2)(8x - 16)) + 1 > 0.$$

14. Решить неравенство $\log_5 \dfrac{5-x}{2-x} \ge \log_{25}\sqrt{(x-5)^4} - 1$.

15. Решить неравенство $\log_4(x^2-4)^2 + \log_2 \dfrac{x-1}{x^2-4} > 0$.

16. Решить неравенство

$$3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \le 4 + \log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}.$$

4.3. Метод замены переменной

Одним из основных методов решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств является метод замены переменной. При помощи замены уравнение или неравенство, как правило, сводится к квадратному. Необходимо помнить при этом, что выражение a^x, где $a > 0$, при всех x принимает только положительные значения.

Пример 1. Решить уравнение

$$9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$y^2 - 25y - 54 = 0 \Leftrightarrow y = 27 \text{ или } y = -2.$$

Условию $y > 0$ удовлетворяет $y = 27$. Значит,

$$y = 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$$

Решение. Разделим обе части данного уравнения на 25^x, что возможно, так как это выражение положительно при всех значениях переменной x. Имеем:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 2 = 0.$$

Пусть $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, $y > 0$. Тогда полученное уравнение примет следующий вид:

$$3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 2, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{2}{5}} 2, \\ x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$, $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{3}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0.$$

Решение. При $x \neq 1$ преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} + 20 = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 26 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 20 = 0.$$

Пусть $2^{\sqrt{x}} = t$, тогда

$$8t^2 - 26t + 20 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 13t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ или } t = \frac{5}{4}.$$

Если $t = 2$, то $2^{\sqrt{x}} = 2$, откуда $x = 1$, что не удовлетворяет области определения данного уравнения. Если же $t = \frac{5}{4}$, то $2^{\sqrt{x}} = \frac{5}{4}$, откуда $\sqrt{x} = \log_2 \frac{5}{4}$ и $x = \log_2^2 \frac{5}{4}$ (так как верно неравенство $\log_2 \frac{5}{4} > 0$).

Ответ: $x = \log_2^2 \frac{5}{4}$.

Пример 4. Решить неравество

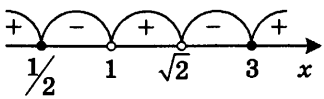
$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{7}{y^2 - 2} \geq \frac{2}{y - 1} \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 7y + 3}{(y^2 - 2)(y - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)}{(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2})(y - 1)} \leq 0 \overset{(т.к.\ y+\sqrt{2}>0)}{\Leftrightarrow} \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)}{(y - \sqrt{2})(y - 1)} \leq 0.$$

Решим данное неравенство методом интервалов.



Получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ \sqrt{2} < y \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq 3^x < 1, \\ \sqrt{2} < 3^x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 \frac{1}{2} \leq x < 0, \\ \log_3 \sqrt{2} < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[\log_3 \frac{1}{2}, 0\right) \cup (\log_3 \sqrt{2}, 1]$.

Пример 5. Решить неравенство

$$2 \cdot 2^{-2x^2} - 7 \cdot 2^{-x^2} + 3 > 0.$$

Решение. Пусть $y = 2^{-x^2}$, $y > 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$2y^2-7y+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<\dfrac{1}{2}, \\ y>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{-x^2}<\dfrac{1}{2}, \\ 2^{-x^2}>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2<-1, \\ -x^2>\log_2 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>1, \\ x^2<-\log_2 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty),$$

так как второе неравенство совокупности решений не имеет, поскольку $-\log_2 3 < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0.$$

Решение. Разделим обе части исходного неравенства на 25^x. Имеем:

$$5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0.$$

Пусть $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = y$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$5y^2-18y+9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<\dfrac{3}{5}, \\ y>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x<\dfrac{3}{5}, \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^x>3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<\log_{\frac{3}{5}} 3. \end{array}\right.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 3\right) \cup (1,+\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 3\right) \cup (1,+\infty)$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\lg^2 x^2 - 3\lg x - 1 = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\lg^2 x^2 - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lg x)^2 - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lg^2 x - 3\lg x - 1 = 0.$$

Пусть $\lg x = y$. Имеем:

$$4y^2 - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -\dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = -\dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = 10^{-\frac{1}{4}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 10$, $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\log^2_{0,5} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\log^2_{0,5} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8 \Leftrightarrow (-\log_2 4x)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 11 = 0 \Leftrightarrow \log^2_2 x + 6\log_2 x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = -7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2^{-7}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{1}{128}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2$, $x = \dfrac{1}{128}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2 x} + 1 = \log_2 x - \sqrt{\log_{16} x}\,.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{\log_2 x} + 1 = \log_2 x - \sqrt{\log_{16} x} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} + 1 = \log_2 x - \frac{1}{2}\sqrt{\log_2 x}.$$

Пусть $t = \sqrt{\log_2 x}$, $t \geq 0$. Имеем:

$$t + 1 = t^2 - \frac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \quad \text{или} \quad t = -\frac{1}{2}.$$

Подходит только $t = 2$. Тогда $\sqrt{\log_2 x} = 2$, откуда $\log_2 x = 4$ и $x = 16$.

Ответ: $x = 16$.

Пример 10. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$2\log_7 x - \log_x 49 < 3.$$

Решение. Пусть $y = \log_7 x$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$2y - \frac{2}{y} < 3 \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 3y - 2}{y} < 0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)\left(y + \frac{1}{2}\right)}{y} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2) \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1, 49).$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1, 49)$.

Пример 11. Решить неравенство

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 2)(2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2) \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{64}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 2)(2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2) \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{\frac{1}{2}} x + 2)(2 - \log_{\frac{1}{2}} x) \le 3\log_{\frac{1}{2}} x + 6.$$

Пусть $\log_{\frac{1}{2}} x = y$. Имеем:

$$(y+2)(2-y) \le 3y + 6 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \le -2, \\ y \ge -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x \le -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \ge -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ 0 < x \le 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0, 2] \cup [4, +\infty).$$

Ответ: $x \in (0, 2] \cup [4, +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$.

2. Решить уравнение $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

3. Решить уравнение $3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$.

4. Найти меньший корень уравнения

$$(2 \cdot 3^x + 5^x) \cdot (3^{x+1} + 2 \cdot 5^x) = 15^{x+1}.$$

5. Решить неравенство $9^{2x+0,5} - 10 \cdot 3^{2x} > \dfrac{11}{3}$.

6. Решить неравенство $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.

7. Решить неравенство $3 \cdot 49^x - 16 \cdot 21^x + 21 \cdot 9^x < 0$.

8. Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.

9. Решить неравенство $\dfrac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geq 0$.

10. Решить неравенство $\dfrac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$.

11. Решить неравенство $3^x - 3^{0,5-x} > \sqrt{3} - 1$.

12. Решить неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

13. Решить уравнение $\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$.

14. Решить уравнение

$$\log_x \sqrt[3]{4} + 3\log_x(x\sqrt[3]{2}) + \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 12.$$

15. Найти $\log_3 x$, если $x < 3$ и

$$\log_3 3x \cdot \log_3 9x \cdot \log_3 27x = \log_3^3 x + 23.$$

16. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} + \dfrac{3}{2}$.

17. Решить неравенство $\dfrac{\log_2 x - 3}{6\log_x 2 - 1} \leq 2$.

18. Решить неравенство $\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geq \dfrac{37}{4}$.

19. Решить неравенство

$$\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32.$$

20. Решить неравенство $\dfrac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \dfrac{1}{1 - 2^{-x}}$.

21. Решить неравенство

$$\log_{25}(5^x - 1) \cdot \log_5(5^{x+2} - 25) < 4.$$

22. Решить неравенство $2(\log_x 2 - 1)\log_2(2x) \leq 3$.

23. Решить неравенство

$$\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x - 3)^2 \geq 2.$$

24. Решить неравенство $\log^3_x 16 + 2\log^2_x 16^2 + 4\log_x 16^4 \geq 0$.

4.4. Расщепление неравенств

В данном разделе рассматриваются, как правило, такие неравенства, где основание показательных и логарифмических функций содержит переменную. Так как при разных значениях переменной основание может быть как больше, так и меньше единицы, необходимо рассматривать два случая. При решении такого типа неравенств можно использовать схемы, которые приведены ниже.

Неравенство вида $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)}$ равносильно следующей совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)}$ равносильно совокупности:

$$(f(x))^{g(x)} \geq (f(x))^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x \geq 1, \\ g(x) \geq h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1, \\ g(x) \leq h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $\log_{f(x)} g(x) > a$ равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{f(x)} g(x) > a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < (f(x))^a, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > (f(x))^a. \end{cases} \end{array}\right.$$

И, наконец, неравенство вида $\log_{f(x)} g(x) < a$ равносильно следующей совокупности:

$$\log_{f(x)} g(x) < a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > (f(x))^a, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < (f(x))^a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\log_{x^2-9}(x^2 + 8x + 12) \le \log_{x^2-9} 12.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{x^2-9}(x^2 + 8x + 12) \le \log_{x^2-9} 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 - 9 < 1, \\ x^2 + 8x + 12 \ge 12, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 9 > 1, \\ 0 < x^2 + 8x + 12 \le 12; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9 < x^2 < 10, \\ x^2 + 8x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 10, \\ x^2 + 8x + 12 > 0, \\ x^2 + 8x \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\sqrt{10}, -3) \cup (3, \sqrt{10}), \\ x \in (-\infty, -8] \cup [0, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty), \\ x \in (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty), \\ -8 \le x \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < x < \sqrt{10}, \\ -8 \le x < -6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-8, -6) \cup (3, \sqrt{10}).$$

Ответ: $x \in [-8, -6) \cup (3, \sqrt{10})$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x > 1, \\ 0 < x^2 - 5x + 6 < 2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x \in (-\infty, 1) \cup (6, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty), \\ 1 < x < 6; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x \in (1, 2) \cup (3, 6); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2) \cup (3, 6).$$

Ответ: $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, 2) \cup (3, 6)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\left(1 - \frac{2x}{5}\right)^{7 + 11x - 6x^2} \geq 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\dfrac{2x}{5} \ge 1, \\ 7+11x-6x^2 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 1-\dfrac{2x}{5} \le 1, \\ 7+11x-6x^2 \le 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0, \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{7}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < \dfrac{5}{2}, \\ x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \le x \le 0, \\ \dfrac{7}{3} \le x < \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, \dfrac{5}{2}\right)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 > 0.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 > 0 \Leftrightarrow \log_{1-(x-1)^2}\left|x-\frac{3}{2}\right| > 0.$$

Так как основание логарифма при любом допустимом x не превосходит единицу, полученное неравенство равносильно следующей системе:

$$\log_{1-(x-1)^2}\left|x-\frac{3}{2}\right| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1-(x-1)^2 < 1, \\ 0 < \left|x-\dfrac{3}{2}\right| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 < 1, \\ x \ne 1, \\ \left|x-\dfrac{3}{2}\right| < 1, \\ x \ne \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - 1 < 1, \\ x \neq 1, \\ -1 < x - \dfrac{3}{2} < 1, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

О т в е т: $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Пример 5. Найти все решения неравенства

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2} - x\right)^2 > 2\log_{x-9}(x - 9).$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2} - x\right)^2 > 2\log_{x-9}(x - 9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 9 > 0, \\ x - 9 \neq 1, \\ 2\log_{10-x}\left|\dfrac{19}{2} - x\right| > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9, \\ x \neq 10, \\ \log_{10-x}\left|\dfrac{19}{2} - x\right| > 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Так как при указанных значениях переменной x основание логарифма не может быть больше единицы, полученную систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x > 9, \\ x \neq 10, \\ \log_{10-x}\left|\dfrac{19}{2} - x\right| > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x < 10, \\ 0 < \left|\dfrac{19}{2} - x\right| < 10 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x < 10, \\ x \neq \dfrac{19}{2}, \\ \dfrac{19}{2} - x < 10 - x, \\ \dfrac{19}{2} - x > x - 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x < 10, \\ x \neq \dfrac{19}{2}, \\ x < \dfrac{39}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(9, \frac{19}{2}\right) \cup \left(\frac{19}{2}, \frac{39}{4}\right).$$

Ответ: $x \in \left(9, \dfrac{19}{2}\right) \cup \left(\dfrac{19}{2}, \dfrac{39}{4}\right)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{3-x}(x^2 - 10x + 25) - 2\log_{3-x}(4x - x^2 + 5) + 2 \le 0.$$

Решение. Найдем область определения неравенства, для чего решим следующую систему:

$$\begin{cases} 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1, \\ x^2 - 10x + 25 > 0, \\ 4x - x^2 + 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ (x-5)^2 > 0, \\ (x+1)(5-x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ x \neq 5, \\ -1 < x < 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 3).$$

На области определения преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{3-x}(x^2 - 10x + 25) - 2\log_{3-x}(4x - x^2 + 5) + 2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(x - 5)^2 - 2\log_{3-x}((x + 1)(5 - x)) + 2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3-x}|x - 5| + 2 \le 2\log_{3-x}((x + 1)(5 - x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(5 - x) + 1 \le \log_{3-x}(x + 1) + \log_{3-x}(5 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(x+1) \ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - x < 1, \\ x + 1 \le 3 - x, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x > 1, \\ x + 1 \ge 3 - x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ x \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x \ge 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [1, 2).$$

Все полученные значения x содержатся в области определения неравенства.

Ответ: $x \in [1, 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $\log_{-2-x}(-3-2x) \geq \log_{-2-x}\left(-\dfrac{3x}{2}\right)$.

2. Решить неравенство $\log_x \dfrac{10x+2}{25(1-x)} > 0$.

3. Решить неравенство $\log_x(20x + 3x^2 - x^3) \geq 3$.

4. Решить неравенство $\log_{x-1} \dfrac{x^2-x-6}{2x-8} \leq 1$.

5. Решить неравенство $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0$.

6. Решить неравенство $\log_3\sqrt{5-2x} \cdot \log_x 3 < 1$.

7. Решить неравенство $\dfrac{\log_3\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)}{\log_9 2x} \geq 1$.

8. Решить неравенство $\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geq -2$.

9. Решить неравенство $\dfrac{\log_{5x-7}(x+12)}{\log_{5x-7}x^2} < 1$.

10. Решить неравенство

$$\frac{\log_{7^{x+9}}21}{\log_{7^{x+9}}(x^2-16)} \geq \frac{\log_2(x^2+10x+21)}{\log_2(x^2-16)}.$$

11. Решить неравенство $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4 \leq 1$.

12. Решить неравенство $\log_{\frac{x-2}{2x-10}} \dfrac{x+2}{4} \leq 1$.

13. Решить неравенство $\log_{x-3}(5-x) \leq \log_{x-3}|4x-14|$.

14. Решить неравенство

$$\log_{(x+3)^2}(2x^2 + 9x + 21) \geq \log_{(x+3)^2}(x^2 - - x).$$

15. Решить неравенство $(x^2 - x + 1)^{x^2-2{,}5x+1} < 1$.

16. Решить неравенство $(6x^2 + 2x + 1)^{2x^2-x} \geq 1$.

17. Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x - \dfrac{3}{10}\right) \leq 0$.

18. Решить неравенство $(\log_{|x+2|}4) \cdot (\log_4(x^2 + x - 2)) \leq 1$.

4.5. Переход к новому основанию

Одним из важных методов при решении логарифмических уравнений и неравенств является метод перехода к новому основанию. В качестве такого основания берется, как правило, число, наиболее подходящее для дальнейших преобразований логарифмов. Формула перехода к новому основанию приведена в начале данной главы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму корней уравнения

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулой перехода к новому основанию. Имеем:

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x \cdot \log_3 2 = \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(1 + \log_3 2 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(\log_3 6 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 0, \\ \log_3 x = \log_3 6;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1, \\ x = 6.\end{array}\right.$$

Таким образом, корнями уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 6$ и сумма этих корней равна 7.

Ответ: 7.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_2(5 - x) \cdot \log_{x+1}\frac{1}{8} \geq -6.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_2(5 - x) \cdot \log_{x+1}\frac{1}{8} \geq -6 \Leftrightarrow \log_2(5 - x) \cdot \frac{\log_2\frac{1}{8}}{\log_2(x + 1)} \geq -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5 - x) \cdot \frac{-3}{\log_2(x + 1)} \geq -6 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5 - x)}{\log_2(x + 1)} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(5 - x) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+1 < 1, \\ 5-x \ge (x+1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 > 1, \\ 0 < 5-x \le (x+1)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x^2+3x-4 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x < 5, \\ x^2+3x-4 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 0, \\ -4 \le x \le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 5, \\ x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup [1, 5).$$

Ответ: $x \in (-1,\ 0) \cup [1,\ 5)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$7\log_3(x+2)^8 < 8\log_2(1-x)^7 \cdot \log_3 2.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$7\log_3(x+2)^8 < 8\log_2(1-x)^7 \cdot \log_3 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 56\log_3|x+2| < \frac{56\log_3(1-x)}{\log_3 2} \cdot \log_3 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3|x+2| < \log_3(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| > 0, \\ |x+2| < 1-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -2, \\ x+2 < 1-x, \\ x+2 > x-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -2, \\ x < -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулой перехода к новому основанию. Имеем:

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2 \Leftrightarrow \frac{\lg(x-2)^2}{\lg(2x+3)} = \frac{\lg(x-2)^2}{\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(x-2)^2\left(\frac{1}{\lg(2x+3)} - \frac{1}{\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(x-2)^2\left(\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right) - \lg(2x+3)\right)}{\lg(2x+3)\cdot\lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg(x-2)^2 = 0, \\ \lg\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right) = \lg(2x+3), \end{array}\right. \\ 2x+3 > 0, \neq 1, \\ \frac{x}{6}+\frac{1}{2} > 0, \neq 1, \\ x-2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3, \\ x = -\frac{15}{11}, \end{array}\right. \\ 2x+3 > 0, \neq 1, \\ \frac{x}{6}+\frac{1}{2} > 0, \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{или} \quad x = -\frac{15}{11}.$$

Ответ: $x = 1$, $x = -\frac{15}{11}$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{4}{x}}2 \geq \log_2\frac{x}{8} - 1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{\frac{4}{x}}2 \geq \log_2\frac{x}{8} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2\frac{4}{x}} \geq \log_2\frac{x}{8} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2-\log_2 x} \geq \log_2 x - 4.$$

Пусть $\log_2 x = y$. Имеем:

$$\frac{1}{2-y} \geq y-4 \Leftrightarrow \frac{1}{2-y} - y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-(2-y)(y-4)}{2-y} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-6y+9}{2-y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-3)^2}{2-y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 2, \\ y = 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 2, \\ \log_2 x = 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 4, \\ x = 8; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0,4) \cup \{8\}.$$

Ответ: $x \in (0,4) \cup \{8\}$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x^2}{\log_2 4x^2} \cdot \frac{\log_2 x^4}{\log_2 8x^4} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_2|x|}{2+2\log_2|x|} \cdot \frac{4\log_2|x|}{3+4\log_2|x|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4\log_2^2|x|}{(1+\log_2|x|)(3+4\log_2|x|)} \leq 1.$$

Пусть $\log_2|x| = y$. Имеем:

$$\frac{4y^2}{(1+y)(3+4y)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4y^2-(1+y)(3+4y)}{(1+y)(3+4y)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7y+3}{(1+y)(3+4y)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} -1 < y < -\frac{3}{4}, \\ y \geq -\frac{3}{7}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < \log_2|x| < -\frac{3}{4}, \\ \log_2|x| \geq -\frac{3}{7}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < |x| < 2^{-\frac{3}{4}}, \\ |x| \geq 2^{-\frac{3}{7}}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -2^{-\frac{3}{7}}\right] \cup \left(-2^{-\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2^{-\frac{3}{4}}\right) \cup \left[2^{-\frac{3}{7}}, +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty, -2^{-\frac{3}{7}}\right] \cup \left(-2^{-\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2^{-\frac{3}{4}}\right) \cup \left[2^{-\frac{3}{7}}, +\infty\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\log_2(x + 4) = \log_{4x+16}8$.
2. Найти сумму корней уравнения $\log_7 x = 5 - \log_{3x}49$.
3. Решить уравнение $\log_x 2 \cdot \log_{2x}2 = \log_{4x}2$.
4. Решить уравнение

$$\log_{x+6}(x^3 + 10x^2 + 15x) \cdot \log_2(x + 6) = \log_2(3x^2 + 5x).$$

5. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{4}{x}}\frac{1}{2} - \log_2(2x)\cdot\log_{\frac{8}{x}}\frac{1}{2}}.$$

6. Решить неравенство $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}(4^{x+1} - 2^{x+3} + 4)}{\log_{2^x-1}2} < 80.$
7. Решить неравенство $\log_{0,25}(19 - 9x)\cdot\log_{3-x}0,5 \ge 1.$
8. Решить неравенство $\dfrac{\log_x 2x^{-1}\cdot\log_x 2x^2}{\log_{2x}x\cdot\log_{2x^{-2}}x} < 40.$
9. Решить неравенство

$$x \ge \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \times 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

10. Решить неравенство $\log_{\frac{3}{4}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x-1}{4x}\right) \ge 2$.
11. Решить неравенство $\dfrac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \le \log_4 9$.

§ 5. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА СМЕШАННОГО ТИПА

В данной главе мы рассмотрим, как решаются уравнения и неравенства смешанного типа, то есть содержащие, например, модуль и логарифм или показательную функцию и знак радикала. При решении такой задачи необходимо определиться с первоначальным действием, то есть сначала раскрываем модуль, избавляемся от логарифма и т.д. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 \ge 0, \\ 4\sqrt{x+1} = (2x-1)+3, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ 4\sqrt{x+1} = (1-2x)+3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ 2\sqrt{x+1} = x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ 2\sqrt{x+1} = 2-x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x+1 \ge 0, \\ 4(x+1) = (x+1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ 2-x \ge 0, \\ 4(x+1) = (2-x)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x \ge -1, \\ x^2-2x-3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ x \le 2, \\ x^2-8x = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 3$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{2 \cdot 3^{2x+1} - \frac{5}{2} \cdot 3^x} > 3^{x+1} - 1.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\sqrt{6y^2 - \frac{5y}{2}} > 3y - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y-1 < 0, \\ 6y^2 - \dfrac{5y}{2} \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3y-1 \ge 0, \\ 6y^2 - \dfrac{5y}{2} > (3y-1)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \dfrac{1}{3}, \\ y\left(y - \dfrac{5}{12}\right) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{3}, \\ 6y^2 - 7y + 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \dfrac{1}{3}, \\ y \in (-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{5}{12}, +\infty\right), \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{2} < y < \dfrac{2}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \leq 0, \\ \dfrac{1}{2} < y < \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \overset{(\text{т.к. } y>0)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{2} < y < \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < 3^x < \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\log_3 \frac{1}{2}, \log_3 \frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $x \in \left(\log_3 \dfrac{1}{2}, \log_3 \dfrac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Решить уравнение

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x-1} + \left|3^x - \frac{1}{4}\right| = \frac{13}{12}.$$

Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда данное уравнение примет следующий вид:

$$y^2 - \frac{2y}{3} + \left|y - \frac{1}{4}\right| = \frac{13}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |12y - 3| = 13 + 8y - 12y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \dfrac{1}{4}, \\ 3 - 12y = 13 + 8y - 12y^2, \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{4}, \\ 12y - 3 = 13 + 8y - 12y^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \dfrac{1}{4}, \\ 6y^2 - 10y - 5 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{4}, \\ 3y^2 + y - 4 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{5 \pm \sqrt{55}}{6}, \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge \dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -\dfrac{4}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{5 - \sqrt{55}}{6}, \\ y = 1; \end{array}\right. \overset{(\text{т.к.} y>0)}{\Leftrightarrow} y = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10).$$

Решение. Пусть $y = \log_5(x^2 - 2x + 2)$, тогда:

$$\sqrt{1 - y} < 1 + y \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y \ge 0, \\ 1 + y \ge 0, \\ 1 - y < (1 + y)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 1, \\ y \ge -1, \\ y^2 + 3y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 1, \\ y \ge -1, \\ y \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow y \in (0, 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \le 1 \Leftrightarrow 1 < x^2 - 2x + 2 \le 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1, \\ -1 \le x \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 1) \cup (1, 3].$$

Ответ: $x \in [-1, 1) \cup (1, 3]$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\cdot\log_4 x=-1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\log_2\sqrt{2x}}{\log_2 x}}\cdot\frac{\log_2 x}{2}=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1+\log_2 x}{2\log_2 x}}\cdot\frac{\log_2 x}{2}=-1.$$

Пусть $\log_2 x=y$. Имеем:

$$\sqrt{\frac{1+y}{2y}}\cdot\frac{y}{2}=-1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1+y}{2y}}=-\frac{2}{y}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2}{y}\ge 0,\\ \dfrac{1+y}{2y}=\dfrac{4}{y^2};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y<0,\\ y^2+y-8=0;\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{-1-\sqrt{33}}{2}\Leftrightarrow x=2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}.$$

Ответ: $x=2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{8\cdot 16^x-\frac{1}{2}\cdot 9^x}\le 3\cdot 4^x-3^x.$$

Решение. Разделим обе части неравенства на 3^x, что возможно, так как это выражение положительно при всех значениях переменной x. Имеем:

$$\sqrt{8\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^x-\frac{1}{2}}\le 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x-1.$$

Пусть $y=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$, $y>0$. Тогда полученное неравенство примет следующий вид:

$$\sqrt{8y^2-\frac{1}{2}}\le 3y-1\Leftrightarrow\begin{cases}8y^2-\dfrac{1}{2}\ge 0,\\ 3y-1\ge 0,\\ 8y^2-\dfrac{1}{2}\le(3y-1)^2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \ge \dfrac{1}{16}, \\ y \ge \dfrac{1}{3}, \\ 2y^2 - 12y + 3 \ge 0; \end{cases} \overset{(\text{т.к.}\, y>0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y \ge \dfrac{1}{4}, \\ y \ge \dfrac{1}{3}, \\ y \in \left(0; 3 - \dfrac{\sqrt{30}}{2}\right] \cup \left[3 + \dfrac{\sqrt{30}}{2}, +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \in \left[3 + \frac{\sqrt{30}}{2}, +\infty\right) \Leftrightarrow x \in \left[\log_{\frac{4}{3}}\left(3 + \frac{\sqrt{30}}{2}\right), +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left[\log_{\frac{4}{3}}\left(3 + \dfrac{\sqrt{30}}{2}\right), +\infty\right)$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{21 - 2^x - 2^{6-x} - |3 - 2^x|}{5 - |3 - 2^x|} \ge 1.$$

Решение. Пусть $y = 2^x$, $y > 0$. Тогда данное неравенств примет следующий вид:

$$\frac{21 - y - \dfrac{64}{y} - |3 - y|}{5 - |3 - y|} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{16 - y - \dfrac{64}{y}}{5 - |3 - y|} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16y - y^2 - 64}{5 - |3 - y|} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(y - 8)^2}{5 - |3 - y|} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 8, \\ 5 - |3 - y| \ne 0, \end{cases} \\ 5 - |3 - y| < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow 5 - |3 - y| < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3 - y| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - y > 5, \\ 3 - y < -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < -2, \\ y > 8; \end{array}\right. \overset{(т.к.\, y>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow y > 8 \Leftrightarrow 2^x > 8 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty).$$

Ответ: $x \in (3, +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3} - x + 3) \ge -2 + \log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{8}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x+3} = y$, $y \ge 0$. Тогда $x = y^2 - 3$, и исходное неравенство примет следующий вид:

$$\log_{\frac{1}{4}}(y - (y^2 - 3) + 3) \ge -2 + \log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{8} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(6 + y - y^2) \ge \log_{\frac{1}{4}}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 + y - y^2 > 0, \\ 6 + y - y^2 \le 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + y - y^2 > 0, \\ y - y^2 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < y < 3, \\ y \in (-\infty; 0] \cup [1, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow y \in (-2, 0] \cup [1, 3) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{т.к. } y \ge 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 1 \le y < 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 0, \\ 1 \le \sqrt{x+3} < 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ 1 \le x + 3 < 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ -2 \le x < 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-3\} \cup [-2, 6).$$

Ответ: $x \in \{-3\} \cup [-2, 6)$.

Пример 9. Решить уравнение

$$2\sqrt{\log_4^2(x-2)} = 3 - \log_2(2x+1).$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2\sqrt{\log_4^2(x-2)} = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\log_4(x-2)\right| = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\log_2(x-2)\right| = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(x-2) \ge 0, \\ \log_2(x-2) = 3 - \log_2(2x+1), \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(x-2) < 0, \\ -\log_2(x-2) = 3 - \log_2(2x+1). \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением неравенства $\log_2(x-2) \geq 0$ является $x \geq 3$. Ясно, что все эти значения x входят в область определения исходного уравнения. Решим уравнение первой системы. Имеем:

$$\log_2(x-2) = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2) + \log_2(2x+1) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)(2x+1) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x+1) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Корень этого уравнения, удовлетворяющий неравенству $x \geq 3$, есть $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{4}$. Решением неравенства $\log_2(x-2) < 0$ является промежуток $x \in (2, 3]$, который также содержится целиком в области определения исходного уравнения. Решим уравнение второй системы. Имеем:

$$-\log_2(x-2) = 3 - \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) = 3 + \log_2(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) = \log_2 8(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 8(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{17}{6},$$

что входит в промежуток $x \in (2, 3]$. Таким образом, решением исходного уравнения являются $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{4}$ и $x = \dfrac{17}{6}$.

Ответ: $x = \dfrac{3+\sqrt{89}}{4}$, $x = \dfrac{17}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{9^x + 12^x - 2^{4x+1}} > \sqrt{3 \cdot 4^{2x+1} + 12^x - 9^x}.$$

3. Решить уравнение $4 + \sqrt{x+9} = |x+5|$.

4. Решить неравенство $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \geq 7 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$.

5. Решить уравнение $2^{2x+1} - 15 \cdot 2^x + 10 = 6|2^{x-1} - 1|$.

6. Решить неравенство $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

7. Решить уравнение $\log_3(\sqrt{12+x} - 2) = \dfrac{1}{2}\log_3(x+2)$.

8. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2).$$

9. Решить уравнение $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$.

10. Решить неравенство $\sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{5}{x+2}\right)$.

11. Решить неравенство $\sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4$.

12. Решить уравнение

$$|3\log_x x^4 + 7\log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49.$$

13. Решить неравенство $(\log_2 x)\sqrt{\log_x\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)} \leq 1$.

14. Решить уравнение

$$|1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6)| = 1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6).$$

15. Решить неравенство $\log_{2x-3}\left(\sqrt{x+2} + x - 3\right) \leq 1$.

16. Решить уравнение

$$\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\dfrac{x}{3x-2}\right)}.$$

17. Решить неравенство $2 < \left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4\right| \leq 3$.

§ 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Логарифмический метод интервалов применяется для решения неравенств, в которых мы можем заменить выражение, содержащее логарифмы, на более простое выражение, имеющее при всех допустимых x тот же знак, что и исходное. Метод состоит в следующем. Сначала мы находим область определения неравенства. Затем на этой области определения заменяем выражение $\log_a f(x)$ на выражение $(f(x) - 1)$ (при $a > 1$), выражение $\log_{f(x)} g(x)$ можно заменить на выражение $(f(x) - 1)(g(x) - 1)$, а разность логарифмов $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ на разность $f(x) - g(x)$ (при $a > 1$). Разность логарифмов $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ можно заменить на выражение $(h(x) - 1)(f(x) - g(x))$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_5(x^2 - 5x + 6)} < \log_{20}5.$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых число, стоящее под знаком логарифма, положительно. Имеем:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ 2) \cup (3,\ +\infty).$$

На этом множестве преобразуем данное неравенство следующим образом:

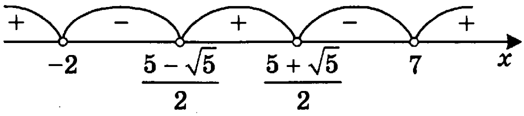
$$\frac{1}{\log_5(x^2 - 5x + 6)} < \log_{20}5 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5(x^2 - 5x + 6)} < \frac{1}{\log_5 20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 20} - \frac{1}{\log_5(x^2 - 5x + 6)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(x^2 - 5x + 6) - \log_5 20}{\log_5 20 \cdot \log_5(x^2 - 5x + 6)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6 - 20}{x^2 - 5x + 6 - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 5x + 5} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-7)}{\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (7, +\infty).$$

С учетом области определения получаем окончательный ответ:

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (7, +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (7, +\infty).$

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{2x+3}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых основания логарифмов, а также числа, стоящие под знаком логарифмов, положительны. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ 2x+3 > 0, \\ x+\dfrac{1}{3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \\ x > -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

Заметим также, что $x = \frac{2}{3}$ является решением задачи. На множестве $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{x^2}\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{2x+3}\left(x+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}}x^2} \le \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \Leftrightarrow$$

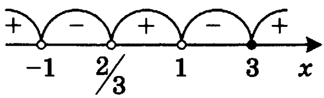
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} - \frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}}x^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+\frac{1}{3}}x^2 - \log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)}{\log_{x+\frac{1}{3}}x^2 \cdot \log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{3}-1\right)(x^2-2x-3)}{\left(x+\frac{1}{3}-1\right)^2(x^2-1)(2x+3-1)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{(3x-2)(x^2-1)(x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{(3x-2)(x-1)(x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty).$$

Учитывая область определения, а также добавляя точку $x = \frac{2}{3}$, получаем окончательный ответ: $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{2-5x}3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \le \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых основания логарифмов, а также числа, стоящие под знаком логарифмов, положительны. Имеем:

$$\begin{cases} 2-5x>0, \\ 6x^2-6x+1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{2}{5}, \\ x\in\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6},+\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right).$$

На этом множестве преобразуем данное неравенство сле-
ощим образом:

$$\log_{2-5x}3+\frac{1}{\log_2(2-5x)}\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x}3+\log_{2-5x}2\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x}6\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

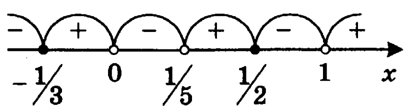
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6(2-5x)}\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6(2-5x)}-\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_6(6x^2-6x+1)-\log_6(2-5x)}{\log_6(2-5x)\cdot\log_6(6x^2-6x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2-6x+1-(2-5x)}{(2-5x-1)(6x^2-6x+1-1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2-x-1}{(1-5x)(6x^2-6x)}\le 0\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{(3x+1)(2x-1)}{x(5x-1)(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty).$$

С учетом области определения получаем окончательный ответ: $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \le \log_{1-x}(1-2x).$$

Решение. Найдем те значения переменной x, при которых основания логарифмов, а также числа, стоящие под знаком логарифмов, положительны. Имеем:

$$\begin{cases} 5-4x-x^2 > 0, \\ 5-9x-2x^2 > 0, \\ 1-x > 0, \\ 1-2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 1, \\ -5 < x < \frac{1}{2}, \\ x < 1, x < \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-5, \frac{1}{2}\right).$$

На полученном интервале преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(5+x)(1-x)}((5+x)(1-2x)) \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{1-x}((5+x)(1-2x))}{\log_{1-x}((5+x)(1-x))} \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

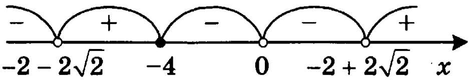
$$\Leftrightarrow \frac{\log_{1-x}(5+x)+\log_{1-x}(1-2x)}{\log_{1-x}(5+x)+1} \le \log_{1-x}(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\log_{1-x}(1-2x))\log_{1-x}(5+x)}{\log_{1-x}(5+x)+1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_{1-x}(1-x)-\log_{1-x}(1-2x))\log_{1-x}(5+x)}{\log_{1-x}((5+x)(1-x))} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x-1)^2(1-x-(1-2x))(5+x-1)}{(1-x-1)((5+x)(1-x)-1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x+4)}{x^2+4x-4} \le 0, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x+4)}{(x+2-2\sqrt{2})(x+2+2\sqrt{2})} \le 0, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2-2\sqrt{2}) \cup [-4, 0) \cup (0, -2+2\sqrt{2}).$$

С учетом области определения получаем окончательный ответ:

$$x \in (-5, -2-2\sqrt{2}) \cup [-4, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in (-5, -2-2\sqrt{2}) \cup [-4, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \le \dfrac{\log_2 31 + 2x}{\log_2 x}$.

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \ge 0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}.$$

4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \dfrac{1}{2}$.

§ 7. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Одним из основных методов решения систем алгебраических уравнений является *метод подстановки*. Он заключается в том, что из одного уравнения мы можем выразить какую-либо переменную и подставить в другое уравнение. При решении системы уравнения можно умножать на отличное от нуля число, а также складывать друг с другом. Для того чтобы решить систему неравенств, необходимо решить каждое неравенство по отдельности, а затем сравнить полученные результаты. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 1{\cdot}2y + 1 = 0, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения, выразив x через y, получаем $x = y - 1$; подставим это значение в первое уравнение. Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x = y - 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y-1)^2 - y(y-1) + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0, \\ x = y - 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 11y + 5 = 0, \\ x = y - 1. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, найдем $y_1 = 5$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения y во второе уравнения, найдем $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{(4, 5); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{cases}$$

Решение. Умножив первое уравнение системы на 5, а второе на 7 и сложив полученные уравнения, получим следующее уравнение: $5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$. Тогда исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)(5x - 4y) = 0, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 - 2xy = -15, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ y^2 - 2xy = -15; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{4y}{5}, \\ y^2 = 25; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(x, y)\} = \{(3\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-3\sqrt{3}, -\sqrt{3}); (4, 5); (-4, -5)\}.$$

О т в е т: $\{(4,5); (-4,-5); (3\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-3\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на $\frac{5}{2}$, оставив без изменения первое уравнение. Имеем:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1,5 \\ x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2,5y^2 + 2,5x - 5y = 2,5; \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1, \\ 0,5x + y = 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1, \\ x = 3 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2(3-2y)^2 + y^2 + (3-2y) - 2y = 1, \\ x = 3 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 28y + 20 = 0, \\ x = 3 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = \dfrac{10}{9}, \end{array} \right. \\ x = 3 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -1,\ y = 2 \quad \text{или} \quad x = \frac{7}{9},\ y = \frac{10}{9}.$$

Ответ: $\left\{(-1, 2); \left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{10}{9}\right)\right\}$.

Пример 4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из второго уравнения системы, умноженного на 2, первое уравнение, оставив без изменения первое уравнение. Имеем:

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ 2xy + 6y^2 - 4x - 28y + 32 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ 5y^2 - 25y + 30 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ y^2 - 5y + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = 3; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\{(-1, 3); (t, 2)\}$, $t \in R$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения выразим x через y и подставим в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|5-2y|+2|y-2|=20, \\ x=4-2y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение, раскрывая модуль по определению. Это уравнение равносильно следующей совокупности:

$$3|5-2y|+2|y-2|=20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2, \\ 3(5-2y)+2(2-y)=20, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le \dfrac{5}{2}, \\ 3(5-2y)+2(y-2)=20, \end{cases} \\ \begin{cases} y > \dfrac{5}{2}, \\ 3(2y-5)+2(y-2)=20; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2, \\ y=-\dfrac{1}{8}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le \dfrac{5}{2}, \\ y=-\dfrac{9}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} y > \dfrac{5}{2}, \\ y=\dfrac{39}{8}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{8} \quad \text{или} \quad y=\frac{39}{8}.$$

Если $y=-\dfrac{1}{8}$, то $x=\dfrac{17}{4}$, если $y=\dfrac{39}{8}$, то $x=-\dfrac{23}{4}$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{17}{4},-\dfrac{1}{8}\right);\left(-\dfrac{23}{4},\dfrac{39}{8}\right)\right\}$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3\sqrt{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy. \end{cases}$$

Решение. Данная система равносильна следующей совокупности:

$$\begin{cases} x^3\sqrt{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ x-y\geq 0, \\ 2y^2+y=21, \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ 2y^2+y=21+2y^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ x\geq y, \\ \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=-\dfrac{7}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ y=21; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=-\dfrac{7}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=21, \\ y=21. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(0,-\dfrac{7}{2}\right);(21,21)\right\}$.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} 4^x+5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=2, \\ 2\cdot 9^y+2^x+2\cdot 3^y=1. \end{cases}$$

Решение. Пусть $u = 2^x$, $v = 3^y$; u, $v > 0$. Тогда данная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} u^2+5u-2v=2, \\ 2v^2+2v+u=1. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение системы на 2 и вычтя первое уравнение, получим:

$$4v^2 + 4v + 2u - u^2 - 5u + 2v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4v^2 - u + 6v - 3u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2v - u)(2v + u) + 3(2v - u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2v - u)(2v + u + 3) = 0 \overset{(\text{т.к. } u,v>0)}{\Leftrightarrow} 2v - u = 0 \Leftrightarrow u = 2v.$$

Подставив вместо u в первое уравнение $2v$, получим:

$$(2v)^2+10v-2v=2 \Leftrightarrow 2v^2+4v-1=0 \overset{(\text{т.к. } v>0)}{\Leftrightarrow} v=\frac{\sqrt{6}-2}{2};$$

$$\Rightarrow u=\sqrt{6}-2\text{, откуда } x=\log_2(\sqrt{6}-2), y=\log_3\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right).$$

Ответ: $\left\{\left(\log_2(\sqrt{6}-2), \log_3\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)\right)\right\}$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2+2y^2=3. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\log_y x = t$. Тогда первое уравнение системы примет следующий вид:

$$t-\frac{2}{t}=1 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_y x=2, \\ \log_y x=-1. \end{array}\right.$$

Если $\log_y x = 2$, т.е. $x=y^2$, то второе уравнение системы запишется следующим образом:

$$y^4+2y^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=1, \\ y^2=-3; \end{array}\right. \Leftrightarrow y=\pm 1,$$

что не входит в область определения системы. Если $\log_y x = -1$, т.е. $x=\frac{1}{y}$, имеем:

$$\frac{1}{y^2}+2y^2=3 \Leftrightarrow 2y^4-3y^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=1, \\ y^2=\frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm 1, \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Из полученных значений только $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ входит в область определения системы. Этому значению y соответствует значение $x=\sqrt{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Пример 9. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x \le 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы. Пусть $2^x = y$. Имеем:

$$y^2 \le 9y + 22 \Leftrightarrow (y - 11)(y + 2) \le 0 \Leftrightarrow y \le 11,$$

так как $y > 0$, откуда $x \le \log_2 11$. Перейдем к решению второго неравенства. Найдем его область определения:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

На области определения преобразуем неравенство следующим образом:

$$\log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x - 2) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left((x^2 - x - 2) \cdot \frac{x-2}{x+1}\right) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-2)^2 \le 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 3,$$

откуда $x \in [2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$. Чтобы найти решение системы, необходимо сравнить числа $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$. Сравним каждое из этих чисел с числом 3,5. Очевидно, что $2 + \sqrt{3} > 3{,}5$. Проведем второе сравнение. Имеем:

$$\log_2 11 \vee \frac{7}{2} \Leftrightarrow \log_2 11 \vee \log_2 2^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow 11 \vee 2^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11^2 \vee 2^7 \Leftrightarrow 121 \vee 128.$$

Так как $121 < 128$, то $\log_2 11 < \dfrac{7}{2}$, откуда следует, что $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$. Таким образом, с учетом области определения решением системы будет служить промежуток $x \in (2, \log_2 11]$.

Ответ: $x \in (2, \log_2 11]$.

Пример 10. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\le 0, \\ 64^{x^2-3x+20} - 0{,}125^{2x^2-6x-200} \le 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство методом интервалов. Найдем его область определения:

$$\begin{cases} 11-x>0, \\ 11-x\ne 1, \\ x+7>0, \\ x+5>0, \\ x+5\ne 1, \\ 9-x>0; \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-5,-4)\cup(-4,9).$$

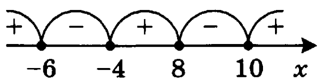
На области определения преобразуем неравенство следующим образом:

$$\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (11-x-1)(x+7-1)(x+5-1)(9-x-1)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (10-x)(x+6)(x+4)(8-x)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[-6,-4]\cup[8,10].$$



Перейдем к решению второго неравенства. Имеем:

$$64^{x^2-3x+20} - 0{,}125^{2x^2-6x-200}\le 0 \Leftrightarrow 8^{2x^2-6x+40}\le 8^{-2x^2+6x+200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x+40\le -2x^2+6x+200 \Leftrightarrow x^2-3x-40\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[-5,8].$$

Таким образом, с учетом области определения решением системы будут служить $x\in(-5,-4)\cup\{8\}$.

Ответ: $x\in(-5,-4)\cup\{8\}$.

Пример 11. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{320 - 4^{-x}}{64 - 2^{-x}} \ge 5, \\ \log_{0,25x^2} \dfrac{x+6}{4} \le 1. \end{cases}$$

Решение. Решим сначала первое неравенство системы. Пусть $2^{-x} = y$, $y > 0$. Имеем:

$$\frac{320 - y^2}{64 - y} \ge 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{320 - y^2 - 5(64 - y)}{64 - y} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-5)}{y - 64} \ge 0,$$

откуда $y \in (0,\ 5] \cup (64,\ +\infty)$. Если $y \le 5$, то $2^{-x} \le 5$, то есть $-x \le \log_2 5$ и $x \ge -\log_2 5$. Если же $y > 64$, то $2^{-x} > 64$, значит, $-x > 8$ и $x < -8$. Таким образом, решением неравенства являются $x \in (-\infty,\ -8) \cup [-\log_2 5,\ +\infty)$. Перейдем к решению второго неравенства. Имеем:

$$\log_{0,25x^2} \frac{x+6}{4} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0,25x^2 > 1, \\ 0 < \dfrac{x+6}{4} \le 0,25x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 0,25x^2 < 1, \\ \dfrac{x+6}{4} \ge 0,25x^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ x > -6, \\ x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2, 0) \cup (0, 2), \\ x \in [-2, 3]; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-6, -2) \cup [3, +\infty), \\ x \in (-2, 0) \cup (0, 2); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-6,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup [3,\ +\infty).$$

Таким образом, решением системы будут служить промежутки $x \in [-\log_2 5,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup [3,\ +\infty)$.

Ответ: $x \in [-\log_2 5,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup [3,\ +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0, \\ y^2 + x - 20 = 0. \end{cases}$

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$

11. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2 - x} + \sqrt{5 - y} = 3, \\ xy - 5x - 2y + 10 = 4. \end{cases}$

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$

13. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1, \\ x - y = 22. \end{cases}$

14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

15. Решить систему уравнений $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^{x-y} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$

16. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1-y)} = \log_x x(1-y), \\ xy = -6. \end{cases}$$

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_{x-y} \dfrac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$

19. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

20. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 11, \\ \log_{\frac{1}{3}}(3y-5) + 3\log_{27}(x+y) = 0. \end{cases}$$

21. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$

22. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \le 87, \\ \log_{3x} \dfrac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \ge 0. \end{cases}$$

23. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x - 4} \leq 3. \end{cases}$$

24. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x - 12} + \dfrac{2x^2 - 6x + 1}{x - 3} \geq 2x, \\ \log_{x+1}(2x + 7) \cdot \log_{x+1} \dfrac{2x^2 + 9x + 7}{(x+1)^4} \leq -2. \end{cases}$$

25. Решить систему неравенств $\begin{cases} 16^{x-1,25} - 3 \cdot 4^{x-1,5} + 1 \geq 0, \\ \log_2 \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \leq 1. \end{cases}$

Глава IV
ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

В треугольнике ABC через a, b и c мы будем обозначать стороны BC, CA и AB соответственно, а противолежащие этим сторонам углы — через α, β и γ. Высоту, выходящую из точки A, обозначим h_a, медиану — m_a, а биссектрису — l_a. Кроме того, через R обозначается радиус описанной около треугольника, а через r — радиус вписанной в треугольник окружности. Площадь треугольника обозначается буквой S, а полупериметр — буквой p. Приведем некоторые теоремы и формулы (будем считать, что c — гипотенуза треугольника).

Теорема 1. (Теорема Пифагора). В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема 2. В прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

$$a = c\cos\beta = c\sin\alpha = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta,$$

$$c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Теорема 3. Если в прямоугольном треугольнике через ca и cb обозначить проекции катетов на гипотенузу, то справедливы следующие соотношения:

$$h^2 = c_a \cdot c_b, \quad a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b.$$

Теорема 4. Площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c.$$

Теорема 5. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы. Отсюда следует, что медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Теорема 6. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру, т.е.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2},$$

так как

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = 2ab.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Биссектриса прямого угла треугольника равна катету. Вычислить ее длину, если длина другого катета равна a.

Решение. Пусть C — вершина прямого угла треугольника ABC, CL — биссектриса, $AC = CL$, $BC = a$. Треугольник ACL равнобедренный, поэтому $\angle CAL = \angle CLA$ (рисунок 1). Так как CL — биссектриса прямого угла C, то $\angle ACL = 45°$. Зная, что сумма углов треугольника равна 180°, находим

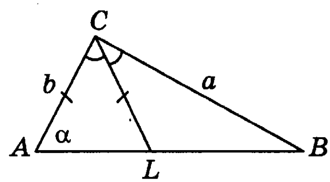


Рис. 1

$$\alpha = \angle CAL = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°.$$

Далее, согласно теореме 2, $AC = b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, поэтому

$$CL = AC = a \cdot \operatorname{ctg} 67{,}5°.$$

Ответ: $a \cdot \operatorname{ctg} 67{,}5°$.

Пример 2. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

Решение. Докажем, что данный в условии задачи треугольник — прямоугольный. Обозначим через α, β и γ углы этого треугольника (γ — наибольший угол). Имеем:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \text{ и } \alpha = \gamma - \beta,$$

откуда

$$(\gamma - \beta) + \beta + \gamma = 180° \text{ и } \gamma = 90°.$$

Пусть c — гипотенуза данного треугольника. Тогда больший его катет равен $\sqrt{c^2-1}$. Так как радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы, согласно условию задачи получаем:

$$c^2+(c^2-1)=2\pi\cdot\frac{c^2}{4}\Leftrightarrow 4c^2-2=\pi c^2\Leftrightarrow c=\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}.$$

Проверим, что сторона треугольника, которая имеет длину 1, является наименьшей. Имеем:

$$c^2=\frac{2}{4-\pi}>2\Rightarrow c^2-1>1\Rightarrow\sqrt{c^2-1}>1,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{4-\pi}}$.

Пример 3. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $BO:OE=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.

Решение. Можно считать, что $BO=\sqrt{3}$, $OE=\sqrt{2}$, угол A — меньший угол треугольника. Пусть вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M. Проведем радиусы в точки касания (рисунок 2). Так как $BLOK$ — квадрат, то

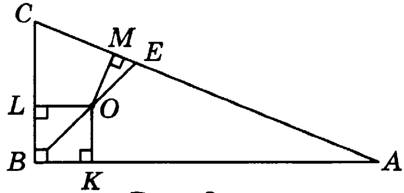


Рис. 2

$$r=OL=OK=OM=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника OME находим, что

$$\sin\angle OEM = \; = \frac{OM}{OE} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $\angle OEM = 60°$. Поскольку $\angle CBE = 45°$, то $\angle C = 180° - 60° - 45° = 75°$, а $\angle A = 15°$.

Ответ: 75° и 15°.

Пример 4. Проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника имеют длины x и y. Найти площадь треугольника.

Решение. Согласно теореме 3 имеем $h^2 = xy$, где h — высота, опущенная на гипотенузу, откуда $h = \sqrt{xy}$. Очевидно, что длина гипотенузы равна $x + y$, поэтому площадь треугольника будет равна

$$S = \frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}$.

Пример 5. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ. Известно, что $DM = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin\angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найти катеты треугольника DEF.

Решение. Пусть точка Q лежит между точками M и F (рисунок 3). Из прямоугольного треугольника DMQ находим, что

$$DQ = DM \cdot \sin\angle DMQ = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

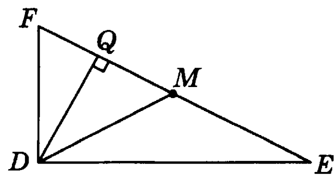


Рис. 3

Так как медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы, то $EF = \sqrt{17}$. Тогда

$$S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} EF \cdot DQ = 2.$$

Пусть $DE = x$ и $DF = y$. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

В нашем случае $DE = x = 4$ и $DF = y = 1$. Если же точка Q лежит между точками E и M, то тогда $DE = 1$ и $DF = 4$.

Ответ: $DE = 1$, $DF = 4$ или $DE = 4$, $DF = 1$.

Пример 6. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $R + r \geq \sqrt{2S}$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, S — его площадь.

Решение. Согласно теоремам 5 и 6, имеем $c = 2R$ и $r = \frac{a+b-c}{2}$, откуда $R + r = \frac{a+b}{2}$. Здесь c — гипотенуза, а a и b — катеты прямоугольного треугольника. Далее $R + r = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, так как среднее арифметическое двух положительных чисел всегда больше либо равно их среднему геометрическому. Но $\sqrt{ab} = \sqrt{2S}$, так как $S = \frac{1}{2}ab$. Следовательно, $R + r \geq \sqrt{2S}$, что и требовалось доказать.

Пример 7. В трапеции $KLMN$ с основаниями LM и KN биссектриса LA угла KLM делит отрезок MN на равные части, $MA = AN$. Известно, что средняя линия трапеции равна $\sqrt{5}$, $KA = 4$. Найти длину отрезка LA.

Решение. Пусть AB — средняя линия трапеции $KLMN$ (рисунок 4). Угол ALM равен углу LAB (как накрест лежащие), поэтому $\angle LAB = \angle ALB$ и треугольник ABL — равнобедренный. Это означает, что $LB = BK = \sqrt{5}$. Следовательно, если на отрезке KL как на диаметре построить окружность, то точка A бу-

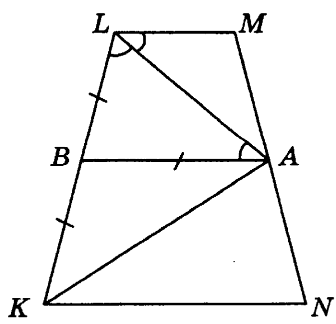


Рис. 4

дет лежать на этой окружности. Поэтому треугольник KAL прямоугольный и $LA = \sqrt{KL^2 - KA^2} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 8. Вершина M прямого угла в треугольнике LMN лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящим через конец гипотенузы LN, MH — высота треугольника LMN. На прямой LN взята точка K так, что $KH = OH$. Найти MK.

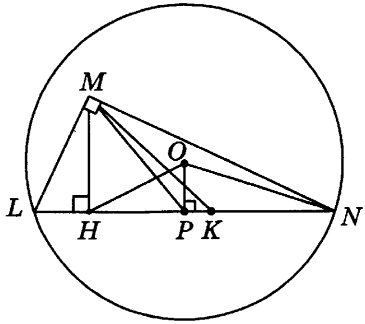


Рис. 5

Решение. Опустим перпендикуляр OP из точки O на прямую LN (рисунок 5). Тогда P — середина LN и $LP = PN = MP$. Имеем:

$$MK^2 = MH^2 + KH^2 = \text{(так как } KH = OH\text{)} = MH^2 + OH^2 =$$

$$= MH^2 + PH^2 + PO^2 = MP^2 + PO^2 =$$

$$= \text{(так как } MP = PN\text{)} = PN^2 + PO^2 = ON^2.$$

Поскольку ON — радиус окружности, то $MK = ON = 8$.

Ответ: 8.

Задачи для самостоятельного решения

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $AB = 13$, $BD = 12$. Найти площадь треугольника ABC.

2. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу на отрезки 5 и 12. Найти площадь треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна $30°$, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

4. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет $75°$. Найти площадь треугольника ABC.

5. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Найти длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH. Найти $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$ и точка H находится между точками A и M.

7. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на 0,5. Кроме того, известно, что $AD = \sqrt{10}$. Найти длину гипотенузы AB.

8. Найти острые углы в прямоугольном треугольнике, в котором отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, равно $4/\sqrt{3}$.

9. Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

10. Какие из значений: 2, 12/5, 5/2 может принимать в прямоугольном треугольнике отношение радиуса его описанной окружности к радиусу его вписанной окружности?

11. Центр описанной около треугольника окружности лежит на одной из сторон этого треугольника, а длины сторон этого треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти тангенс наименьшего угла этого треугольника.

12. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ, ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом параграфе сформулируем две теоремы, которые наиболее часто применяются при решении треугольников. Все обозначения стандартные, приведены в начале предыдущего параграфа.

Теорема 1. (Теорема косинусов.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Теорема 2. (Теорема синусов.) В произвольном треугольнике справедливы соотношения

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема 3. Площадь произвольного треугольника можно вычислить по одной из следующих формул:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Последняя формула называется формулой Герона.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен $120°$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

Решение. Пусть биссектриса AK пересекает медиану BM в точке O. В треугольнике ABM отрезок AO является и биссектрисой, и высотой, поэтому треугольник ABM — равнобедренный: $AB = AM = MC$ (рисунок 6). Можно считать, что $AB = 1$, $AC = 2$, $BC = x$. Применим к треугольнику ABC теорему косинусов. Имеем:

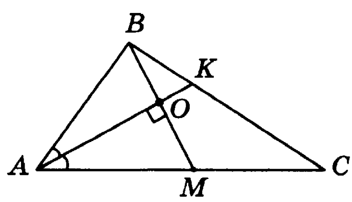


Рис. 6

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + x^2 - 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

Тогда площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{8},$$

радиус описанной около этого треугольника окружности равен

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

площадь кругая равна

$$S_1 = \pi R^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{S}{S_1} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

Пример 2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B, равным 30°, и катетом $CA = 1$ проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. В нем $AB = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2AC = 2$, значит, $BD = CD = 1$ (рисунок 7). Кроме того, $\angle BFD = 180° - 30° - 15° = 135°$. Применим теперь к треугольнику BDF теорему синусов. Имеем:

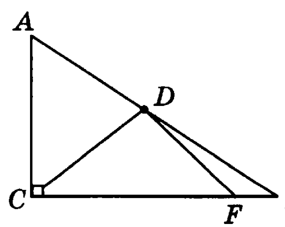


Рис. 7

$$\frac{BD}{\sin\angle BFD} = \frac{DF}{\sin\angle DBF} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 135°} = \frac{DF}{\sin 30°} \Leftrightarrow DF = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, так как треугольник CDB равнобедренный, получаем, что:

$$\angle DCB = \angle DBC = 30^\circ \Rightarrow \angle CDB = 120^\circ \Rightarrow \angle CDF = 105^\circ.$$

Значит,

$$S_{\Delta CDF} = \frac{1}{2} CD \cdot DF \cdot \sin\angle CDF = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sin 105^\circ.$$

Найдем значение $\sin 105^\circ$:

$$\sin 105^\circ = \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, площадь треугольника CDF равна

$$S = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$.

Пример 3. В треугольник ABC с длиной стороны BC, равной 9, вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что $AD = DC$ и косинус угла BCA равен $2/3$. Найти длину стороны AC.

Решение. Пусть K и M — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB соответственно. Пусть $KC = x$, тогда $AD = CD = x$, $BD = BM = 9 - x$ (так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны). Пусть $AM = y$, тогда и $AK = y$ (рисунок 8). Применив теорему косинусов к треугольнику ADC, получим:

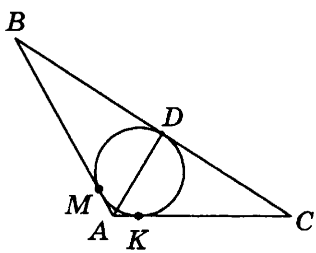


Рис. 8

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos\angle ACD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x+y)^2 + x^2 - 2(x+y)x \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x + y - \frac{4}{3}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3y.$$

Применим теперь теорему косинусов к треугольнику ABC. Имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (9-3y+y)^2 = (4y)^2 + 9^2 - 2\cdot 4y \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81-36y+4y^2 = 16y^2+81-48y \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=3.$$

Следовательно, $AC = x + y = 4$.

Ответ: 4.

Пример 4. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC.

Решение. Пусть O_1, O_2 — центры и r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC соответственно. Пусть K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB и AC. Точки O_1 и O_2 лежат соответственно на отрезках DK и DL, так как треугольники ABD и ADC — равнобедренные (рисунок 9). Кроме того,

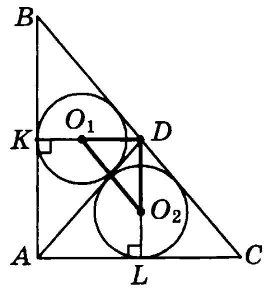


Рис. 9

$$\angle O_1DO_2 = \frac{1}{2}\angle ADB + \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{\pi}{2}.$$

Так как медиана делит треугольник на два равных по площади треугольника, то

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = 3.$$

Справедливы равенства

$$AD = BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{AB^2+AC^2}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Вычислим радиусы r_1, r_2:

$$r_1 = \frac{2S_{\Delta ABD}}{AB+BD+AD} = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{2S_{\Delta ADC}}{AD+DC+AC} = \frac{3}{4}.$$

Так как DK и DL — средние линии треугольника ABC, то $DK = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$, $DL = \frac{AB}{2} = 2$.

Далее $DO_1 = DK - r_1 = \frac{5}{6}$, $DO_2 = DL - r_2 = \frac{5}{4}$. Наконец, применив к треугольнику O_1DO_2 теорему Пифагора, получим:

$$O_1O_2 = \sqrt{DO_1^2 + DO_2^2} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{25}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{12}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

Пример 5. В равнобедренном треугольнике медиана к боковой стороне имеет длину l и образует с основанием угол β. Найти площадь треугольника.

Решение. Обозначим вершины данного треугольника через A, B и C так, что $AB = BC$ (рисунок 10). Обозначим через AM медиану, проведенную к стороне BC, и опустим из точек B и M на прямую AC перпендикуляры BL и MK. Ясно, что L — середина AC, а K — середина LC. Поэтому $AK = \frac{3}{4}AC = l\cos\beta$, откуда $AC = \frac{4l\cos\beta}{3}$. Из прямоугольного треугольника AMK найдем, что $MK = l\sin\beta$, следовательно, $BL = 2l\sin\beta$. Значит, искомая площадь равна

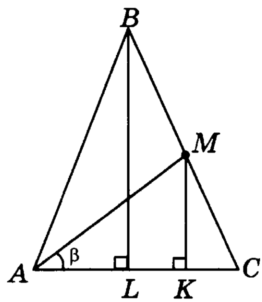


Рис. 10

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot \frac{4l\cos\beta}{3} \cdot 2l\sin\beta = \frac{2l^2\sin 2\beta}{3}.$$

Ответ: $\frac{2l^2\sin 2\beta}{3}$.

Пример 6. Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что $AK = 1$, $KC = \sqrt{3}$, а величины углов AKC, ABK и KBC равны 120°, 15° и 15° соответственно. Найти длину отрезка BK.

Решение. Пусть $\angle BAK = \alpha$. Тогда

$$\angle AKB = 180^\circ - 15^\circ - \alpha = 165^\circ - \alpha,$$

$$\angle BKC = 360^\circ - 120^\circ - (165^\circ - \alpha) = 75^\circ + \alpha$$

и

$$\angle BCK = 180^\circ - 15^\circ - (75^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$$

(рисунок 11).

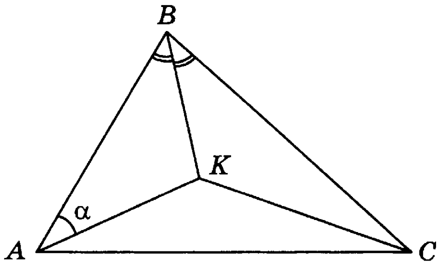


Рис. 11

Пусть $BK = x$. Применив теорему синусов к треугольникам ABK и KBC получим:

$$\begin{cases} \dfrac{AK}{\sin\angle ABK} = \dfrac{BK}{\sin\angle BAK}, \\ \dfrac{KC}{\sin\angle KBC} = \dfrac{BK}{\sin\angle BCK}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin 15^\circ} = \dfrac{x}{\sin\alpha}, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} = \dfrac{x}{\cos\alpha}; \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Имеем далее

$$x = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

поскольку

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

Пример 7. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

Решение. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием $AC = 6$, $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = 180° - 2\alpha$ (рисунок 12). Согласно условию задачи, возможны три случая.

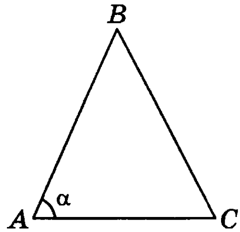


Рис. 12

1) $$\sin\alpha = \cos(180° - 2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = -\cos 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = 1 \text{ или } \sin\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Так как α — угол при основании равнобедренного треугольника, то этот случай невозможен.

2) $$\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow \angle B = 90°.$$

В этом случае радиус описанной окружности равен половине гипотенузы и равен 3.

3) $$\cos\alpha = \sin(180° - 2\alpha) \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \angle B = 120°.$$

Применив к треугольнику ABC теорему синусов, получим, что

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{6}{2\sin 120°} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: 3 или $2\sqrt{3}$.

Пример 8. В треугольнике ABC длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравнить величину угла BOC и 112,5°, если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

Решение. Обозначим углы A, B, C треугольника ABC через α, β и γ соответственно. Тогда $\angle OBC = \frac{\beta}{2}$, а $\angle OCB = \frac{\gamma}{2}$ (рисунок 13). Имеем:

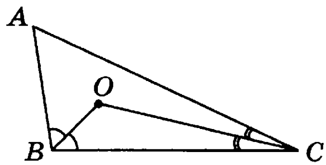


Рис. 13

$$\angle BOC = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= 180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Для нахождения угла α применим к треугольнику ABC теорему косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2+9-5}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Таким образом, $\angle BOC = 90^\circ + \dfrac{45^\circ}{2} = 112{,}5^\circ$.

Ответ: $\angle BOC = 112{,}5^\circ$.

Пример 9. Периметр треугольника ABC равен 36, а его площадь равна 60. Найти стороны AB и AC, если $BC = 10$.

Решение. Пусть $AB = x$, $AC = y$. Вычислим площадь треугольника по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)},$$

где $p = 18$ — полупериметр треугольника ABC. Имеем:

$$\begin{cases} 60 = \sqrt{18(18-x)(18-y)(18-10)}, \\ x+y+10 = 36; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (18-x)(18-y) = 25, \\ x+y = 26; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (18-x)(x-8) = 25 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 169 = 0 \Leftrightarrow x = 13.$$

Тогда $y = 26 - x = 13$.

Ответ: $AB = AC = 13$.

Пример 10. Треугольник ABC, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\dfrac{14}{\sqrt{3}}$. Найти периметр этого треугольника, если он меньше 40, а $AC = 14$.

Решение. Если треугольник ABC равносторонний или AC — средняя по длине сторона треугольника, то его периметр равен 42. Действительно, пусть $AB = 14 - x$, а $BC = 14 + x$. Тогда $AB + AC + BC = 14 - x + 14 + 14 + x = 42$. Если AC — меньшая сторона треугольника, то $AB + AC + BC > 3 \cdot 14 = 42$. Значит, AC — большая сторона треугольника ABC. Пусть $AB = 14 - x$, $BC = 14 - 2x$, $x > 0$. Применим к треугольнику ABC теорему синусов. Имеем:

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R \Leftrightarrow \frac{14}{\sin\angle B} = \frac{28}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, угол B равен $60°$ или $120°$. Если $\angle B = 60°$, то он не является большим углом в треугольнике ABC, поэтому AC не может быть большей его стороной, что противоречит условию. Следовательно, $\angle B = 120°$. Применив теперь к треугольнику ABC теорему косинусов, получим:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 196 = (14-x)^2 + (14-2x)^2 - 2(14-x)(14-2x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 56 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ или } x = 14.$$

По смыслу задачи подходит $x = 4$. Тогда $AB = 10$, $BC = 6$ и периметр треугольника ABC равен 30.

Ответ: 30.

Пример 11. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$ и медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $5\pi/12$.

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$,

тогда $\angle ADC = \frac{7\pi}{12} - \alpha$,

$\angle BDC = \alpha + \frac{5\pi}{12}$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$\angle ACB = \frac{11\pi}{12} - \alpha$ (рисунок 14).

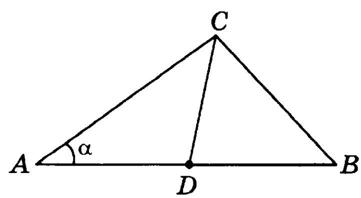


Рис. 14

Применим к треугольникам ABC и DBC теорему синусов. Имеем:

$$\frac{AB}{\sin(\frac{11\pi}{12}-\alpha)}=\frac{5}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{5}{\sin(\alpha+\frac{5\pi}{12})}.$$

Разделив первое из полученных равенств на второе, с учетом $AB = 2BD$, получим:

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin(\frac{11\pi}{12}-\alpha)}=\frac{\sin(\alpha+\frac{5\pi}{12})}{\sin\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right) \Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha=\frac{1}{2}.$$

По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\frac{7\pi}{12}-\alpha>\frac{5\pi}{12}$, то есть $\alpha<\frac{\pi}{6}$. Следовательно,

$$\alpha=\frac{\pi}{12}, \quad AB=\frac{5}{2\sin\alpha} \text{ и } S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{25}{4}.$$

Ответ: 25/4.

Пример 12. В остроугольном треугольнике BCD проведена высота CE и из точки E опущены перпендикуляры EM и EN на стороны BC и CD. Известно, что $CE = b$, $MN = a$. Найти угол BCD.

Решение. Если мы построим на отрезке CE как на диаметре окружность, то точки M и N будут лежать на этой окружности (так как углы CME и CNE — прямые). Следовательно, данная окружность будет описана около треугольника CMN (рисунок 15). Применим к этому треугольнику теорему синусов. Имеем:

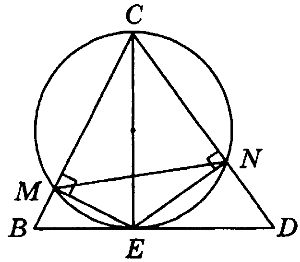


Рис. 15

$$\frac{MN}{\sin\angle MCN}=2R \Leftrightarrow \frac{MN}{\sin\angle BCD}=CE \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\angle BCD}=b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\angle BCD=\frac{a}{b}.$$

Так как треугольник BCD — остроугольный, то $\angle BCD = =\arcsin\frac{a}{b}$. Заметим, что одно из условий задачи никак не использовалось при ее решении.

Ответ: $\arcsin\frac{a}{b}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Угол CAB равен α. Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K. На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M. Найти угол AMK.

2. В треугольнике ABC задана точка M на стороне AC, соединенная с вершиной B прямолинейным отрезком MB. Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60°$, $\angle MBC = 30°$. Найти площадь треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 3, угол BAC равен $\pi/6$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3.

4. В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 6, и углом BAD, равным $\pi/3$, на стороне BC взята точка E на расстоянии 2 от точки C. Найти расстояние от точки E до центра ромба.

5. В треугольнике ABC известно, что $AB=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $BC = =\frac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причем прямые MO и AC параллельны. Отрезок BM в 1,5 раза длиннее отрезка AM. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMP, равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найти длину стороны AC.

6. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM : MC = 2 : 1$. Известно, что величина угла CAM равна α. Найти величину угла BAD.

7. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найти радиус окружности.

8. Окружность с центром в точке O, лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, касается его катетов AB и BC. Найти длину AC, если $AM = \frac{20}{9}$ и $AN : MN = 6 : 1$, где M — точка касания AB с окружностью, а N — точка пересечения окружности с AC, расположенная между точками A и O.

9. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30°. Найти площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше, чем $1/\sqrt{2}$.

10. В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен $\pi/3$. Точка N делит сторону AB в отношении $AN : NB = 2 : 1$. Определить тангенс угла DNC.

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

12. У треугольника известны длины двух сторон $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

13. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону AC.

14. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $25/12$, $BC = 4$ и $\cos\angle B = 0{,}8$. Найти AB.

15. В треугольнике BCD известны длины сторон: $BC = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках B, C и D. Найти радиус наибольшей окружности.

16. В треугольнике KLM через основание N высоты KN проведены прямые, перпендикулярные сторонам KL и KM и пересекающие их в точках A и B соответственно. Отрезок AB равен a, а радиус описанной около треугольника KLM окружности равен R. Найти площадь треугольника KLM.

17. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 и 7. Найти площадь треугольника и указать, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника.

18. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC). Найти площадь треугольника ABC, если $CE = 4$, а $CA = 3$.

19. В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен 0,25, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найти площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

20. Окружность радиуса 3 проходит через середины трех сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны $60°$ и $45°$ соответственно. Найти площадь треугольника ABC.

21. На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника, взята точка D. Известно, что расстояние от точки D до одной из вершин треугольника равно 9. Найти сумму расстояний от точки D до двух других вершин треугольника.

22. В равнобедренном треугольнике KLM углы при основании KM равны $50°$, а точка O внутри треугольника расположена так, что $\angle OKL = 20°$, а $\angle OML = 40°$. Найти величину угла KOL.

23. В треугольнике ABC угол при вершине B равен $\pi/3$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 4 и 6 соответственно. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

24. Высота треугольника имеет длину 2, делит угол треугольника в отношении 2 : 1 и делит основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1. Найти площадь этого треугольника.

25. В прямоугольном треугольнике ADC гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найти DB, если угол DBE равен 30°, а площадь треугольника DEC равна $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

§ 3. БИССЕКТРИСА И МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом параграфе сформулируем несколько теорем, касающихся биссектрис и медиан произвольного треугольника, а также формул для нахождения их длин. Все обозначения предполагаются стандартными.

Теорема 1. (Формула для вычисления длины биссектрисы.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Теорема 2. (Формула для вычисления длины биссектрисы.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$l_a^2 = bc - xy,$$

где x, y — отрезки, на которые биссектриса la делит сторону a.

Теорема 3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на отрезки, длины которых относятся как 2 : 1, считая от вершины.

Теорема 4. (Формула для вычисления длины медианы.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Теорема 5. (Теорема о биссектрисе внутреннего угла.) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Теорема 6. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в этот треугольник окружности.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

Решение. Пусть, для определенности, точка L лежит между точками A и M. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Поэтому $AM = BM = b$, откуда $AL = b - a$, $LB = b + a$ (рисунок 16). Применим к треугольнику ABC теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Имеем:

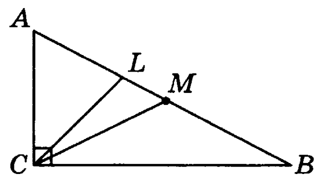


Рис. 16

$$\frac{LB}{AL} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \frac{b+a}{b-a} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow BC = AC \cdot \frac{b+a}{b-a}.$$

Применив теперь к треугольнику ABC теорему Пифагора, получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow 4b^2 = AC^2\left(1 + \frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}\right) = AC^2\left(\frac{2(b^2+a^2)}{(b-a)^2}\right),$$

откуда $AC = \dfrac{2b(b-a)}{\sqrt{2(b^2+a^2)}}$ и $BC = \dfrac{2b(b+a)}{\sqrt{2(b^2+a^2)}}$. Следовательно, искомая площадь равна

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}.$$

Ответ: $\dfrac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$.

Пример 2. В треугольнике ABC медианы AE и BD, проведенные к сторонам BC и AC, пересекаются под прямым углом. Длина стороны BC равна a. Найдите длины других сторон треугольника ABC, если $AE^2 + BD^2 = d^2$.

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Пусть $OE = x$ и $OD = y$. Так как медианы делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины, то $OA = 2x$ и $OB = 2y$ (рисунок 17). Условие $AE^2 + BD^2 = d^2$ перепишем в виде

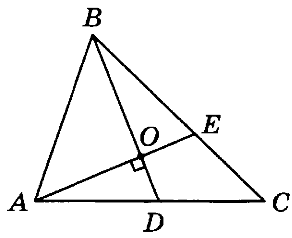


Рис. 17

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{9}. \quad (*)$$

Из прямоугольного треугольника OBE и равенства $BE = \frac{a}{2}$, применив теорему Пифагора, получим:

$$x^2 + 4y^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (**)$$

Далее, применив теорему Пифагора к треугольнику ABO, найдем, что

$$AB^2 = 4(x^2 + y^2) \overset{(*)}{=} \frac{4d^2}{9},$$

откуда $AB = \frac{2d}{3}$. Наконец, применим теорему Пифагора к треугольнику AOD. Имеем:

$$AD^2 = 4x^2 + y^2 = 5(x^2 + y^2) - (x^2 + 4y^2) \overset{(*),(**)}{=} \frac{5d^2}{9} - \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$AC^2 = 4AD^2 = \frac{20d^2 - 9a^2}{9} \text{ и } AC = \frac{1}{3}\sqrt{20d^2 - 9a^2}.$$

Ответ: $\frac{2d}{3}$, $\frac{\sqrt{20d^2 - 9a^2}}{3}$.

Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $BC = 2$, $KC = 1$, $BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Пусть $AK = x$ (рисунок 18). Применив к треугольнику ABC теорему о биссектрисе внутреннего угла, получим, что

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KC} \Leftrightarrow \frac{AB}{x} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow AB = 2x.$$

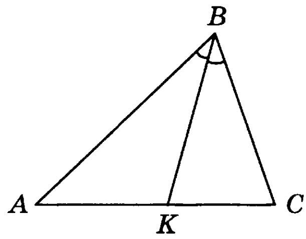


Рис. 18

Применим теперь к треугольнику ABC формулу для вычисления длины биссектрисы. Имеем:

$$BK^2 = AB \cdot BC - AK \cdot KC \Leftrightarrow \frac{9}{2} = 2x \cdot 2 - x \cdot 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Значит, стороны треугольника ABC равны $AB = 3$, $AC = \frac{5}{2}$ и $BC = 2$, а полупериметр равен $p = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{2} + 2\right) = \frac{15}{4}$. Для вычисления площади треугольника воспользуемся формулой Герона:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{15}{4}\left(\frac{15}{4} - 3\right)\left(\frac{15}{4} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{15}{4} - 2\right)} = \frac{15\sqrt{7}}{16}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

Пример 4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AD и BE. Рассмотрим треугольник ABD, в нем отрезок BO является и высотой, и биссектрисой. Поэтому треугольник ABD равнобедренный: $AB = BD$ и $AO = OD = \frac{AD}{2} = 2$. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$ (рисунок 19). К тре-

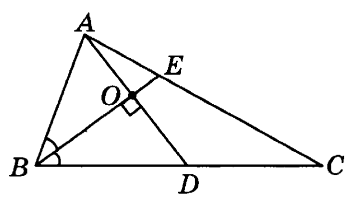


Рис. 19

угольнику ABC применим теорему о биссектрисе внутреннего угла. Имеем:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}\Leftrightarrow EC=2AE.$$

Пусть $AE = y$, тогда $EC = 2y$. Применив формулы для вычисления длин биссектрисы и медианы к треугольнику ABC, его биссектрисе BE и медиане AD, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}AB\cdot BC-AE\cdot EC=BE^2,\\ 2AB^2+2AC^2-BC^2=4AD^2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2y^2=16,\\ 64=2x^2+2\cdot(3y)^2-(2x)^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=8,\\ 9y^2-x^2=32;\end{cases}\Rightarrow$$

$x=\sqrt{13}$, $y=\sqrt{5}$, откуда $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$.

Пример 5. В треугольнике ABC косинус угла A равен $1/8$, длина биссектрисы AL этого треугольника равна $10/3$, длина стороны BC равна 6. Найти длины сторон AB и AC этого треугольника.

Решение. Пусть $\angle A=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1}{8}$.

Тогда $\cos\frac{\alpha}{2}= \ =\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{3}{4}$.

Пусть также $AB = x$, $AC = y$. Применив к треугольнику ABC формулу для вычисления длины биссектрисы, а также теорему косинусов, получим следующую систему:

$$\begin{cases}AL=\dfrac{2AB\cdot AC\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{AB+AC},\\ BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2xy\cdot\dfrac{3}{4}}{x+y}=\dfrac{10}{3},\\ x^2+y^2-2xy\cdot\dfrac{1}{8}=36;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9xy=20(x+y),\\ x^2+y^2=36+\frac{1}{4}xy;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9xy=20(x+y),\\ (x+y)^2=36+\frac{9}{4}xy;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+y)^2=36+5(x+y).$$

Положительный корень этого уравнения есть $x + y = 9$. Следовательно, $xy = 20$, откуда $x = 5$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 5$.

Ответ: $AB = 5$, $AC = 4$; или $AB = 4$, $AC = 5$.

Пример 6. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$ и $BO = 2 \cdot OB_1$. Найти отношение высоты, опущенной из точки C, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

Решение. Пусть $AO = 7x$, $BO = 2y$, тогда $OA_1 = 2x$, $OB_1 = y$. Опустим из точек A и O перпендикуляры AH и OK на прямую BC (рисунок 20). Так как треугольники AHA_1 и OKA_1 подобны, то

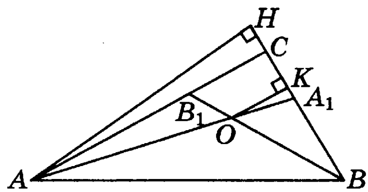


Рис. 20

$$\frac{AH}{OK} = \frac{AA_1}{OA_1} \Leftrightarrow \frac{h_a}{r} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{2}{9r}.$$

Аналогично $\frac{h_b}{r} = 3$, откуда $\frac{1}{h_b} = \frac{1}{3r}$. Воспользуемся равенством $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Действительно, домножив обе части этого равенства на $2S$ (S — площадь треугольника), получим и справа и слева число $a + b + c$, то есть периметр треугольника. Имеем:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{2}{9r} + \frac{1}{3r} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{4}{9r},$$

откуда $\frac{h_c}{r} = \frac{9}{4}$.

Ответ: 9/4.

Пример 7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр O вписанной в треугольник ABC окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найти длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если $BC = 15$, $BD = 6$, $CF = 4$.

Решение. Согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла имеем $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{FC}=\frac{3}{2}$, так как прямые BC и DF параллельны (рисунок 21). Отсюда находим, что $BE = 9$ и $EC = 6$. Пусть теперь $AF = x$. Так как CO — биссектриса треугольника ACE, то

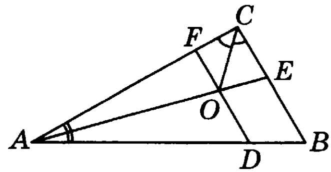


Рис. 21

$$\frac{CA}{CE}=\frac{AO}{OE}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x+4}{6}=\frac{x}{4} \Leftrightarrow x=8.$$

Следовательно, $AD = 12$ и периметр треугольника ABC равен 45.

Ответ: $BE = 9$, $P = 45$.

Пример 8. В треугольнике ABC, все стороны которого различны, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найти длину отрезка AD.

Решение. Проведем следующие преобразования (рисунок 22):

$$ab=(AB-BD)(AC+CD)=$$

$$=AB\cdot AC+AB\cdot CD-BD\cdot AC-BD\cdot CD=$$

$$=(AB\cdot AC-BD\cdot CD)+(AB\cdot CD-BD\cdot AC).$$

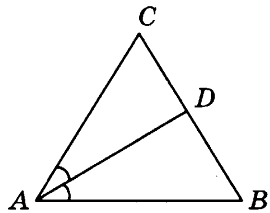


Рис. 22

Выражение, стоящее в первой скобке, равно AD^2 согласно формуле для вычисления длины биссектрисы. Выражение, стоящее во второй скобке, равно 0, так как

$$AB\cdot CD=BD\cdot AC \Leftrightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$

согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Таким образом, $ab = AD^2$, откуда $AD = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник со сторонами 4, 8 и 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

2. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Найти периметр треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE, которые пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2OL$. Найти AB.

4. В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE. Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найти BE.

5. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как 5 : 2 соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$, AD — биссектриса угла BAC. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная прямой AD и пересекающая прямую AC в точке E. Найти AE.

7. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а острый угол равен α. Найти длину биссектрисы прямого угла.

8. В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM.

9. В прямоугольном треугольнике ABC высота, опущенная на гипотенузу, равна $12/5$, а биссектриса прямого угла равна $12\sqrt{2}/7$. Найти площадь треугольника ABC.

10. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найти OD.

11. В треугольнике KLM известны длины сторон $KL = m$, $LM = k$, $MK = l$. Биссектрисы KA и MB пересекаются в точке O, диагонали четырехугольника $AOBL$ пересекаются в точке C. Найти отношение $BC : CA$.

12. В треугольнике PQR длина биссектрисы PO равна 6, отношение длин отрезков QO и OR равно 3 : 4, периметр треугольника PQR равен 21. Чему равен косинус угла QPR?

13. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 8$, $BC = 6$ и биссектриса $BD = 6$. Найти длину медианы AE.

14. Определить угол A треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{7}$.

15. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти углы треугольника ABC и площадь четырехугольника $NBMD$, если $AC = 1$.

16. Биссектриса CD угла ACB равнобедренного треугольника ABC делит его сторону AB так, что $AD = BC$. Найти длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC, если его основание BC равно 2.

§ 4. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ И ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этом параграфе сформулируем теорему Фалеса, определение и признаки подобия треугольников, а также еще две теоремы, которые часто применяются при решении задач.

Теорема 1. (Теорема Фалеса.) Параллельные прямые высекают на пересекающих их прямых пропорциональные отрезки.

Два треугольника называются подобными, если соответствующие стороны у них пропорциональны. Заметим, что у подобных треугольников пропорциональны также все соответствующие элементы (высоты, медианы, биссектрисы, радиусы вписанной и описанной окружностей и т.д.).

Теорема 2. (Первый признак подобия.) Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то такие треугольники подобны.

Теорема 3. (Второй признак подобия.) Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Теорема 4. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

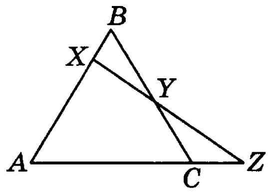


Рис. 23

Теорема 5. (Теорема Менелая.) Если некоторая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC — в точке Z, то $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1$ (рисунок 23).

Теорема 6. Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны, причем коэффициент подобия $k = \cos\angle B$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дана трапеция $ABCD$, причем известно, что $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Известно, что $PL = LR$. Найти PQ.

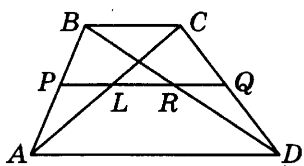


Рис. 24

Решение. Докажем сначала, что $PL = RQ$. Из подобия треугольников APL и ABC получаем, что $\frac{PL}{BC}=\frac{AP}{AB}$, а из подобия треугольников DQR и DCB находим, что $\frac{RQ}{BC}=\frac{DQ}{DC}$ (рисунок 24). Согласно теореме Фалеса имеем:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{DQ}{DC}\Leftrightarrow\frac{PL}{BC}=\frac{RQ}{BC},$$

откуда $PL = RQ$.

Обозначим теперь $PL = LR = RQ = x$ и рассмотрим снова две пары подобных треугольников:

$$\Delta APL\backsim\Delta ABC\Rightarrow\frac{PL}{BC}=\frac{AP}{AB}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=\frac{AP}{AB};$$

$$\Delta PBR\backsim\Delta ABD\Rightarrow\frac{PR}{AD}=\frac{PB}{AB}\Leftrightarrow\frac{2x}{b}=\frac{PB}{AB}.$$

Далее $\frac{AP}{AB}+\frac{PB}{AB}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{2x}{b}=1 \Leftrightarrow x=\frac{ab}{2a+b}$.

Значит, $PQ=\frac{3ab}{2a+b}$.

О т в е т: $\frac{3ab}{2a+b}$.

Пример 2. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Согласно теореме 6 треугольник BPQ подобен треугольнику BAC с коэффициентом подобия $k = \cos\angle B$ (рисунок 25). Но, с другой стороны, площади этих треугольников относятся как 1 : 9, т.е. коэффициент подобия равен 1/3. Следовательно, $\cos\angle B = \frac{1}{3}$, $\sin\angle B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и

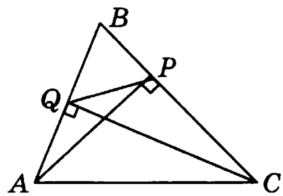


Рис. 25

радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, равен $R_{\Delta BPQ}=\frac{PQ}{2\sin\angle B}=\frac{3}{2}$. Так как радиусы окружностей, описанных около подобных треугольников, относятся как коэффициент подобия, то радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в три раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника BPQ, и равен $R_{\Delta ABC}=3R_{\Delta BPQ}=\frac{9}{2}$.

О т в е т: 9/2.

Пример 3. В треугольнике ABC угол C тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведенная из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найти AC.

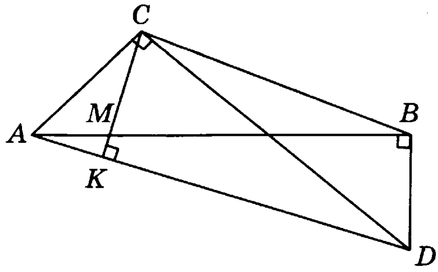


Рис. 26

Решение. Пусть K — основание высоты треугольника ADC, опущенной из точки C на прямую AD (рисунок 26). Треугольники AMK и ADB подобны, значит, верно равенство

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot AK = a(a+b).$$

Треугольники ACK и ADC также подобны, имеем

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow AD \cdot AK = AC^2.$$

Следовательно, $AC^2 = a(a+b)$, откуда $AC = \sqrt{a(a+b)}$.

Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$.

Пример 4. Точка P лежит на боковой стороне MN трапеции $KLMN$. Кроме того, известно, что $\angle LMN = \angle MLN = \angle KLP = \arccos\frac{3}{4}$ и $PL = 18$. Найти длину отрезка KL.

Решение. Проведем высоту NH треугольника LNM. Так как этот треугольник равнобедренный, то H — середина LM (рисунок 27). Из условия задачи вытекает, что $\angle PLM = \angle KLN$. Кроме того, $\angle MLN = \angle KNL$ (как накрест лежащие). Тогда треугольники PLM и KLN подобны (по двум углам). Имеем:

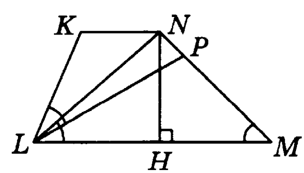


Рис. 27

$$\frac{PL}{KL} = \frac{LM}{LN} = \frac{2LH}{LN} = 2\cos\angle MLN = \frac{3}{2} \Leftrightarrow KL = \frac{2}{3}PL = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 5. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Из условия задачи вытекает, что $\angle BAD = \angle DAC = 120°$. Пусть $\angle ADB = \alpha$ (рисунок 28). Тогда $\angle CDA = 60° - \alpha$ и $\angle ACD = \alpha$. Следовательно, треугольники BAD и DAC подобны (по двум углам). Имеем:

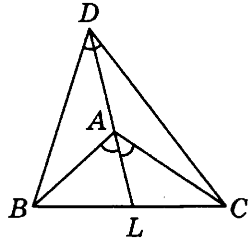


Рис. 28

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AB \cdot AC = AD^2 = 100 \Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 25\sqrt{3}.$$

Ответ: $25\sqrt{3}$.

Пример 6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD боковая сторона AB перпендикулярна AD, $BC = 5$, $AD = 7$. Точки K и M — середины сторон AB и CD соответственно. Перпендикуляр AP, проведенный из точки A к прямой CD, пересекает отрезок KM в точке L, при этом $KL : LM = 2 : 1$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

Решение. Проведем высоту CH трапеции $ABCD$. Тогда $AH = 5$, $DH = 2$, $KM = \dfrac{AD + BC}{2} = 6$, $KL = 4$ и $LM = 2$ (рисунок 29). Пусть $\angle KLA = \alpha$. Тогда $\angle PLM = \alpha$, $\angle LMP = 90° - \alpha$ и $\angle HCD = \alpha$. Следовательно, треугольники KLA и HCD подобны (по двум углам).

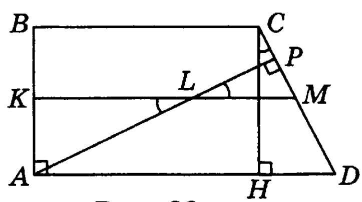


Рис. 29

Имеем:

$$\frac{KL}{HC} = \frac{AK}{DH} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AK \cdot HC = KL \cdot DH = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} HC \cdot HC = 8 \Leftrightarrow HC^2 = 16 \Leftrightarrow HC = 4.$$

Значит, площадь трапеции $ABCD$ равна $S = KM \cdot HC = 24$.

Ответ: 24.

Пример 7. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найти AC.

Решение. Пусть R и T — точки пересечения прямой AM с прямыми BP и BQ соответственно. Так как $AT : TM = 2 : 1$ и AM — медиана треугольника ABC, то BQ — также медиана этого треугольника (рисунок 30). Пусть $AP = x$, тогда $QC = 3 + x$. Применим к треугольнику CAM и секущей PR теорему Менелая. Имеем:

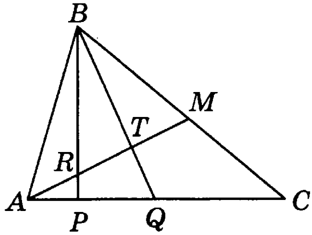


Рис. 30

$$\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AR}{RM}\cdot\frac{MB}{BC}=1 \Leftrightarrow \frac{6+x}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow 6+x=4x \Leftrightarrow x=2.$$

Следовательно, $AC = 6 + 2x = 10$.

Ответ: 10.

Пример 8. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Найти BC, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30°$.

Решение. Построим на отрезке AH как на диаметре окружность. Так как углы AB_1H и AC_1H — прямые, то точки B_1 и C_1 лежат на этой окружности (рисунок 31). Применив к треугольнику AB_1C_1 теорему синусов, получим, что

$$B_1C_1 = 2R\sin\angle B_1AC_1 = AH \cdot \sin 30° = 10{,}5.$$

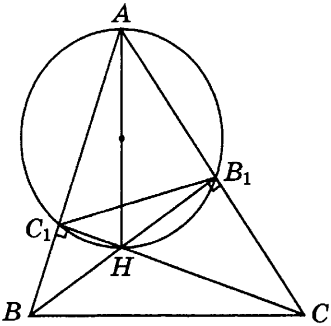


Рис. 31

Треугольники B_1AC_1 и BAC подобны, причем коэффициент подобия равен $k=\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (теорема 6). Поэтому

$$BC=\frac{B_1C_1}{\cos 30°}=7\sqrt{3}.$$

Ответ: $7\sqrt{3}$.

Пример 9. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Расстояние между точками M и N равно $4+2\sqrt{3}$, а $\angle MCN = 30°$. Найти биссектрису CL треугольника CMN.

Решение. Докажем, что треугольник CMN равнобедренный, $CM = CN$ (рисунок 32). Треугольники ANC и NPC подобны (по двум углам), откуда $\frac{CN}{CA}=\frac{CP}{CN}$, поэтому $CN^2 = CP \cdot CA$. Аналогично $CM^2 = CD \cdot CB$. С другой стороны, $CP \cdot CA = CD \cdot CB$. Это следует из равенства $\frac{CD}{CA}=\frac{CP}{CB}=\cos\angle C$.

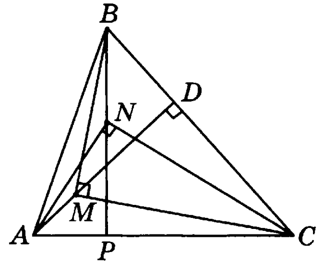


Рис. 32

Следовательно, $CN = CM$, что и требовалось доказать.

Проведем биссектрису CL треугольника CNM (рисунок 33). Тогда $\angle MCL = 15°$ и $ML = 2 + \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника MCL находим, что $CL=\frac{ML}{\mathrm{tg}15°}$. Вычислим $\mathrm{tg}15°$. Имеем:

$$\mathrm{tg}15° = \mathrm{tg}(60°-45°) =$$

$$=\frac{\mathrm{tg}60°-\mathrm{tg}45°}{1+\mathrm{tg}60°\mathrm{tg}45°}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

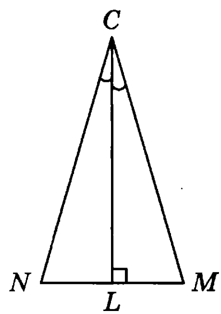


Рис. 33

Таким образом,

$$CL=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Ответ: $7+4\sqrt{3}$.

Пример 10. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AA_1, BB_1 и CC_1 — его высоты, $A_1B_1 = 13$, $A_1C_1 = 12$, $B_1C_1 = 5$ (рисунок 34).

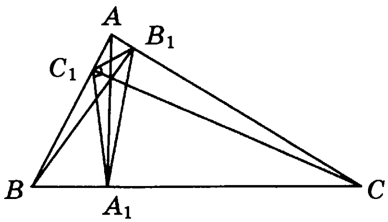


Рис. 34

Заметим сначала, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный ($\angle C_1 = 90°$). Это следует из равенства $13^2 = 12^2 + 5^2$. Далее $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta AB_1C_1 \backsim \Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$ согласно теореме 6. Поэтому $\angle BC_1A_1 = \angle B_1C_1A = \angle BCA = 45°$. В силу все той же теоремы 6 получаем, что $AB = \dfrac{A_1B_1}{\cos\angle C} = 13\sqrt{2}$. И, наконец, применим к треугольнику ABC теорему синусов. Имеем: $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle C} = 13$.

Ответ: 13.

Пример 11. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найти длину отрезка AD, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

Решение. Докажем, что точки G, O и F лежат на одной прямой (рисунок 35). Углы ACB и CAD равны (как накрест лежащие). Следовательно, $\angle OCG = \angle OAF$. Треугольники COB и AOD подобны, поэтому $\dfrac{CO}{AO} = \dfrac{CB}{AD} = \dfrac{CG}{AF}$. Но тогда подобны треугольники COG и AOF (первый признак подобия). Значит, $\angle COG = \angle AOF$ и точки G, O и F лежат на одной прямой.

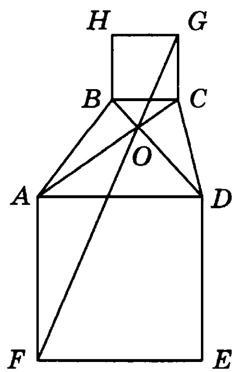


Рис. 35

Рассмотрим снова подобные треугольники COG и AOF. Имеем: $CG = BC = 2$,

$GO = 7$, $AF = AD = x$, $FO = GF - GO = 11$. Получаем следующую пропорцию:

$$\frac{CG}{GO} = \frac{AF}{FO} \Leftrightarrow \frac{2}{7} = \frac{x}{11} \Leftrightarrow x = \frac{22}{7}.$$

Следовательно, $AD = \dfrac{22}{7}$.

Ответ: 22/7.

Пример 12. В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$ и $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата O проведена прямая, которая пересекает высоту BH треугольника ABC в точке M. Найти площадь треугольника AMC.

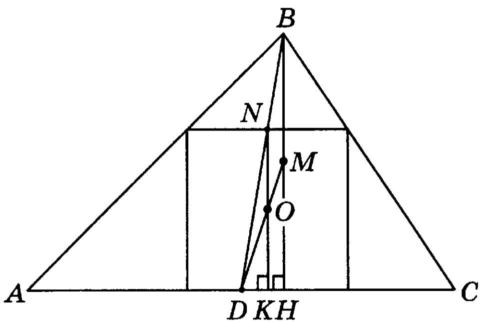


Рис. 36

Решение. Докажем, что M — середина отрезка BH (рисунок 36). Отрезок BD, будучи медианой треугольника ABC, пересекает «верхнюю» сторону квадрата в точке N, которая является серединой этой стороны.

Проведем через точки N и O прямую (параллельную BH), которая пересечет сторону AC в точке K. Две пары подобных треугольников, DON и DMB, а также DOK и DMH имеют одинаковый коэффициент подобия $k = DO : DM$. Поэтому из равенства $ON = OK$ следует равенство $MB = MH$, что и требовалось доказать.

Площадь треугольника AMC равна половине площади треугольника ABC, так как эти треугольники имеют общее основание AC, а высота первого треугольника (проведенная к этому основанию) в два раза меньше соответствующей высоты второго треугольника. Найдем площадь треугольника ABC, воспользовавшись формулой Герона. Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{9(9-6)(9-5)(9-7)} = 6\sqrt{6}.$$

Следовательно, площадь треугольника AMC равна $3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC точка D есть середина AB, точка E лежит на стороне BC, причем $BE : EC = 1 : 2$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O. Найти длину стороны AB, если $AE = 5$, $OC = 4$, а угол AOC равен $120°$.

2. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что выполняются соотношения $AK : KB = 3 : 2$ и $AM : MC = 4 : 5$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

3. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $13/20$, а сумма углов ABC и ADB равна π. Найти периметр треугольника ABC, если длина стороны BC равна 2.

4. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Найти длины оснований, если их отношение равно 4.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.

6. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3OA$ от прямой OA, а на луче OA — точка N на расстоянии $3OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3. Найти MN.

7. В равнобедренный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании BC, а две другие — на боковых сторонах треугольника. Сторона квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник, как $8 : 5$. Найти углы треугольника.

8. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $BE : EC = 1 : 2$, $CF : FE = 1 : 5$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком FE удовлетворяет условию $MF : ME = 1 : 4$. Найти диагонали параллелограмма.

9. В остроугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен $30°$, а высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников DEO и ABC.

10. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC, M — точка пересечения прямых AF и DE, причем $AE = 2BE$, а $BF = 3CF$. Найти отношение $AM : MF$.

11. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR — точка L, причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найти отношение $PN : PR$.

12. Высоты AK и CL остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Найти величину угла BAC, если $AH = HK$ и $CH = 2HL$.

13. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD. В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC?

14. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что угол AMD равен углу ADB и угол ACM равен углу ABC. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найти радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

15. Около треугольника ABC с высотами BB_1 и CC_1 описана окружность радиуса 6. Найти радиусы окружностей, описанных около треугольников BB_1C и AB_1C_1, если известно, что $\cos\angle BAC = -\frac{1}{3}$.

16. В трапеции $ABCD$ основание AD в полтора раза длиннее основания BC, а длины боковых сторон AB и CD равны. На стороне BC взята такая точка K, что $BK = 2KC$. Прямые AK и CD пересекаются в точке E, а прямые DK и AB — в точке F. Найти отношение $BF : EC$.

17. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя треугольник AKD с углом 45° при вершине K. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Найти площадь треугольника AKD.

§ 5. ЛЕММЫ О ПЛОЩАДЯХ

В данном параграфе мы сформулируем три леммы, которые называются «леммы о площадях» и применяются для решения задач, связанных с нахождением отношения площадей треугольников. Подчеркнем, что каждая лемма представляет собой не конкретную формулировку, а некоторый тип утверждений. Первый тип мы условно назовем «общая высота», второй — «общее основание», третий — «общий угол».

Лемма 1. Если стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и A_1BC_1 лежат на одной прямой, то площади этих треугольников относятся как длины их оснований, а именно (см. рисунок 37):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

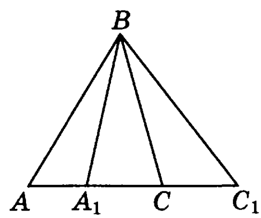


Рис. 37

Лемма 2. Если два треугольника ABC и AB_1C имеют общую сторону AC, то их площади относятся как длины отрезков BD и B_1D, где D — точка пересечения прямой BB_1 с прямой AC, а именно (см. рисунок 38):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB_1C}} = \frac{BD}{B_1D}.$$

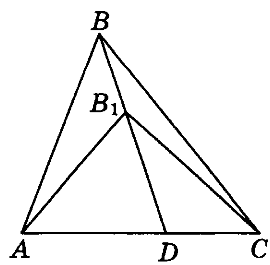


Рис. 38

Лемма 3. Если треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A, то их площади относятся как произведения соответствующих сторон, прилежащих к этому углу, а именно (см. рисунок 39):

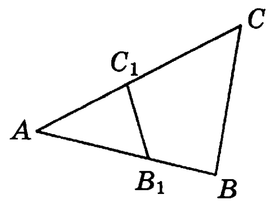


Рис. 39

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь S которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

Решение. Площадь четырехугольника $OMCD$ будем искать как разность площадей треугольников BDC и BOM (рисунок 40). Площадь треугольника BDC равна половине площади параллелограмма $ABCD$, то есть равна $\frac{1}{2}$. Найдем площадь треугольника BOM.

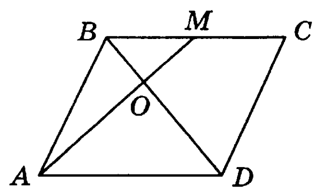


Рис. 40

Из подобия треугольников BOM и DOA получаем, что $\frac{BO}{OD} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2}$, откуда $\frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$. Далее согласно третьей лемме о площадях имеем:

$$\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{BO}{BD} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

откуда $S_{\Delta BOM} = \frac{1}{12}$. Значит, $S_{OMCD} = S_{\Delta BDC} - S_{\Delta BOM} = \frac{5}{12}$.

Ответ: 5/12.

Пример 2. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : LB = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, зная, что площадь треугольника QBC равна 1.

Решение. Пусть $AK = x$, $BL = y$. Тогда $KB = 2x$, $LC = 2y$ и, значит, $AB = 3x$ и $BC = 3y$ (рисунок 41). Применим к треугольнику BAL и секущей KQ теорему Менелая. Имеем:

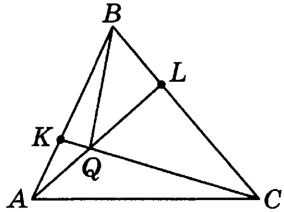


Рис. 41

$$\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{LC}{CB}=1,$$

откуда $\frac{AQ}{QL}=\frac{3}{4}$ и $\frac{AL}{QL}=\frac{7}{4}$. Далее, применив к треугольникам ABC и QBC вторую лемму о площадях, получим:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta QBC}}=\frac{AL}{QL}=\frac{7}{4},$$

следовательно, $S_{\Delta ABC}=\frac{7}{4}\cdot S_{\Delta QBC}=\frac{7}{4}$.

Ответ: 7/4.

Пример 3. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $CD : RD = 3 : 2$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ, если $AD = 2BC$.

Решение. Пусть K — точка пересечения прямых AB и CD. Тогда треугольник AKD подобен треугольнику BKC и коэффициент подобия равен $AD : BC = 2$ (рисунок 42). Значит, площадь треугольника AKD в четыре раза больше площади треугольника BKC. Так как разность площадей треугольников AKD и BKC равна площади трапеции $ABCD$ и равна 30, то $S_{\Delta AKD}=40$ и $S_{\Delta BKC}=10$.

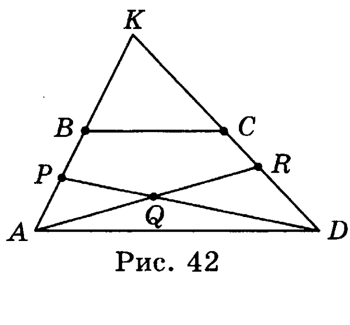


Рис. 42

Пусть $CD = 3x$, тогда из условия $CD : RD = 3 : 2$ находим, что $RD = 2x$ и $CR = x$; кроме того, $KC = CD = 3x$. Пусть $AP = y$, тогда $PB = y$ и $BK = 2y$. Применим к треугольнику KDP и секущей RQ теорему Менелая. Имеем:

$$\frac{KR}{RD}\cdot\frac{DQ}{QP}\cdot\frac{PA}{AK}=1,$$

откуда $\dfrac{DQ}{QP}=2$ и $\dfrac{PQ}{PD}=\dfrac{1}{3}$. Применив теперь первую лемму о площадях к треугольникам APQ и APD, а также к треугольникам APD и AKD, получим, что

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta APD}}=\frac{PQ}{PD}=\frac{1}{3},\quad \frac{S_{\Delta APD}}{S_{\Delta AKD}}=\frac{AP}{AK}=\frac{1}{4},$$

следовательно,

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta AKD}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Значит, $S_{\Delta APQ}=40\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{10}{3}$.

Ответ: 10/3.

Пример 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD и AOD равны соответственно 20, 40 и 60. Найти угол BAO, если известно, что $AB = 15$, $AO = 8$, а угол BOA больше 31°.

Решение. Применим к треугольникам BAO и BOC, а также к треугольникам AOD и COD первую лемму о площадях:

$$\frac{S_{\Delta BAO}}{S_{\Delta BOC}}=\frac{AO}{OC}=\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta COD}}\Rightarrow\frac{S_{\Delta BAO}}{20}=\frac{60}{40},$$

откуда $S_{\Delta BAO}=30$ (рисунок 43).

С другой стороны,

$$S_{\Delta BAO}=\frac{1}{2}AB\cdot AO\cdot\sin\angle BAO=$$
$$=60\cdot\sin\angle BAO,$$

откуда $\sin\angle BAO=\dfrac{1}{2}$. Значит, $\angle BAO = 30°$ или $\angle BAO = 150°$.

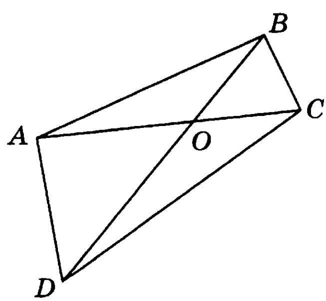


Рис. 43

Если угол BAO равен 150°, то, согласно теореме о сумме углов треугольника, угол BOA должен быть меньше 30°, что противоречит условию задачи. Следовательно, $\angle BAO = 30°$.

Ответ: 30°.

Пример 5. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $AM : MB = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найти отношение $CN : ND$, если $BC : AD = 1 : 2$.

Решение. Пусть K — точка пересечения прямых AB и CD. Тогда из условия задачи следует, что BC — средняя линия треугольника AKD. Пусть $AM = 2x$, $MB = 3x$, тогда $BK = 5x$. Обозначив теперь $DN = z$ и $CN : ND = k$, получим, что $CN = kz$, а $CK = (k + 1)z$ (рисунок 44). Рассмотрим два случая.

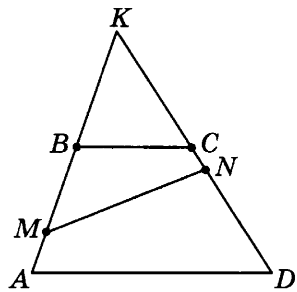


Рис. 44

1) Пусть сначала площадь четырехугольника $AMND$ в три раза больше площади четырехугольника $MBCN$. Пусть $S_{MBCN} = S$, тогда $S_{AMND} = 3S$. Так как отношение площадей подобных треугольников AKD и BKC равно 4, а их разность равна $4S$, то $S_{\Delta BKC} = \frac{4}{3}S$, а $S_{\Delta MKN} = S + \frac{4}{3}S = \frac{7}{3}S$. Применим к этим двум треугольникам третью лемму о площадях:

$$\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta MKN}} = \frac{\frac{4}{3}S}{\frac{7}{3}S} = \frac{4}{7} = \frac{KB}{KM} \cdot \frac{KC}{KN} = \frac{5}{8} \cdot \frac{k+1}{2k+1},$$

откуда $k = \frac{3}{29}$.

2) Пусть теперь $S_{MBCN} = 3S$ и $S_{AMND} = S$. Тогда $S_{\Delta BKC} = \frac{4}{3}S$ и $S_{\Delta MKN} = \frac{13}{3}S$. Снова применив к треугольникам BKC и MKN третью лемму о площадях, получим:

$$\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta MKN}} = \frac{\frac{4}{3}S}{\frac{13}{3}S} = \frac{4}{13} = \frac{KB}{KM} \cdot \frac{KC}{KN} = \frac{5}{8} \cdot \frac{k+1}{2k+1},$$

откуда $k = -33$, т.е. точка N не лежит между точками C и D, поэтому этот случай не имеет места.

Ответ: 3/29.

Пример 6. Точка F лежит на продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что отрезок AE на 1 длиннее отрезка EG, а отрезок GF равен 3. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника ADE?

Решение. Пусть $EG = x$, тогда согласно условию задачи $AE = x + 1$ (рисунок 45). Рассмотрим две пары подобных треугольников. Из подобия треугольников BEF и DEA получаем соотношение

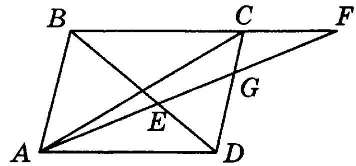


Рис. 45

$$\frac{EF}{AE} = \frac{BF}{AD} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} = \frac{BF}{AD}.$$

Треугольник CGF подобен треугольнику DGA. Имеем:

$$\frac{GF}{AG} = \frac{CF}{AD} \Leftrightarrow \frac{3}{2x+1} = \frac{CF}{AD}.$$

Далее

$$\frac{BF}{AD} - \frac{CF}{AD} = \frac{BC}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x+1} - \frac{3}{2x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит, $EG = 1$, $AE = 2$ и $AG = GF = 3$. Следовательно, из подобия треугольников ADG и FCG заключаем, что G — середина CD. Применив теперь первую лемму о площадях к треугольникам ADG и ADC, а также к треугольникам ADE и ADG, получим:

$$\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ADG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADG}} = \frac{AE}{AG} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: 1/6.

Пример 7. В треугольнике ABC, площадь которого равна 2, на медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q и R так, что $AP = PK$, $BQ : QL = 1 : 2$, а $CR : RN = 5 : 4$. Найти площадь треугольника PQR.

Решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Так как $AM : MK = 2 : 1$, то $AM = \frac{2}{3}AK$, а так как $AP = PK$, то $AP = \frac{1}{2}AK$ и $MP = AM - AP = \frac{1}{6}AK$ (рисунок 46). Значит, если $MP = x$, то $AP = 3x$ и $AM = 4x$. Так как $BM : ML = 2 : 1$, а $BQ : QL = 1 : 2$, то $BQ = QM = ML = y$, а $BM = 2y$. Так как $CM : MN = 2 : 1$, то $CM = \frac{2}{3}CN$, а так как $CR : RN = 5 : 4$, то $CR = \frac{5}{9}CN$ и $MR = CM - CR = \frac{1}{9}CN$. Значит, если $MR = z$, то $CR = 5z$ и $CM = 6z$.

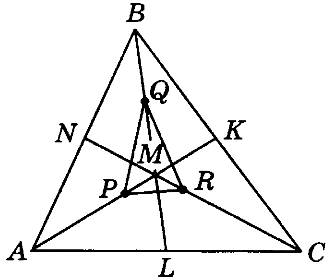


Рис. 46

Применим к треугольникам PMQ и AMB, треугольникам QMR и BMC, а также к треугольникам PMR и AMC третью лемму о площадях:

$$\frac{S_{\Delta PMQ}}{S_{\Delta AMB}} = \frac{MP}{MA} \cdot \frac{MQ}{MB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{\Delta PMQ} = \frac{1}{8} S_{\Delta AMB},$$

$$\frac{S_{\Delta QMR}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{MQ}{MB} \cdot \frac{MR}{MC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow S_{\Delta QMR} = \frac{1}{12} S_{\Delta BMC},$$

$$\frac{S_{\Delta PMR}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{MP}{MA} \cdot \frac{MR}{MC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \Rightarrow S_{\Delta PMR} = \frac{1}{24} S_{\Delta AMC}.$$

Так как

$$S_{\Delta AMB} = S_{\Delta BMC} = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC},$$

а

$$5\,S_{\Delta PQR} = S_{\Delta PMQ} + S_{\Delta QMR} + S_{\Delta PMR},$$

то

$$S_{\Delta PQR}=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}\right)S_{\Delta ABC}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABC}.$$

Поскольку $S_{\Delta ABC}=2$, то $S_{\Delta PQR}=\dfrac{1}{6}$.

Ответ: 1/6.

Пример 8. Найти площадь трапеции $ABCD$, если длина ее боковой стороны BC равна 5, а расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

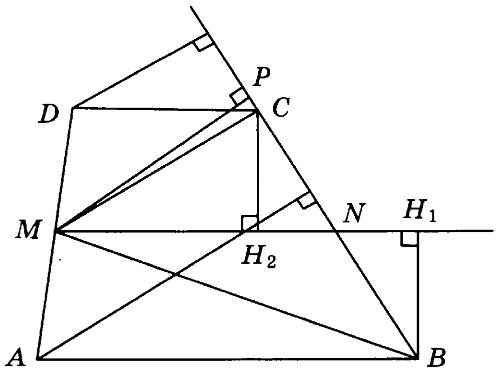


Рис. 47

Решение. Пусть MN — средняя линия трапеции (M принадлежит AD). Докажем, что площадь треугольника MBC равна половине площади трапеции $ABCD$ (рисунок 47). Для этого проведем перпендикуляры BH_1 и CH_2 к прямой MN. Тогда $BH_1=CH_2=\dfrac{h}{2}$, где h — высота трапеции. Площадь трапеции равна $S_{ABCD}=MN\cdot h$, а площадь треугольника MBC равна

$$S_{\Delta MBC}=S_{\Delta MBN}+S_{\Delta MCN}=\frac{1}{2}MN\cdot BH_1+\frac{1}{2}MN\cdot CH_2=$$

$$=\frac{1}{2}MN\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}MN\cdot h,$$

то есть половине площади трапеции $ABCD$, что и требовалось доказать.

Проведем перпендикуляр MP из точки M к прямой BC. Так как M — середина AD, то длина отрезка MP равна полусумме расстояний от точек A и D до прямой BC, то есть равна 5. Следовательно, $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} BC \cdot MP = 12{,}5$ и $S_{ABCD} = 25$.

Ответ: 25.

Пример 9. Из точки O, которая расположена внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

Решение. Пусть OK, OM, ON — перпендикуляры к сторонам BC, CA и AB соответственно, $BC = a$, $OK = k$, $CA = b$, $OM = m$, $AB = c$, $ON = n$ (рисунок 48). Рассмотрим треугольник OKM. Его площадь равна

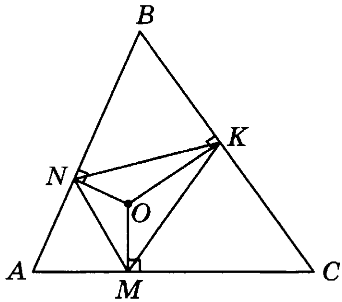


Рис. 47

$$S_{\Delta OKM} = \frac{1}{2} OK \cdot OM \cdot \sin\angle KOM =$$

$$= \frac{1}{2} km \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} km \sin\gamma,$$

где $\gamma = \angle BCA$. Тогда $\dfrac{S_{\Delta OKM}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2} km \sin\gamma}{\frac{1}{2} ab \sin\gamma} = \dfrac{km}{ab}$. Аналогично $\dfrac{S_{\Delta ONK}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{nk}{ca}$ и $\dfrac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{mn}{bc}$. Имеем:

$$\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta OKM} + S_{\Delta ONK} + S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta ABC}} =$$

$$= \frac{km}{ab} + \frac{nk}{ca} + \frac{mn}{bc} = \frac{kmc + nkb + mna}{abc},$$

откуда искомое отношение равно $\dfrac{abc}{kmc + nkb + mna}$.

Ответ: $\dfrac{abc}{kmc + nkb + mna}$.

Пример 10. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон треугольника KLM в точках A, B и C. Найти отношение площади треугольника KLM к площади треугольника ABC.

Решение. Пусть k, l и m — длины сторон треугольника KLM. Согласно предыдущей задаче имеем:

$$\frac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{klm}{r^2(k+l+m)}=\frac{4RS}{2r^2p}=\frac{4Rr}{2r^2}=\frac{2R}{r}=6$$

(все обозначения для треугольника KLM стандартные). Здесь были использованы формулы $S=\frac{klm}{4R}\Rightarrow klm=4RS$ и $S=pr\Rightarrow\frac{S}{p}=r$.

Ответ: 6.

Пример 11. В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины L и N лежат на основаниях BC и AD, а вершины K и M — на сторонах AB и CD соответственно, причем $AK : KB = 1 : 4$ и $AN : BL : LC = 4 : 2 : 3$. Найти отношение площадей трапеции и параллелограмма.

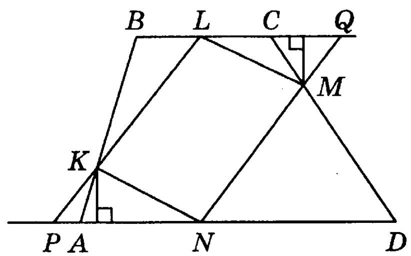


Рис. 49

Решение. Стороны LM и NK параллелограмма имеют равную длину и наклонены к основаниям трапеции под одинаковым углом, следовательно, равны расстояниям от точек M и K до прямых BC и AD соответственно. Так как $AK : AB = 1 : 5$, то каждое из этих расстояний составляет 1/5 часть высоты трапеции (рисунок 49). Это означает, что $CM : CD = 1 : 5$ и $CM : MD = 1 : 4$. Пусть прямая KL пересекает прямую AD в точке P, а прямая MN пересекает прямую BC в точке Q. Тогда $PLQN$ — параллелограмм. Пусть также $AN = 4x$, $BL = 2x$, $LC = 3x$.

Треугольники AKP и BKL подобны, поэтому $\frac{PA}{LB} = \frac{AK}{BK} = \frac{1}{4}$, откуда $PA = \frac{x}{2}$. Тогда $PN = \frac{9x}{2}$ и $LQ = \frac{9x}{2}$. Это означает, что $QC = \frac{3x}{2}$. Треугольники CMQ и DMN подобны, следовательно, $\frac{QC}{ND} = \frac{CM}{DM} = \frac{1}{4}$ и $ND = 6x$. Параллелограмм $PLQN$ и трапеция $ABCD$ имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как суммы длин оснований, то есть как 3 : 5. Параллелограммы $KLMN$ и $PLQN$ также имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как длины оснований, то есть как 4 : 5. Имеем:

$$S_{KLMN} = \frac{4}{5} S_{PLQN} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5} S_{ABCD}\right) = \frac{12}{25} S_{ABCD},$$

то есть искомое отношение равно 25 : 12.

Ответ: 25/12.

Пример 12. В трапеции $KLMN$ основания LM и KN равны 2 и 8 соответственно. Из точки E, лежащей на стороне MN, опущен перпендикуляр EF на сторону KL. Известно, что F — середина стороны KL, $FM = 3$ и что площадь четырехугольника $KFEN$ в четыре раза больше площади четырехугольника $LFEM$. Найти длину отрезка FN.

Решение. Треугольники KFN и LFM имеют одинаковую высоту (проведенную из вершины F), поэтому их площади относятся как длины оснований KN и LM, то есть как 4 : 1. Следовательно, площади треугольников FEN и FEM также относятся как 4 : 1 (рисунок 50).

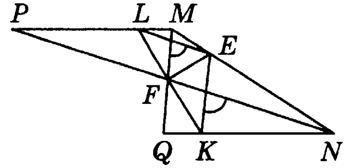


Рис. 50

Тогда согласно первой лемме о площадях $EN : EM = 4 : 1$. Пусть прямая FN пересекает прямую LM в точке P, а прямая FM пересекает прямую KN в точке Q. Тогда $PL = 8$ и $QK = 2$. Докажем, что $FN \parallel LE$ и $FM \parallel KE$.

Так как $ML : LP = ME : EN = 1 : 4$, то из теоремы, обратной теореме Фалеса, следует, что прямые FN и LE параллельны. Аналогично $NK : KQ = NE : EM = 4 : 1$. Отсюда вытекает параллельность прямых FM и KE. Поскольку FE — серединный перпендикуляр к отрезку KL, то $EK = EL$. Площадь четырехугольника $KFEN$ равна половине произведения его диагоналей на $\sin\alpha$, где α — угол между этими диагоналями. Точно так же, площадь четырехугольника $LFEM$ равна половине произведения его диагоналей на $\sin\alpha$ (угол α тот же самый). Имеем:

$$4 = \frac{S_{KFEN}}{S_{LFEM}} = \frac{\frac{1}{2}FN \cdot EK \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}FM \cdot EL \cdot \sin\alpha} = \frac{FN}{FM},$$

откуда $FN = 12$.

Ответ: 12.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30°, $AB = 4$ и $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

2. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$. Пусть N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Вычислить площадь треугольника BNM.

3. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, где S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

4. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK : KB = 2 : 1$, $BM : MC = 1 : 1$, $AL : LD = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников KBL и BML.

5. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найти площадь треугольника OEC.

6. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E так, что длина AE составляет треть длины AC, а на стороне AD взята точка F так, что длина AF составляет четверть длины AD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$ (где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC) равна 8.

7. В треугольнике ABC точка D лежит на AC, причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC. Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников ABO и OED.

8. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найти отношение оснований трапеции $AD : BC$.

9. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведена биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найти площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$.

10. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C — острый. Из середины M стороны BC опущен перпендикуляр MN на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся соответственно как $1 : 8$. Найти углы треугольника ABC.

11. Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC. Отрезок AE составляет $1/3$ стороны AB, отрезок BF составляет $1/6$ стороны BC, отрезок AM составляет $2/5$ стороны AC. Найти отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC.

12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4 и $AD = 3$. Найти сторону BC.

13. На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC — точка D так, что длина отрезка AE равна 2, а длина отрезка CD равна 1. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $BDOE$, если длина каждой из сторон AB и BC равна 8, а длина стороны AC равна 6.

14. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найти длину отрезка BD.

15. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$.

Известно, что радиус описанной около треугольника KLM окружности равен $5/2$, $KL = 4$, $LM = 3$ и $KM < KL$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

16. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке M, $BC = b$, $AD = a$. Найти отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

17. В треугольнике ABC биссектриса BB_1 пересекает медиану AA_1 в точке O. Найти отношение площади треугольника BOA_1 к площади треугольника AOB_1, если $AB : AC = 1 : 4$.

18. В прямоугольном треугольнике FGH с прямым углом при вершине G известно, что $FG = 8$, $GH = 2$. Точка D лежит на стороне FH, A и B — точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH соответственно. Найти площадь треугольника GAB.

19. В треугольнике ABC площадью 12 на стороне BC взята точка N так, что $NC : BC = 3 : 4$. Медиана AM пересекает медиану BL в точке D, а прямую LN — в точке E. Найти площадь четырехугольника $BDEN$.

20. Точки M, K и N лежат на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно, причем $AMKN$ — параллелограмм, площадь которого составляет $4/9$ площади треугольника ABC. Найти диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120°$.

21. Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1 : 2$. Найти отношение $CK : KF$.

22. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F

соответственно так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 1 : 3$?

23. Через вершину трапеции проведены две прямые. Одна из них проходит также через противоположную вершину трапеции и делит отрезок, соединяющий середины ее оснований, в отношении $3 : 1$. В каком отношении делит этот отрезок другая прямая, делящая площадь трапеции пополам?

24. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Сумма площадей треугольников AOB и COD равна сумме площадей треугольников BOC и AOD, а площадь треугольника BOC вдвое больше, чем площадь треугольника AOB. Медианы BK и BL треугольников ABD и DBC пересекают отрезок AC в точках M и N соответственно. Найти KL, если $NC = 4$.

25. В трапеции $ABCD$ основание CD в два раза больше основания AB. На боковых сторонах AD и BC выбраны точки P и Q так, что $DP : PA = 2 : 1$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

26. В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины L и N лежат на основаниях BC и AD, а вершины K и M — на сторонах AB и CD соответственно, причем $AK : KB = 2 : 3$ и $BL : LC = 7 : 5$. Найти отношение площадей треугольников BKL и CLM.

§ 6. УГЛЫ В ОКРУЖНОСТЯХ

В данном параграфе мы дадим определение угловой величины дуги окружности, не использующее понятие центрального угла. Итак, угловой величиной дуги окружности назовем отношение длины этой дуги к длине окружности, умноженное на 2π. Легко понять, что определенная таким образом угловая величина дуги как раз равна величине центрального угла (выраженной в радианах), который стягивает данную дугу. Однако наше определение позволяет обойтись без дополнительного построения центрального угла. Сформулируем несколько утверждений, позволяющих выражать углы, связанные с окружностью, через дуги этой окружности.

Теорема 1. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Значит, вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, или на равные дуги одной окружности, равны.

Теорема 2. Угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла.

Теорема 3. Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла.

Теорема 4. Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой угловых величин дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения.

Теорема 5. Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна π, и наоборот, если сумма противоположных углов выпуклого четырехугольника равна π, то вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

Теорема 6. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

Теорема 7. Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для любой секущей, проведенной к окружности из данной точки, и равна квадрату длины касательной, проведенной к окружности из той же точки.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найти длину отрезка KC, если $BC = 4$, а $AK = 6$.

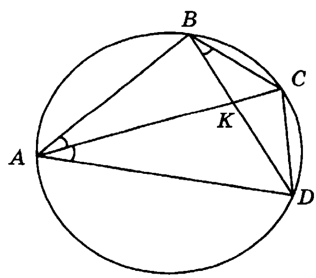


Рис. 51

Решение. Так как AC — биссектриса угла BAD, то угол BAC равен углу CAD (рисунок 51). С другой стороны, углы CAD и CBD равны (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Значит, угол

BAC равен углу *CBK*. Следовательно, треугольник *ABC* подобен треугольнику *BKC* (по двум углам). Имеем:

$$\frac{BC}{KC}=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow\frac{4}{KC}=\frac{6+KC}{4}\Rightarrow KC=2.$$

Ответ: 2.

Пример 2. Из вершины тупого угла *A* треугольника *ABC* опущена высота *AD*. Из точки *D* радиусом, равным *AD*, описана окружность, пересекающая стороны треугольника *AB* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно. Вычислить длину стороны *AC*, если заданы длины отрезков $AB = c$, $AM = n$ и $AN = m$.

Решение. Продолжим высоту *AD* треугольника *ABC* до пересечения с окружностью в точке *E*. Тогда *AE* является диаметром окружности и угол *ANE* — прямой (рисунок 52). Пусть $\angle AEN = \alpha$. Так как вписанные углы, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу, равны, то $\angle AMN = \alpha$.

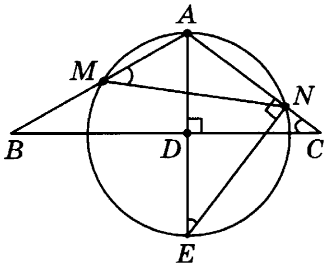


Рис. 52

Далее из прямоугольного треугольника *AEN* получаем, что $\angle EAN = 90° - \alpha$, а из прямоугольного треугольника *ADC* находим, что $\angle ACD = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Следовательно, треугольник *ABC* подобен треугольнику *ANM* (по двум углам). Имеем:

$$\frac{AB}{AN}=\frac{AC}{AM}\Leftrightarrow\frac{c}{m}=\frac{AC}{n}\Leftrightarrow AC=\frac{nc}{m}.$$

Ответ: $\frac{nc}{m}$.

Пример 3. В окружности пересекающиеся хорды *AB* и *CD* перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

Решение. Пусть *K* — точка пересечения данных хорд (рисунок 53). Пусть угол *ABC* равен β, тогда и $\angle ADC = \beta$ (как вписанный, опирающийся в окружности на ту же дугу).

Рассмотрим треугольник ADK, в котором $AK = AD \cdot \sin\angle ADK = m\sin\beta$. Аналогично в треугольнике CBK имеем: $CK = BC \cdot \sin\angle CBK = n\sin\beta$. Применив теперь теорему Пифагора к треугольнику ACK, получим, что:

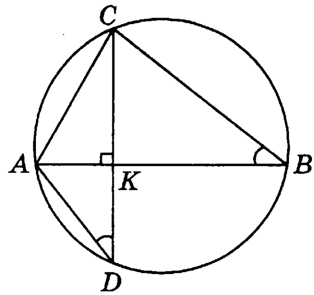


Рис. 53

$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sin\beta.$$

Диаметр данной окружности будем искать как диаметр окружности, описанной около треугольника ACD, для чего применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sin\beta}{\sin\beta} = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Пример 4. Вершины B, C, D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD — в точке E. Известно, что угол BAD прямой, длина хорды EF равна длине хорды FB и длины хорд BC, CD, ED равны между собой. Найти угол ABO.

Решение. Так как равные хорды окружности стягивают равные дуги, то $\smile EF = \smile FB = \omega_1$ и $\smile BC = \smile CD = \smile DE = \omega_2$ (рисунок 54). Поскольку угол, вершина которого находится вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла, имеем:

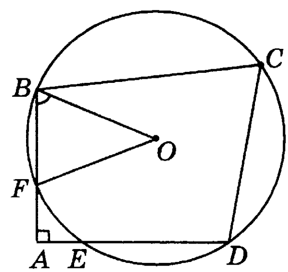


Рис. 54

$$\angle BAD = \frac{1}{2}\left(\smile BD - \smile EF\right) = \frac{2\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\omega_2 - \omega_1 = \pi.$$

С другой стороны, так как дуги BF, FE, BC, CD и DE составляют в сумме всю окружность, верно равенство

$2\omega_1 + 3\omega_2 = 2\pi$. Из этих двух равенств находим $\omega_1 = \frac{\pi}{7}$. Но угловая величина дуги равна также и величине центрального угла, который определяет на окружности эту дугу. Поэтому $\angle BOF = \frac{\pi}{7}$, а так как треугольник BOF равнобедренный, то

$$\angle ABO = \angle FBO = \frac{\pi - \angle BOF}{2} = \frac{3\pi}{7}.$$

Ответ: $3\pi/7$.

Пример 5. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, параллельная AC. Окружность, проходящая через точки M, N и C, касается стороны AB, а ее радиус равен $R = \sqrt{2}$. Найти синус угла ACB, если $AC = 2$.

Решение. Так как угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла, то $\angle BMN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MN}$ (рисунок 55).

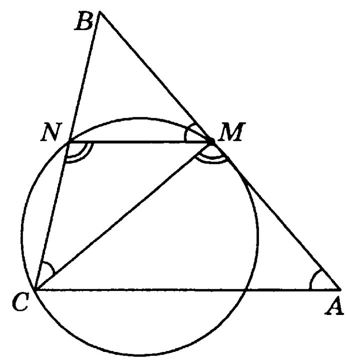


Рис. 55

Поскольку величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, то $\angle NCM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MN}$. Следовательно, $\angle BMN = \angle NCM$. Аналогично угол AMC равен углу CNM. Кроме того, так как прямые MN и AC параллельны, то равны углы BAC и BMN. Значит, треугольник AMC подобен треугольнику CNM (по двум углам). Имеем:

$$\frac{AC}{CM} = \frac{CM}{MN} \Leftrightarrow CM^2 = AC \cdot MN = 2 \Rightarrow CM = \sqrt{2}.$$

В силу равенства $\angle ACB = \pi - \angle MNC$ получаем, что $\sin\angle ACB = \sin\angle CNM$. Треугольник CNM вписан в окружность радиуса $R=\sqrt{2}$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$\sin\angle CNM = \frac{CM}{2R} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sin\angle ACB = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 6. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Точка P лежит на его стороне KL, причем $PM \parallel KN$ и $PN \parallel LM$. Найти длины отрезков PK и PL, если $MN = 6$ и $KL = 13$.

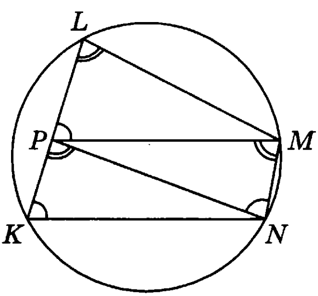


Рис. 56

Решение. Пусть $PK = x$, $PL = y$ (рисунок 56). Так как прямые PM и KN параллельны, то углы PKN и LPM равны. С другой стороны,

$$\angle PKN + \angle NML = 180^\circ$$

и

$$\angle MNP + \angle NML = 180^\circ,$$

откуда $\angle PKN = \angle MNP$. Аналогично $\angle PLM = \angle KPN = \angle NMP$. Треугольники PKN и MNP подобны (по двум углам). Следовательно,

$$\frac{PK}{MN} = \frac{NP}{PM} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{NP}{PM}.$$

Треугольники PLM и NMP также подобны (по двум углам). Это означает, что

$$\frac{PL}{NM} = \frac{MP}{PN} \Leftrightarrow \frac{y}{6} = \frac{MP}{PN}.$$

Перемножив почленно полученные два равенства, находим, что $\frac{xy}{36}=1$, откуда $xy = 36$. Так как при этом $x + y = 13$, то либо $x = 9$, $y = 4$, либо $x = 4$, $y = 9$.

Ответ: $PK = 9$ и $PL = 4$ или $PK = 4$ и $PL = 9$.

Пример 7. В треугольнике ABC имеем $AB = 20$, $AC = 24$. Известно, что вершина C, центр O вписанного в треугольник ABC круга и точка D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Решение. Пусть K — точка пересечения данной окружности со стороной AC (рисунок 57). Обозначим угол C треугольника ABC через γ. Тогда $\angle KCO = \angle COD = \frac{\gamma}{2}$.

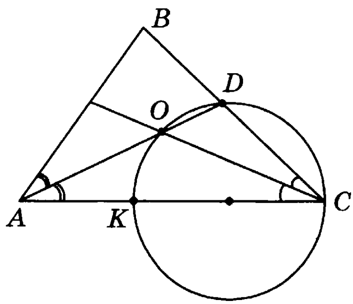


Рис. 57

Отсюда следует, что $\smile{KO} = \smile{OD} = \gamma$ и $\smile{DC} = \pi - 2\gamma$. Поскольку угол, вершина которого находится вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла, имеем:

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\left(\smile{DC} - \smile{KO}\right) = \frac{\pi - 3\gamma}{2} \Rightarrow \angle CAB = \pi - 3\gamma.$$

Значит, $\angle ABC = \pi - \gamma - (\pi - 3\gamma) = 2\gamma$. Применив теперь к треугольнику ABC теорему синусов, получим:

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{\sin\gamma} = \frac{24}{\sin 2\gamma} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin\gamma} = \frac{3}{\sin\gamma\cos\gamma},$$

откуда $\cos\gamma = \frac{3}{5}$ и $\sin\gamma = \frac{4}{5}$.

Таким образом, $R = \frac{AB}{2\sin\gamma} = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

Пример 8. Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB = 42$, $CD = 40$. Найти медиану треугольника ABC, проведенную из вершины C.

Решение. Пусть прямая CD пересекает прямую AB в точке E, причем D лежит между C и E (рисунок 58). Так как квадрат касательной, проведенной из данной точки к окружности, равен произведению секущей, проведенной из той же точки к той же окружности на ее внешнюю часть, имеем: $EA^2 = ED \cdot EC$ и $EB^2 = ED \cdot EC$, откуда $EA = EB = 21$ и CE — медиана треугольника ABC. Пусть $DE = x$, тогда $21^2 = x(x + 40)$, поэтому $x = 9$ и $CE = 49$.

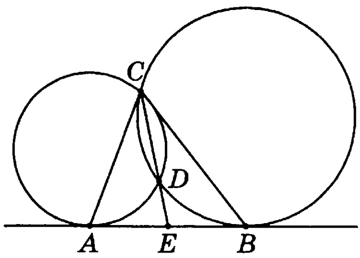


Рис. 58

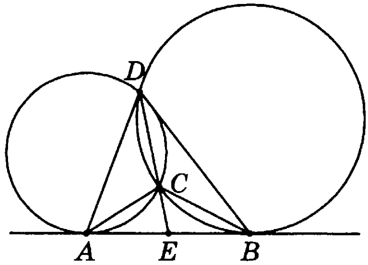


Рис. 59

Если же точка C лежит между точками D и E (рисунок 59), то, повторяя предыдущее решение, находим, что $CE = 9$.

О т в е т: 9 или 49.

Пример 9. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE.

Решение. Проведем через точку A общую касательную к двум окружностям. Пусть эта касательная пересекает прямую BE в точке K (рисунок 60). Пусть L — произвольная точка прямой AK такая, что точка A лежит между K и L. Тогда $\angle ABK = \angle BAK = \frac{1}{2}\smile AB$. Углы BAK и CAL равны как вертикальные. Угол CAL есть угол между касательной и хордой (второй окружности), поэтому $\angle CAL = \frac{1}{2}\smile AC$. В этой же окружности

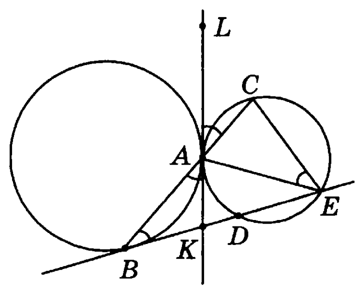


Рис. 60

угол CEA является вписанным, поэтому $\angle CEA = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} = \angle CAL$.

Таким образом, $\angle CBE = \angle CEA$. Треугольники CBE и CEA подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{CA} \Leftrightarrow CE^2 = CA \cdot CB = 36 \Rightarrow CE = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 10. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$.

Решение. Угол BAD является вписанным в первую окружность, поэтому $\angle BAD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD}$ (рисунок 61). Угол CBD есть угол между касательной и хордой (также первой окружности), поэтому $\angle CBD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} = \angle BAD$.

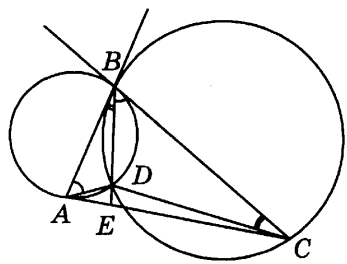


Рис. 61

Аналогично, рассматривая вторую окружность, находим, что $\angle DCB = \angle DBA$. Треугольники BAD и CBD подобны (по двум углам). Из этого подобия, в частности, следует, что равны углы ADB и BDC, поэтому равны углы ADE и EDC, то есть DE — биссектриса треугольника ADC.

Пусть $AD = x$, $CD = y$, $BD = z$. Имеем:

$$\frac{BA}{CB} = \frac{AD}{BD} = \frac{DB}{DC} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{x}{z} = \frac{z}{y} \Rightarrow x = \frac{5}{9}z \quad \text{и} \quad y = \frac{9}{5}z.$$

Тогда согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла получаем, что $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} = \frac{x}{y} = \frac{25}{81}$.

Ответ: 25/81.

Пример 11. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, угол BAD равен $60°$ и $AE = 6$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Пусть $AB = x$, $AD = y$, тогда согласно условию задачи $DE = x + y$ (рисунок 62). Так как в окружности произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны, имеем:

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC \Rightarrow BD = DC = \sqrt{y(x+y)}.$$

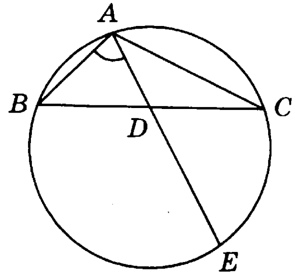


Рис. 62

Применим к треугольнику ABD теорему косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD \Leftrightarrow$$

$$y(x+y) = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2xy \Rightarrow x = 2y.$$

Условие $AE = 6$ дает равенство $x + 2y = 6$. Подставляя в него $x = 2y$, находим $y = \frac{3}{2}$, $x = 3$. Искомая площадь равна

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

О т в е т: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Пример 12. Точка O — центр вписанной в тупоугольный треугольник ABC окружности (угол A — тупой). Продолжение отрезка AO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найти угол A, если $OD = BC$.

Решение. Пусть O_1 — центр описанной около треугольника ABC окружности. Так как AD — биссектриса угла BAC, то D — середина дуги BC (рисунок 63). Следовательно, DO_1 есть серединный перпендикуляр к отрезку BC. Пусть этот перпендикуляр пересекает BC в

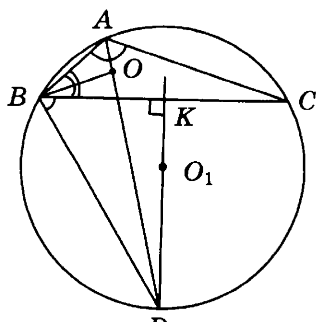


Рис. 63

точке K. Тогда $BK = KC = x$, $OD = 2x$. Докажем, что треугольник BOD — равнобедренный ($BD = OD$).

Обозначим $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ABO = \angle OBC = \beta$. Углы DBC и DAC равны (как вписанные, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу). Следовательно, $\angle OBD = \alpha + \beta$. С другой стороны, $\angle BOD = \alpha + \beta$ как внешний угол треугольника AOB. Это означает, что $\angle OBD = \angle BOD$ и $BD = OD = 2x$. Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник BKD, в котором $BK = x$ и $BD = 2x$. Из этого треугольника находим, что $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то есть $\alpha = 60°$, и $\angle BAC = 2\alpha = 120°$.

Ответ: 120°.

Пример 13. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

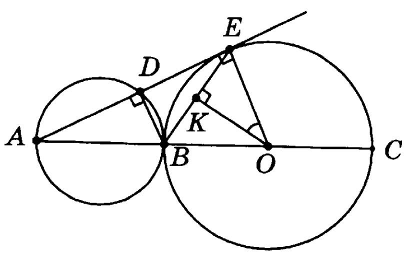


Рис. 64

Решение. Пусть сначала B лежит между A и C. Обозначим центр второй окружности через O, радиусы первой и второй окружностей соответственно через R_1 и R_2 (рисунок 64). Углы ADB и AEO — прямые, и $DB \parallel EO$. Проведем серединный перпендикуляр OK к отрезку BE. Тогда $BK = KE = 6$. Угол DEB как угол между касательной и хордой равен половине дуги BE второй окружности. Угол KOE также равен половине этой дуги. Следовательно, $\angle DEB = \angle KOE$ и треугольники DEB и KOE подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{EB}{OE} = \frac{BD}{EK} \Leftrightarrow \frac{12}{R_2} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow R_2 = 8.$$

Заметим, что этот случай невозможен, так как из геометрических соображений ясно, что должно выполняться неравенство $EO > DB$ $(R_2 > 9)$.

Рассмотрим теперь случай, когда C лежит между A и B (рисунок 65). Так же как и в первом случае находим, что $R_2 = 8$. Треугольники ADB и AEO подобны (по двум углам). Имеем:

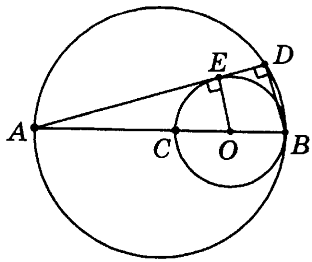


Рис. 65

$$\frac{DB}{EO} = \frac{BA}{OA} \Leftrightarrow \frac{9}{8} = \frac{2R_1}{2R_1 - 8} \Leftrightarrow R_1 = 36.$$

Наконец, точка A не может лежать между B и C, так как в этом случае через точку A нельзя провести прямую, касающуюся второй окружности.

Ответ: $R_1 = 36$, $R_2 = 8$.

Пример 14. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что AC — биссектриса угла BAD, $BC = CD$, $\angle BCD = 160°$, а $\angle CED = 130°$. Найти угол ABD.

Решение. Применим к треугольникам ABC и ADC теорему синусов (рисунок 66):

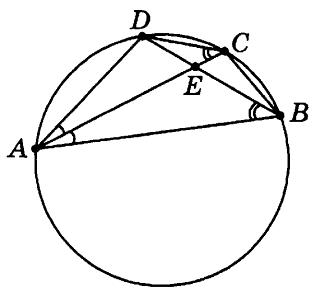


Рис. 66

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AC}{\sin\angle ABC};$$

$$\frac{DC}{\sin\angle DAC} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}.$$

Поскольку $BC = CD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, то $\sin\angle ABC = \sin\angle ADC$, поэтому углы ABC и ADC либо равны, либо составляют в сумме $180°$. Заметим, что если $\angle ABC = \angle ADC$, то равны также углы ACB и ACD и равны треугольники ABC и ADC (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, эти треугольники симметричны относительно прямой AC, что противоречит условию $\angle CED = 130°$. Следовательно, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Это означает, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Угол ABD равен углу ACD (как опирающиеся на одну и ту же дугу). Найдем величину этого угла. Треугольник BCD — равнобедренный с углом при вершине 160°, следовательно, угол при основании этого треугольника $\angle CDB = 10°$. Применив теперь теорему о сумме углов треугольника к треугольнику CED, получим:

$$\angle ECD = 180° - \angle CED - \angle CDE = 180° - 130° - 10° = 40°.$$

Значит, и угол ABD равен 40°.

Ответ: 40°.

Пример 15. Окружность радиуса 6 проходит через вершину B треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Центр O окружности лежит на стороне AC, при этом $AO = 10$, $CO = 12$, $EF \parallel AC$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Пусть K и M — точки пересечения прямой BO с прямой EF и окружностью соответственно (рисунок 67). Треугольники EBF и ABC подобны, поэтому соответствующие элементы этих треугольников пропорциональны. Имеем:

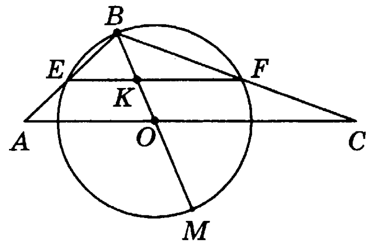


Рис. 67

$$KE : KB : KF = OA : OB : OC = 5 : 3 : 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KE = 5x, KB = 3x, KF = 6x.$$

Тогда $KM = 12 - 3x$. Так как в окружности произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны, имеем:

$$KE \cdot KF = KB \cdot KM \Leftrightarrow 5x \cdot 6x = 3x \cdot (12 - 3x) \Leftrightarrow x = \frac{12}{13}.$$

Таким образом, коэффициент подобия двух указанных треугольников равен $k = \frac{KE}{OA} = \frac{5x}{10} = \frac{6}{13}$. Значит, если радиус окружности, описанной около треугольника EBF, равен 6, то радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13.

Ответ: 13.

Задачи для самостоятельного решения

1. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найти длину отрезка BC, если длина каждой из хорд AC и DC равна 1.

2. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC. Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол $15°$. Найти углы треугольника ABC.

4. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

5. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.

7. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB, параллельная диаметру MN. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найти MN.

8. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найти DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45°$.

9. В окружности проведены две хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку A, параллельна BD. Известно, что $CD : ED = 3 : 2$ и $S_{\Delta ABE} = 8$. Найти площадь треугольника ABC.

10. В треугольнике ABC известно, что длина AB равна 3, $\angle ACB = \arcsin\frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. При этом $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а длина LM равна 1. Найти высоту треугольника KNC, опущенную из вершины C, и его площадь.

11. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, $AC : AB = 3 : 2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB. Найти косинус угла ACB.

12. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F — середина стороны AB, а точка G — точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к данной окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найти угол BCA, если известно, что $FH : HE = 2 : 3$.

13. На отрезке AB взята точка C и на отрезках AB и CB как на диаметрах построены окружности. Хорда AM большей окружности касается меньшей окружности в точке D. Прямая BD пересекает большую окружность в точке N. Известно, что $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найти площадь четырехугольника $ABMN$.

14. На сторонах острого угла ABC взяты точки A и C. Одна окружность касается прямой AB в точке B и проходит через точку C. Вторая окружность касается прямой BC в точке B и проходит через точку A. Точка D — вторая общая точка окружностей. Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$. Найти AD.

15. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и

D и касается прямой AB в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, а $BC = 3$.

16. Вокруг четырехугольника $ABCD$ описана окружность с центром в точке O. Известно, что диагонали AC и BD четырехугольника перпендикулярны, $AB = 4$, $DC = 5$. Какие значения может принимать площадь треугольника AOB?

17. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L, которая делит хорду в отношении $AL : BL = 2 : 3$. Найти AK, если $BK = 12$.

18. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найти длину отрезка AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

19. В треугольнике KLM радиус описанной окружности равен R, величина угла LKM равна α, точка O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около треугольника KLM, в точке N. Найти длину отрезка ON.

20. На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S так, что $PQ = PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, причем $RQ = q$, $RS = s$, $RT = t$. Найти PT.

21. Медианы AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке D. Найти длину отрезка AB, если $CD = \sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырехугольника $PCQD$ можно описать окружность.

22. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BL пересекаются в точке F. Величина угла LFA равна $60°$. Найти величину угла ACB. Вычислить площадь треугольника ABC, если $\angle CLD = 45°$ и $AB = 2$.

23. Две окружности пересекаются в точках P и Q. На первой окружности выбрана точка A, а на второй — точки B и C так, что отрезки AB и AC содержат точки P и Q соответственно. Точка X лежит на продолжении отрезка CB за точку B. Отрезок AX пересекает первую окружность в точке Y. Найти AY, если известно, что $AX = a$, $AQ = b$, $AC = c$.

24. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найти AD, если $AB = 15$, $AC = 20$ и $AE = 24$.

25. Треугольник ABC со стороной $AB = 4$ и углом $\angle A = 60°$ вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найти среднюю линию этого треугольника, параллельную AC, и расстояние между точками, в которых ее продолжение пересекает окружность.

26. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC, касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $AB : BC = 3 : 2$. Найти отношение площади треугольника AMD к площади треугольника DNC.

27. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 4\sqrt{3}$ радиус вписанной окружности равен 3. Прямая AE пересекает высоту BD в точке E, а вписанную окружность — в точках M и N (M между A и E). Найти длину отрезка EN, если $ED = 2$.

28. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB соответственно в точках L и K, отличных от вершины A. Найти отношение $AC : AB$, если известно, что длина отрезка LC в два раза больше длины отрезка KB, а отношение $CM : BM = 3 : 2$.

§ 7. КАСАНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ, КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько задач, связанных с касанием окружностей, а также касанием прямой и окружности. Сформулируем несколько утверждений. Первые четыре из них описывают геометрическую конфигурацию, последние три часто применяются при решении задач данного типа.

Теорема 1. Если две окружности касаются внешним образом, то центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, а расстояние между центрами равно сумме радиусов этих окружностей.

Теорема 2. Если две окружности касаются внутренним образом, то центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, а расстояние между центрами равно модулю разности радиусов этих окружностей.

Теорема 3. Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой.

Теорема 4. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Теорема 5. В любом описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

Теорема 6. В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, есть разность полупериметра треугольника и стороны, противолежащей данной вершине.

Теорема 7. В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности (касающейся противоположной данной вершине стороны треугольника и продолжений двух других его сторон) с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, есть полупериметр треугольника.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

Решение. Пусть Q — центр второй окружности, r — ее радиус, T, L, N — точки касания второй окружности с дугой MK и отрезками AK и AM соответственно (рисунок 68). Из прямоугольного треугольника AKO находим, что

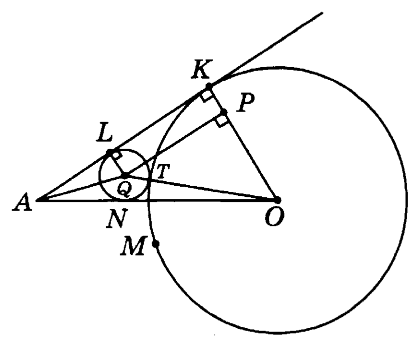


Рис. 67

$$AK = KO \cdot \operatorname{ctg}\angle KAO = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим прямоугольную трапецию $OKLQ$ и проведем в ней высоту QP. Применим к треугольнику OPQ теорему Пифагора:

$$KL = PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{(2+r)^2 - (2-r)^2} = 2\sqrt{2r}.$$

Тогда $AL = AK - KL = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2r}$. С другой стороны, рассматривая прямоугольный треугольник ALQ, находим, что $AL = LQ \cdot \operatorname{ctg}\angle LAQ = r\sqrt{3}$. Имеем уравнение

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2r} = r\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{2r} = \frac{2}{\sqrt{3}} - r\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \le \frac{2}{3}, \\ 9r^2 - 36r + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{6-4\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$.

Пример 2. Две окружности, радиусы которых относятся как $(9-4\sqrt{3})$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две хорды большей окружности, равные по длине и касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найти угол между этими хордами.

Решение. Можно считать, что радиусы окружностей равны $r = 1$ и $R = 9-4\sqrt{3}$; заметим, что $R > 2r$. Пусть O_1 — центр большей окружности, O_2 — центр меньшей окружности, A — точка касания меньшей окружности и хорды, перпендикулярной отрезку, соединяющему центры окружностей. Пусть B — середина второй хорды (при этом отрезок O_1B перпендикулярен этой хорде), C — точка ее касания с меньшей окружностью (рисунок 69).

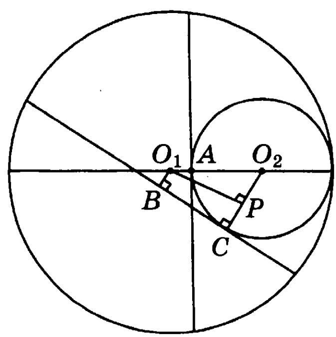


Рис. 69

Так как построенные хорды равны, то равны расстояния от центра O_1 большей окружности до этих хорд:

$$O_1B = O_1A = R - 2r = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Рассмотрим четырехугольник BCO_2O_1, это прямоугольная трапеция с основаниями $CO_2 = 1$, $O_1B = 7 - 4\sqrt{3}$, боковой стороной $O_1O_2 = R - r = 8 - 4\sqrt{3}$. Опустим перпендикуляр O_1P из точки O_1 на O_2C, тогда

$$O_2P = O_2C - CP = O_2C - O_1B = 4\sqrt{3} - 6.$$

Из треугольника O_1O_2P находим, что

$$\cos\angle PO_2O_1 = \frac{O_2P}{O_1O_2} = \frac{4\sqrt{3}-6}{8-4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит, угол PO_2O_1 равен 30°. Остается заметить, что угол между хордами равен углу PO_2O_1 между перпендикулярами к этим хордам.

Ответ: 30°.

Пример 3. В угол с вершиной A величиной в 60° вписана окружность с центром в точке O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AM : MO = 2 : 3$ и $BC = 7$.

Решение. Пусть K и L — точки касания данной окружности с прямыми AB и BC соответственно, AH — высота треугольника ABC (рисунок 70). Пусть также $AH = h$, радиус данной окружности равен R; p — полупериметр треугольника ABC, r — радиус вписанной в него окружности. Треугольники AHM и OLM подобны, откуда

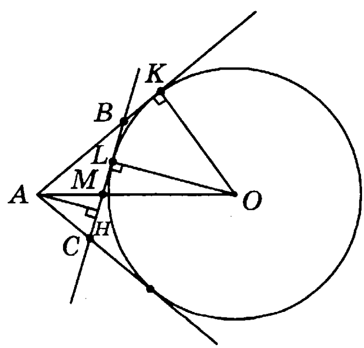


Рис. 70

$$\frac{AH}{OL} = \frac{MA}{MO} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow R = \frac{3h}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике AKO согласно теореме 7 находим, что $AK = p$, поэтому

$$R = OK = AK \cdot \operatorname{tg}\angle KAO = p\operatorname{tg}30^\circ = \frac{p}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $\dfrac{3h}{2} = \dfrac{p}{\sqrt{3}}$, откуда $\dfrac{h}{p} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Выразим теперь двумя способами площадь треугольника ABC. Имеем:

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot h = pr \Leftrightarrow \frac{7h}{2} = pr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{7}{2} \cdot \frac{h}{p} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{3\sqrt{3}}$.

Пример 4. Дан равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной, равной 4, и углом $\angle ABC = 120^\circ$. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найти радиусы окружностей.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда обе окружности касаются основания треугольника. Проведем высоту BH треугольника ABC. Тогда одна из окружностей будет вписана в треугольник ABH (рисунок 71). В этом треугольнике имеем $AB = 4$, $BH = 2$, $AH = 2\sqrt{3}$. Согласно теореме 6 параграфа 1 находим, что

$$r = \frac{AH + BH - AB}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

Пусть теперь обе окружности касаются, например, стороны AB. Обозначим центры этих окружностей через O_1 и O_2 (O_2 лежит на высоте BH треугольника ABC), а точки касания окружностей с прямой AB соответственно через K и L (рисунок 72). Пусть также радиус каждой из окружностей равен r. Тогда $KL = O_1O_2 = 2r$. Из прямоугольного треугольника AKO_1 находим:

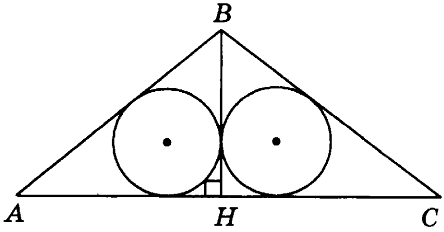


Рис. 71

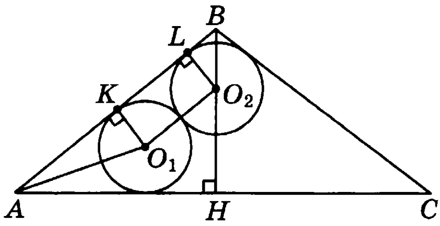


Рис. 72

$$AK = \frac{KO_1}{\operatorname{tg}\angle KAO_1} = \frac{r}{\operatorname{tg}15^\circ} = r\cdot\frac{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}45^\circ} = r\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = r(2+\sqrt{3}).$$

Из прямоугольного треугольника BO_2L получаем:

$$LB = \frac{LO_2}{\operatorname{tg}\angle LBO_2} = \frac{r}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Имеем:

$$AB = AK + KL + LB \Leftrightarrow 4 = r(2+\sqrt{3}) + 2r + \frac{r}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3}-1$ или $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Пример 5. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок прямой, заключенный внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно 5/6.

Решение. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник ($AB = BC = 5x$, $AC = 6x$), KL — данная прямая, $KL \perp BC$, K лежит на AB, L лежит на BC (рисунок 73). Из треугольника ABC найдем косинус угла B. Имеем:

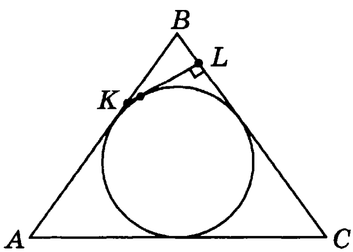


Рис. 73

$$\cos\angle B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{25x^2+25x^2-36x^2}{2\cdot 5x\cdot 5x}=\frac{7}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle B=\frac{24}{25} \text{ и } \operatorname{tg}\angle B=\frac{7}{24}.$$

Из прямоугольного треугольника KBL ($KL = 6$) получаем: $KB=\frac{KL}{\sin\angle B}=\frac{25}{4}$ и $BL=\frac{KL}{\operatorname{tg}\angle B}=\frac{7}{4}$. Тогда

$$AK = AB - KB = 5x-\frac{25}{4} \text{ и } LC=BC-BL=5x-\frac{7}{4}.$$

Так как четырехугольник $AKLC$ описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны. Имеем:

$$AK+LC=AC+KL\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(5x-\frac{25}{4}\right)+\left(5x-\frac{7}{4}\right)=6x+6\Leftrightarrow x=3{,}5.$$

Таким образом, стороны треугольника ABC равны $AB = BC = 17{,}5$ и $AC = 21$. Заметим, что данная окружность вписана в треугольник ABC. Найдем ее радиус. Имеем (обозначения стандартные):

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-17{,}5)^2(p-21)}}{p}=(p=28)=\frac{10{,}5\cdot 14}{28}=\frac{21}{4}.$$

Пусть теперь дан треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5x$ и $AC = 6x$, прямая KL перпендикулярна прямой BC, $K \in AC$, $L \in BC$ (рисунок 74). Аналогично первому случаю находим, что $\cos\angle C=\frac{3}{5}$, $\sin\angle C=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\angle C=\frac{4}{3}$. Из прямоугольного треугольника KLC получаем, что $KC = 7{,}5$; $LC = 4{,}5$; откуда $AK = 6x - 7{,}5$ и $BL = 5x - 4{,}5$. Имеем далее:

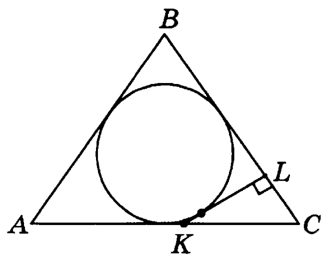


Рис. 74

$$AK+BL=AB+KL\Leftrightarrow\ 6x-7{,}5+5x-4{,}5=5x+6\Leftrightarrow x=3.$$

Значит, стороны треугольника ABC равны $AB = BC = 15$, $AC = 18$, а радиус вписанной в этот треугольник окружности равен

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-15)^2(p-18)}}{p}=(p=24)=\frac{9\cdot 12}{24}=\frac{9}{2}.$$

Ответ: 21/4 или 9/2.

Пример 6. На диаметре AB окружности радиуса 3 с центром в точке O выбрана точка C так, что $AC = 5$. Через точку C проведена хорда DE, перпендикулярная диаметру AB. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AC, CE и дуги AE.

Решение. Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r касается отрезков AC, CE и дуги AE в точках K, L и M соответственно (рисунок 75). Тогда точки O, O_1 и M лежат на одной прямой и $OO_1 = OM - O_1M = 3 - r$. Четырехугольник O_1KCL — квадрат со стороной r, поэтому $OK = |OC - KC| = |2 - r|$ (модуль ставится, так как мы не знаем, лежит ли точка K между точками O и C или нет). Рассмотрим прямоугольный треугольник OKO_1. Имеем:

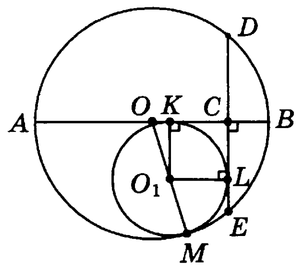


Рис. 75

$$OO_1^2=OK^2+KO_1^2 \Leftrightarrow (3-r)^2=|2-r|^2+r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2+2r-5=0 \Rightarrow r=\sqrt{6}-1.$$

Ответ: $\sqrt{6}-1$.

Пример 7. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}$, длина стороны BC равна $\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO в три раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Так как BO — биссектриса угла ABC, то углы MBO и OBC равны. С другой стороны, $\angle OBC = \angle BOM$ (как накрест лежащие). Следовательно, $\angle MBO = \angle BOM$, треугольник MBO — равнобедренный, $MB = MO$ (рисунок 76). Аналогично $NC = NO$. Это означает, что периметр треугольника AMN равен $AB + AC$. Таким образом, периметр треугольника ABC равен $4\sqrt[4]{2}$, а его полупериметр равен $p = 2\sqrt[4]{2}$.

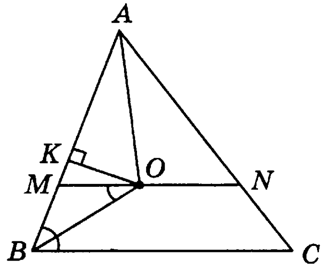


Рис. 76

Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Согласно теореме 6 находим, что $AK = p - BC = \sqrt[4]{2}$. Пусть также r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Тогда $OK = r$ и $AO = 3r$. Это означает, что $AK = 2\sqrt{2}r$. Имеем: $2\sqrt{2}r = \sqrt[4]{2}$, откуда $r = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$. Таким образом, площадь треугольника ABC равна $S = pr = 2\sqrt[4]{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 8. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d ($c < d$).

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AB и CD — ее боковые стороны, $AB = c$, $BC = b$, $CD = d$, $AD = a$ ($a > b$). Пусть также PQ — данная прямая, $P \in AB$, $Q \in CD$. Обозначим центры окружностей, вписанных в трапеции $APQD$ и $PBCQ$ через O_1 и O_2, а их радиусы через R_1 и R_2 соответственно. Точки касания окружности с центром O_1 с отрезками AP, PQ, QD, AD обозначим соответственно через E,

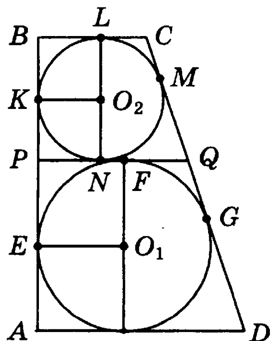


Рис. 77

F, G, H, а точки касания окружности с центром O_2 с отрезками PB, BC, CQ, PQ соответственно через K, L, M, N (рисунок 77). Докажем, что $CD = AD + BC$.

Так как прямые AB и CD есть общие внешние касательные к данным окружностям, то $EK = GM$. Четырехугольники $EPFO_1$ и PKO_2N есть квадраты, поэтому $EP = R_1$, $PK = R_2$ и $EK = R_1 + R_2$. С другой стороны, AEO_1H и $KBLO_2$ — также квадраты, поэтому $AH = R_1$ и $BL = R_2$. Отметим еще равенство касательных, проведенных к окружности из одной точки: $DH = DG$ и $CL = CM$. Окончательно получаем:

$$CD = CM + DG + GM =$$
$$= CM + DG + EK = CM + DG + R_1 + R_2,$$

$$AD + BC = AH + DH + BL + CL =$$
$$= CL + DH + R_1 + R_2,$$

поэтому $CD = AD + BC$, что и требовалось доказать.

Итак, $d = a + b$. Легко показать, что $c^2 + (a - b)^2 = d^2$. Для этого достаточно опустить из точки C высоту CR и рассмотреть прямоугольный треугольник CDR (рисунок 78). Из двух полученных равенств находим, что

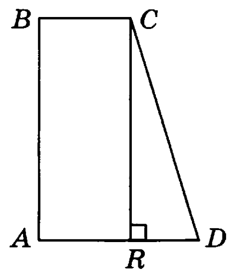


Рис. 78

$$a = \frac{1}{2}(d + \sqrt{d^2 - c^2}),$$

а

$$b = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - c^2}).$$

Ответ: $\frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 - c^2})$.

Задачи для самостоятельного решения

1. На отрезке AB длины $2R$ как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, что и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой внутренним образом, второй — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

2. Круг радиуса 6 лежит внутри полукруга радиуса 24 и касается середины диаметра полукруга. Найти радиус меньшей окружности, касающейся заданных круга, полукруга и диаметра полукруга.

3. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем угол CDA равен $2\pi/3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $OC = 2$ и $OD = \sqrt{3}$.

4. В четырехугольнике $ABCD$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон AB, BC и CD, а другая — сторон AB, AD и CD. Прямая MN пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и N и касается обеих окружностей. Найти расстояние между центрами окружностей, если периметр четырехугольника $MBCN$ равен $2p$, сторона BC равна a и разность радиусов окружностей равна r.

5. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l. В треугольник ABL вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K, причем $BK = b$. На сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно выбраны точки M и N так, что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, причем $MB + BN = c$. Найти отношение площадей треугольников ABL и MBN.

6. Две окружности радиусов $\sqrt{19}$ и $\sqrt{76}$, касающиеся друг друга внешним образом, вписаны в полуокружность. Вычислить радиус полуокружности.

7. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой прямой взята точка B так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найти ON.

8. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 15$, $BC = 8$ и $AC = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BC : DC = 3 : 8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найти длину отрезка EF.

9. В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : CB =$

$= 1 : 2$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

10. Даны две окружности. Первая окружность вписана в треугольник ABC, вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC. Известно, что эти окружности касаются друг друга, произведение их радиусов равно 20, а угол BAC равен $\arccos\frac{2}{3}$. Найти периметр треугольника ABC.

11. Окружность проходит через вершину B угла $\angle ABC = \alpha$ и отсекает на его сторонах равные отрезки BA и BC. Другая окружность касается отрезков BA и BC в точках M и N соответственно, а также касается первой окружности. Найти отношение $MN : AC$.

12. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B. Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA, луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O. Известно, что $ON : OM = 12 : 13$. Найти отношение радиусов этих окружностей.

13. В равнобедренной трапеции с основаниями 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найти площадь трапеции.

§ 8. ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

В данном параграфе приведем несколько формул, позволяющих вычислять длину окружности и ее дуги, а также площадь круга, площадь кругового сектора и кругового сегмента. Напомним, что *сектором* называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, а *сегментом* — часть круга, ограниченная некоторой прямой и дугой окружности. Угловой величиной сектора или сегмента называется угловая величина дуги, ограничивающая этот сектор (сегмент). Все углы измеряются в радианах.

Теорема 1. Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Теорема 2. Длина дуги угловой величины α окружности радиуса R равна αR.

Теорема 3. Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Теорема 4. Площадь сектора угловой величины α круга радиуса R равна $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

Теорема 5. Площадь сегмента угловой величины α круга радиуса R равна $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Полуокружность радиуса R разделена точками на три равные части, и точки деления соединены хордами с одним и тем же концом диаметра, стягивающего эту полуокружность. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя хордами и заключенной между ними дугой.

Решение. Пусть O — центр полуокружности, AB — ее диаметр, C и D — точки деления (C на окружности между A и D). Надо найти площадь фигуры, ограниченной хордами AC и AD и дугой CD (рисунок 79). Так как площади треугольников ACD и OCD равны (они имеют одно и то же основание и равные высоты), то площадь искомой фигуры равна площади кругового сектора, ограниченного радиусами OC и OD и дугой CD. Поскольку угловая величина дуги CD равна $\alpha = \frac{\pi}{3}$, площадь этого сектора равна

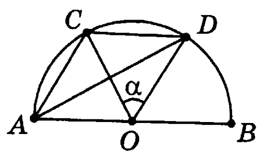


Рис. 79

$$S = \frac{1}{2}\alpha R^2 = \frac{\pi R^2}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^2}{6}$.

Пример 2. В окружность вписан треугольник со сторонами 7, 24 и 25. Вычислить площадь кругового сегмента, стянутого хордой длины 7.

Решение. Обозначим через ABC данный треугольник таким образом, что $AB = 24$, $BC = 7$, $AC = 25$. Так как верно равенство $7^2 + 24^2 = 25^2$, то треугольник ABC — прямоугольный (угол B — прямой), центр O окружности, описанной около этого треугольника, является серединой гипотенузы AC, а радиус этой окружности равен 12,5 (рисунок 80). Пусть $\angle BAC = \alpha$. Из треугольника ABC получаем, что $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \frac{24}{25}$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{336}{625}$.

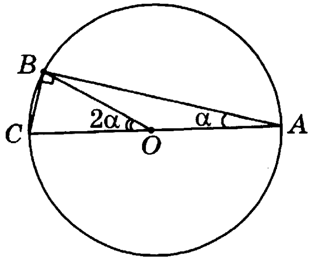


Рис. 80

Значит, $\alpha = \arcsin\frac{7}{25}$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$ и площадь сегмента окружности, стянутого хордой BC, равна

$$S = \frac{R^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{2} = \frac{12{,}5^2 \cdot (2\arcsin\frac{7}{25} - \frac{336}{625})}{2} =$$

$$= \frac{625}{4}\arcsin\frac{7}{25} - 42.$$

Ответ: $\frac{625}{4}\arcsin\frac{7}{25} - 42$.

Пример 3. В равнобедренном треугольнике ABC угол между равными сторонами AB и AC равен $\pi/4$. Из вершин треугольника ABC на его стороны опущены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность Ω, а через точки B, A_1 и C_1 — окружность Ω_1. Найти отношение площади круга, ограниченного окружностью Ω, к площади общей части кругов, ограниченных окружностями Ω и Ω_1.

Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, точки O и O_1 — центры окружностей Ω и Ω_1 соответственно, R и R_1 — их радиусы. Рассмотрим четырехугольник AC_1HB_1. Так как его противолежащие углы AC_1H и AB_1H равны $\pi/2$ каждый, то окружность Ω является описанной около этого четырехугольника, а ее центр O есть середина отрезка AH (рисунок 81). Аналогично окружность Ω_1 описана около четырехугольника BA_1HC_1, а ее центр O_1 есть середина отрезка BH. Пусть $R=1$, тогда $AH=2$, $C_1H = AH \cdot \sin\angle C_1AH = 2\sin\frac{\pi}{8}$.

Так как угол AB_1B прямой, то угол ABB_1 равен $\pi/4$ и

$$BH = \frac{C_1H}{\sin\angle C_1BH} = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}.$$

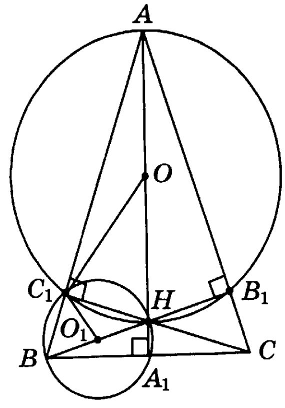


Рис. 81

Общая часть кругов Ω и Ω_1 есть объединение двух пересекающихся по отрезку C_1H сегментов круга Ω и круга Ω_1. Вычислим отдельно площадь каждого из этих сегментов. Дуга C_1H сегмента круга Ω имеет угловую величину $\alpha = \angle HOC_1 = 2\angle HAC_1 = \frac{\pi}{4}$, поэтому площадь этого сегмента равна $S = \frac{R^2(\alpha - \sin\alpha)}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Дуга C_1H сегмента круга Ω_1 имеет угловую величину $\alpha_1 = \angle HO_1C_1 = 2\angle HBC_1 = \frac{\pi}{2}$, поэтому площадь этого сегмента равна

$$S_1 = \frac{R_1^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1)}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{8}(\frac{\pi}{2}-1)}{2} =$$

$$= \frac{(1-\cos\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-1)}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})(\pi-2)}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S + S_1 = \frac{\pi(3-\sqrt{2})-4}{8}.$$

Искомое отношение равно

$$\lambda = \frac{\pi R^2}{S+S_1} = \frac{8\pi}{\pi(3-\sqrt{2})-4}.$$

Ответ: $\frac{8\pi}{\pi(3-\sqrt{2})-4}$.

Пример 4. Вне прямого угла с вершиной C, на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC=\sqrt{2}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 2. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

Решение. Пусть K и M — точки пересечения окружности со сторонами угла. Разобьем фигуру, площадь которой надо найти, на сегмент, ограниченный дугой MK и отрезком MK, и треугольник CMK. Найдем площади S_1 и S_2 этих частей (рисунок 82). Сначала вычислим площадь сегмента. Рассмотрим треугольник OCK, в нем $OC=\sqrt{2}$, $OK = 2$, $\angle OCK=\frac{3\pi}{4}$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

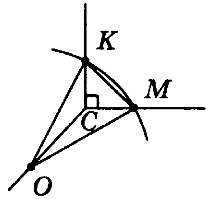


Рис. 82

$$\frac{OK}{\sin\angle OCK}=\frac{OC}{\sin\angle CKO}\Leftrightarrow \sin\angle CKO=\frac{1}{2}\Rightarrow \angle CKO=\frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, $\angle COK=\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ и $\angle MOK=\frac{\pi}{6}$. Тогда площадь сегмента равна $S_1=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}-1$.

Вычислим теперь площадь треугольника CMK. Применив снова к треугольнику OCK теорему синусов, получим:

$$\frac{CK}{\sin\angle COK}=\frac{OK}{\sin\angle OCK}\Rightarrow CK=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Значит, площадь треугольника CMK равна

$$S_2=S_{CMK}=\frac{CK^2}{2}=4\sin^2\frac{\pi}{12}=2-2\cos\frac{\pi}{6}=2-\sqrt{3}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{3}-1+2-\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$.

Пример 5. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\pi/6$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

Решение. Можно считать, что радиус окружности равен $R = 1$. Тогда площадь круга равна $S_1 = \pi$. Найдем площадь части круга, заключенной внутри данного угла. Эта площадь равна разности площадей круга и двух его сегментов, стягиваемых хордами AB и AC. Пусть O — центр окружности (рисунок 83). Так как $AB = AC$, то эти сегменты равны (а значит, имеют одинаковую площадь). Кроме того, равны также треугольники AOB и AOC, а значит, углы BAO и OAC. Найдем площадь сегмента, стягиваемого хордой AB. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle ABO = \angle BAO = \frac{\pi}{12}$, откуда $\angle AOB = \alpha = \frac{5\pi}{6}$. Площадь сегмента, стягиваемого хордой AB, равна

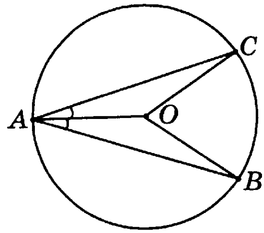


Рис. 83

$$S_2 = \frac{R^2}{2}\cdot(\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi - 3}{12}.$$

Поэтому площадь части круга, заключенной внутри данного угла, равна

$$S = S_1 - 2S_2 = \pi - 2\cdot\frac{5\pi - 3}{12} = \frac{\pi + 3}{6} \Leftrightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{\pi + 3}{6\pi}.$$

Ответ: $\frac{\pi + 3}{6\pi}$.

Пример 6. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi/6$. Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

Решение. Пусть B — вершина тупого угла равнобедренного треугольника ABC, AD — медиана, проведенная к боковой стороне этого треугольника, BH — высота, опущенная на основание. Пусть $AB = BC = 2x$ (рисунок 84). Так как $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, то из прямоугольного треугольника ABH находим, что $AH = x\sqrt{3}$, и, следовательно, $AC = 2x\sqrt{3}$. Применим к треугольнику ABC формулу для вычисления медианы треугольника:

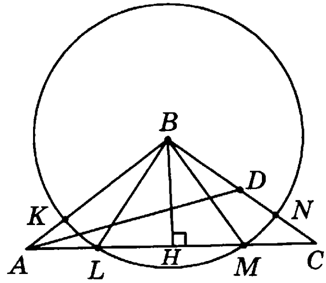


Рис. 84

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Итак, $AB = BC = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$. Высота BH треугольника ABC равна $h = AB \cdot \sin\angle BAC = 1$, поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \sqrt{3}.$$

Кроме того, из неравенств $h = 1 < R = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2 = AB$ вытекает, что данная окружность пересекает боковые стороны AB и BC треугольника ABC каждую ровно в одной точке, а основание AC — ровно в двух точках. Пусть K, N — точки пересечения окружности соответственно со сторонами AB и BC; L и M — точки пересечения окружности со стороной AC (L между A и H). Рассматривая равнобедренный треугольник BLM ($BL = BM = R$), находим, что

$$LM = 2LH = 2\sqrt{BL^2 - BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

т.е. треугольник BLM — равносторонний. Его площадь равна $S_{\Delta BLM} = \frac{1}{2} BH \cdot LM = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Далее $\angle LBM = \frac{\pi}{3}$ и поэтому

$$\angle KBL = \angle MBN = \frac{\angle ABC - \angle LBM}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Площадь каждого из секторов KBL, MBN равна $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{9}$. Поэтому площадь общей части треугольника ABC и круга равна

$$S_{\Delta BLM}+2S=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{9}=\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{9}.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{9}:\sqrt{3}=\frac{9+2\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Ответ: $\frac{9+2\sqrt{3}\pi}{27}$.

Пример 7. В круге радиуса 1 проведены хорды $AB=\sqrt{2}$ и $BC=\frac{10}{7}$. Найти площадь части круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый.

Решение. Пусть O — центр круга. Выясним сначала взаимное расположение точек A, B, C, O. Предположим, что точки A и O лежат по разные стороны прямой BC (рисунок 85). Тогда $\angle BAC=\pi-\frac{\angle BOC}{2}>\frac{\pi}{2}$, что противоречит условию.

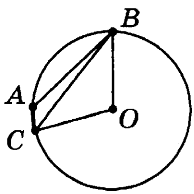


Рис. 85

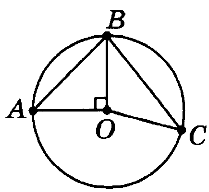


Рис. 86

Итак, точки A и O лежат по одну сторону прямой BC, значит, искомая площадь есть сумма площадей треугольников ABO, BCO и сектора AOC (рисунок 86). Рассмотрим треугольник ABO. Так как $AB^2=AO^2+BO^2$, то $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ и, значит, $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}AO^2=\frac{1}{2}$. Рассмотрим треугольник BCO. Легко видеть, что $\angle BOC=2\arcsin\frac{5}{7}$, откуда

$$\sin\angle BOC=\sin\left(2\arcsin\frac{5}{7}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{5}{7}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{7}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{5}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{49}}=\frac{20\sqrt{6}}{49}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCO}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin\angle BOC=\frac{10\sqrt{6}}{49}.$$

Далее найдем площадь сектора AOC. Угол AOC равен

$$\alpha=\angle AOC=2\pi-\angle AOB-\angle BOC=\frac{3\pi}{2}-2\arcsin\frac{5}{7},$$

поэтому площадь сектора AOC равна

$$S_{AOC}=\frac{1}{2}\cdot r^2\alpha=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{5}{7}.$$

Получаем, что искомая площадь равна

$$S=S_{\Delta ABO}+S_{\Delta BCO}+S_{AOC}=\frac{1}{2}+\frac{10\sqrt{6}}{49}+\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{5}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{10\sqrt{6}}{49}+\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{5}{7}.$

Пример 8. Найти периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}y>||x-2|-1|,\\ x^2+y^2<4x+2y-3.\end{cases}$$

Решение. График функции $y=||x-2|-1|$ рисуем как преобразование графика функции $y=|x|$: сдвиг на две единицы вправо, сдвиг на одну единицу вниз, симметрия части графика, лежащей ниже оси Ox, относительно этой оси (рисунок 87). Множество точек $(x,\ y)$ координатной плоскости, которые удовлетворяют первому неравенству системы, есть множество точек, лежащих выше постро-

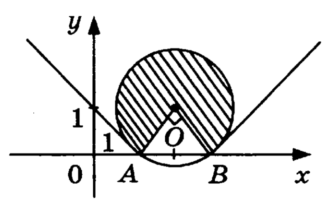


Рис. 87

енного графика. Второе неравенство системы преобразуем следующим образом:

$$x^2+y^2<4x+2y-3 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2<2.$$

Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, есть внутренность круга с центром $O(2,1)$ радиуса $\sqrt{2}$. Таким образом, искомая фигура представляет собой круговой сектор с центром $O(2,1)$ радиуса $\sqrt{2}$, ограниченный радиусами OA и OB и большей дугой AB окружности, где точки A и B имеют координаты $A(1,0)$, $B(3,0)$. Треугольник AOB — прямоугольный, поэтому угловая величина этого сектора равна $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$. Согласно теореме 1 длина большей дуги AB равна $l=\alpha R=\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{2}$, длины отрезков OA и OB равны между собой и равны $\sqrt{2}$. Поэтому периметр искомой фигуры есть $l+OA+OB=\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a, угол ABC равен 120°. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Вторая окружность имеет центром точку B и проходит через точку D. Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

2. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина стороны AB равна 1, а величина угла OAB равна 60°. Найти площадь общей части кругов, описанных около треугольников ABO и BOC.

3. В треугольнике ABC сторона AB равна 4, угол A равен 30°, угол B равен 130°. На стороне AB как на диаметре построен круг. Найти площадь части круга, лежащей внутри треугольника.

4. На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает ее в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

5. Два круга, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{3} + 1$, имеют радиусы $\sqrt{2}$ и 2. Найти отношение площади круга, вписанного в общую часть данных кругов, к площади общей части.

6. В прямой угол прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найти площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

7. На биссектрисе BL треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O, пересекающая сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E, причем верно равенство $AD \cdot LC = EC \cdot AL$. Найти площадь той части треугольника ABC, которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle BAL = 2\angle BEO$, а $DE = \sqrt{3}$.

8. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4x - 4y - 6, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

§ 9. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В этом параграфе кроме уже имеющихся формул и теорем будем использовать еще несколько фактов, которые касаются непосредственно четырехугольников. Сформулируем несколько утверждений.

Теорема 1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту.

Теорема 2. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, опущенную на данное основание, или произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

Теорема 3. В параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

Теорема 4. Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Теорема 5. Площадь четырехугольника, описанного около окружности, равна произведению полупериметра этого четырехугольника на радиус данной окружности.

Теорема 6. Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника.

Теорема 7. Если у выпуклого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон этого четырехугольника равны.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

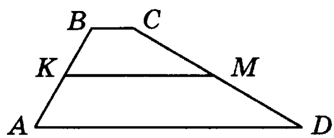


Рис. 88

Решение. Пусть $ABCD$ — данная в условии задачи трапеция, $AB = 3$ и $CD = 5$ — ее боковые стороны, точки K и M — середины сторон AB и CD соответственно (рисунок 88). Пусть, для определенности, $AD > BC$, тогда площадь трапеции $AKMD$ будет больше площади трапеции $KBCM$. Так как KM — средняя линия трапеции $ABCD$, то трапеции $AKMD$ и $KBCM$ имеют равные высоты. Поскольку площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту, то верно следующее равенство:

$$\frac{S_{AKMD}}{S_{KBCM}} = \frac{AD+KM}{KM+BC} = \frac{11}{5}.$$

Далее, так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD = 8$. Тогда $KM = 4$ как средняя линия трапеции $ABCD$. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 8 - x$. Имеем:

$$\frac{S_{AKMD}}{S_{KBCM}} = \frac{x+4}{12-x} = \frac{5}{11} \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит, $BC = 1$ и $AD = 7$.

Ответ: 1 и 7.

Пример 2. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AB и CD — ее основания ($AB < CD$), M, N — середины AB и CD соответственно. Пусть также $\angle ADC = 50°$, $\angle BCD = 40°$ (рисунок 89). Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований, поэтому $AB + CD = 8$. Продлим боковые стороны DA и CB до пересечения в точке E. Рассмотрим треугольник ABE, в котором $\angle EAB = 50°$, $\angle EBA = 40°$, следовательно $\angle AEB = 90°$. Медиана EM этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы: $EM = AM$. Пусть $EM = x$, тогда $AM = x$, $DN = 4 - x$. Согласно условию задачи $MN = 1$, следовательно, $EN = x + 1$, так как точки E, M и N лежат на одной прямой. Поскольку $EN = DN$, имеем: $x + 1 = 4 - x$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Это означает, что $AB = 3$ и $CD = 5$.

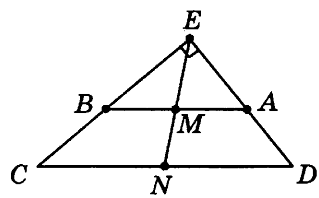


Рис. 89

Ответ: 3 и 5.

Пример 3. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

Решение. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции. Пусть $CD = x$, тогда $AD = x$,

$AB = 2x$ (рисунок 90). Отрезок CD параллелен отрезку AB и вдвое его короче, значит, CD является средней линией треугольника ABE. Следовательно, $CE = BC = b$ и $DE = AD = x$, откуда $AE = 2x$. Итак, треугольник ABE равнобедренный ($AB = AE$) и AC — его медиана. Поэтому AC является и высотой этого треугольника, и значит, $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AC = ab$. Так как треугольник DEC подобен треугольнику AEB с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, то

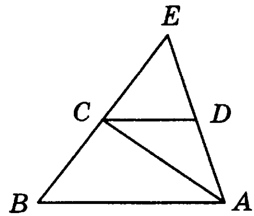


Рис. 90

$$S_{\Delta DEC} = \frac{1}{4} S_{\Delta AEB} = \frac{ab}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{3ab}{4}.$$

Ответ: $\frac{3ab}{4}$.

Пример 4. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD и с боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, $OC = 2$ и $OD = 4$.

Решение. Пусть K, H, M — точки касания окружности со сторонами BC, CD, DA соответственно. Пусть r — радиус данной окружности (рисунок 91). Поскольку прямые AB и AD перпендикулярны, то $AB = KM = 2r$. Центр O вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис внутренних углов трапеции. Поэтому $\angle BCO = \angle OCD$ и $\angle CDO = \angle ODA$. Тогда из равенства $\angle BCD + \angle CDA = 180°$ получаем, что $\angle OCD + \angle ODC = 90°$ и $\angle COD = 90°$. Применив к треугольнику COD теорему Пифагора, получим, что $CD = \sqrt{CO^2 + OD^2} = 2\sqrt{5}$.

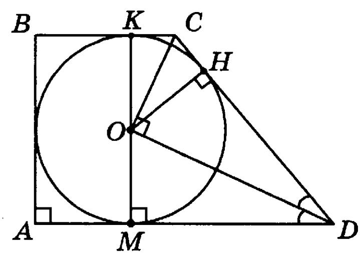


Рис. 91

Так как касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то OH — высота треугольника COD. Найдем длину этой высоты как произведение длин катетов, деленное на длину гипотенузы прямоугольного треугольника COD: $OH = \frac{4}{\sqrt{5}} = r$. Так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то суммы длин противоположных сторон этой трапеции равны: $AB + CD = BC + AD$, и полупериметр трапеции равен

$$p = AB + CD = 2r + 2\sqrt{5} = \frac{18}{\sqrt{5}}.$$

Тогда площадь трапеции равна произведению полупериметра этой трапеции на радиус вписанной окружности и равна $SABCD = pr = 14{,}4$.

Ответ: 14,4.

Пример 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD.

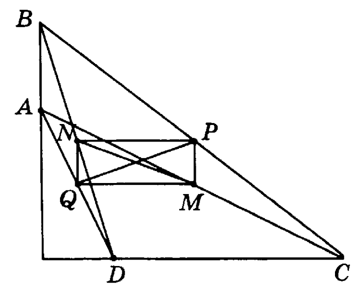


Рис. 92

Решение. Пусть M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD; P и Q — соответственно середины сторон BC и AD (рисунок 92). Отрезок NQ является средней линией треугольника ABD, следовательно, он параллелен прямой AB и его длина равна половине длины отрезка AB. Аналогично отрезок PM является средней линией треугольника ABC, поэтому он также параллелен прямой AB и его длина равна половине длины отрезка AB. Значит, отрезки NQ и PM параллельны и равны по длине, поэтому четырехугольник $MPNQ$ есть параллелограмм.

Согласно условию задачи диагонали PQ и MN параллелограмма $MPNQ$ равны. Следовательно, $MPNQ$ — прямоугольник, в частности, прямая MP перпендикулярна прямой PN. Далее, так как MP — средняя линия треугольника ABC, то эта прямая параллельна прямой AB, а так как

PN — средняя линия треугольника BCD, то эта прямая параллельна прямой CD. Следовательно, угол между прямыми AB и CD такой же, как между прямыми MP и PN, то есть прямой угол.

Ответ: 90°.

Пример 6. В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 1 : 2. Найдите площадь прямоугольника.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный квадрат, $KLMN$ — вписанный в него прямоугольник, при этом точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и AD соответственно (рисунок 93). Пусть также $KN = LM = x$, $KL = MN = 2x$, $\angle AKN = \alpha$. Докажем, что $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

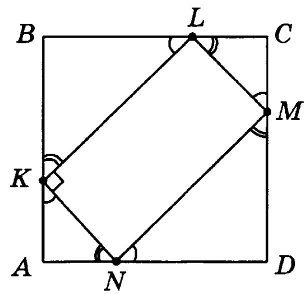


Рис. 93

Так как угол LKN прямой, то $\angle BKL = 90° - \alpha$ и $\angle BLK = \alpha$. Аналогично $\angle CLM = 90° - \alpha$ и $\angle CML = \alpha$. Из прямоугольного треугольника AKN получаем, что $AK = x\cos\alpha$, из прямоугольного треугольника BKL находим, что $KB = 2x\sin\alpha$, $BL = 2x\cos\alpha$, а из прямоугольного треугольника CLM получаем, что $LC = x\sin\alpha$. Равенство сторон квадрата $AB = BC$ дает нам равенство

$$AK + KB = BL + LC \Leftrightarrow x\cos\alpha + 2x\sin\alpha = 2x\cos\alpha + x\sin\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha,$$

откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $KB = \frac{2x}{\sqrt{2}}$. Так как площадь квадрата равна 18, имеем следующее равенство: $18 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2$, откуда $x = 2$. Значит, площадь прямоугольника $KLMN$ равна $S_{KLMN} = KN \cdot KL = 2x^2 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A равен $90°$, а угол C не превосходит $90°$. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Известно, что $AE = CF$. Доказать, что угол C прямой.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $AE < AF$ (в противном случае следует повторить все нижеследующие рассуждения с заменой точек B и D). Пусть $\angle ABE = \alpha$, $\angle EBC = \beta$, $\angle ADF = \gamma$, $\angle FDC = \delta$ (рисунок 94). Достаточно доказать, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. Так как

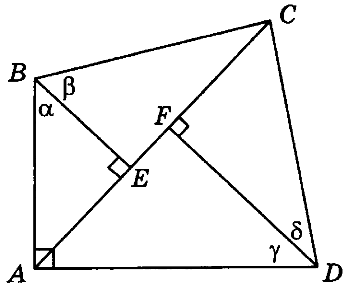


Рис. 94

$$\frac{\pi}{2}=\angle BAD=\angle BAE+\angle FAD=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\pi-\alpha-\gamma,$$

то $\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$ и, в частности, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=1$. Далее имеем:

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta=\frac{CE}{BE}\cdot\frac{CF}{DF}=\frac{AF}{BE}\cdot\frac{AE}{DF}=\frac{AF}{DF}\cdot\frac{AE}{BE}=\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1,$$

откуда получаем, что $\beta+\delta=\frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

Пример 8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, H, G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD, DA и O — точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что $EH = a$, $FG = b$, $\angle FOH=\frac{\pi}{3}$. Найти длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Решение. Известно, что если соединить последовательно середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм (теорема 6). В нашем случае $EFHG$ — параллелограмм и O — точка пересечения его диагоналей. В частно-

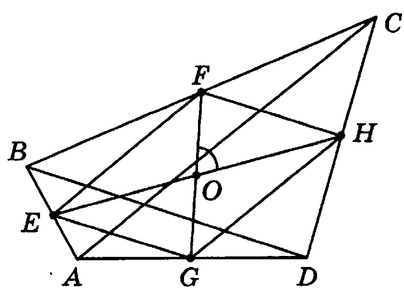


Рис. 95

сти, $EO = OH = \frac{a}{2}$, $GO = OF = \frac{b}{2}$ (рисунок 95). Применим к треугольнику FOH теорему косинусов:

$$FH = \sqrt{OF^2 + OH^2 - 2OF \cdot OH \cdot \cos\angle FOH} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{2}.$$

Так как FH — средняя линия треугольника BCD, то $BD = 2FH = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. Аналогично, применив теорему косинусов к треугольнику EOF, получим, что $EF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, откуда $AC = 2EF = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Ответ: $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

Пример 9. В равнобокой трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

Решение. Допустим, что описанная ситуация возможна. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD и BC — ее основания, диагональ AC является биссектрисой угла BAD (рисунок 96). Имеем: $\angle BAC = \angle CAD = \angle ACB$, следовательно, треугольник ABC равнобедренный: $AB = BC$. Значит, основание AD меньше 4, а основание BC равно 5 (в противном случае $AB + BC < 4 + 4 = 8 = AC$, что противоречит неравенству треугольника) и $AB = BC = CD = 5$. Далее, обозначая угол CAD через α, находим, что угол CDA равен 2α и угол ACD равен $\pi - 3\alpha$. Рассматривая треугольник ABC, получаем, что $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

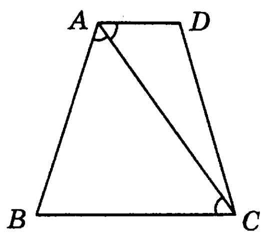


Рис. 96

Так как $\cos\alpha = \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$, то $\alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha < \pi - 3\alpha$, то есть угол CAD меньше угла ACD. Однако в треугольнике ACD напротив меньшего угла CAD должна лежать меньшая сторона CD, что противоречит уже полученному соотношению $CD = 5 > 4 > AD$. Итак, противоречие показывает, что исходное предположение о возможности описанной в условии задачи конфигурации является неверным.

Ответ. Не может.

Пример 10. В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = p$, $MN = q$. Найти PQ.

Решение. Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BD, S — точка пересечения BD и PQ. Ясно, что $PQ = 2PS$, найдем PS (рисунок 97). Применим к треугольнику DAK и секущей PM теорему Менелая: $\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AM}{MK}\cdot\frac{KB}{BD}=1$.

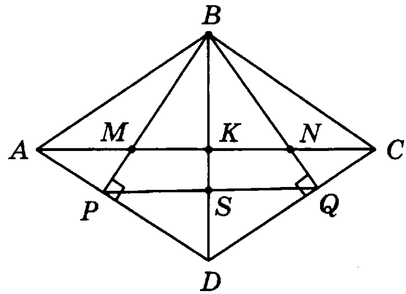


Рис. 97

Ясно, что $KB : BD = 1 : 2$ и $AM : MK = 2p : q$, откуда $\frac{DP}{PA}=\frac{q}{p}\Rightarrow\frac{AD}{AP}=\frac{p+q}{p}$. Из подобия треугольников DPS и DAK получаем следующее равенство:

$$\frac{PS}{AK}=\frac{PD}{AD}\Leftrightarrow PS=\frac{AK\cdot PD}{AD}=AK(1-\frac{AP}{AD})=$$

$$=(p+\frac{q}{2})(1-\frac{p}{p+q})=\frac{q(2p+q)}{2(p+q)}.$$

Значит, $PQ=\frac{2pq+q^2}{p+q}$.

Ответ: $\frac{2pq+q^2}{p+q}$.

Пример 11. Через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найти диагональ BD.

Решение. Так как согласно неравенству треугольника $BD < AB + BC = 8$, а $BE = 9$, то точка D лежит внутри данной окружности (рисунок 98). Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, $BO = OD = x$, $DE = 9 - 2x$, $AO = OC = y$. Так как AC и BE — пересекающиеся хорды одной окружности, то $AO \cdot OC = BO \cdot OE$, откуда $y^2 = x(9 - x)$.

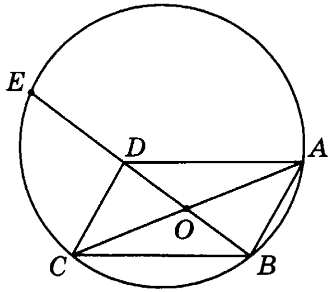


Рис. 98

Согласно теореме 3 (сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон) имеем равенство: $(2x)^2 + (2y)^2 = 2(3^2 + 5^2)$ или $x^2 + y^2 = 17$. Из полученных равенств легко находим, что $x = \dfrac{17}{9}$ и $BD = \dfrac{34}{9}$.

Ответ: $\dfrac{34}{9}$.

Пример 12. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD?

Решение. Пусть $CD = x$, $AD = y$. Так как четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны: $AB + CD = AD + BC$ или $3 + x = 5 + y$. С другой стороны (теорема 5), площадь этого четырехугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности. Имеем:

$$S = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + AD) \cdot r \text{ или } 9 = \frac{1}{2}(8 + x + y).$$

Из этих двух равенств легко находим, что $x = 6$ и $y = 4$.

Ответ: $AD = 4$, $CD = 6$.

Пример 13. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > KC$, $BK = 4 + \sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найти DC.

Решение. Пусть $KC = x$, $BC = y$ $(x < y)$. Тогда периметр треугольника BKC равен $x+y+4+\sqrt{2}$, а его площадь вычислим по формуле Герона. Имеем:

$$\begin{cases} x+y+4+\sqrt{2}=14, \\ \sqrt{7(7-x)(7-y)(7-4-\sqrt{2})}=7; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10-\sqrt{2}, \\ (7-x)(7-y)=\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Если обозначить теперь $7 - x = u$ и $7 - y = v$ ($u > v$ так как $x < y$), получим, что $uv=3+\sqrt{2}$ и $u+v=4+\sqrt{2}$, откуда $u=3+\sqrt{2}$ и $v = 1$. Возвращаясь к переменным x и y, находим, что $x=4-\sqrt{2}$, $y = 6$. Таким образом, треугольник BKC прямоугольный (так как $(4+\sqrt{2})^2+(4-\sqrt{2})^2=6^2$), и угол BKC равен $90°$.

Докажем следующее утверждение. Пусть в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Тогда либо $AB = BC$ и $AD = DC$, либо $AB = AD$ и $CB = CD$. Пусть, для удобства, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$. Согласно первому из условий получаем равенство $a + c = b + d$. Второе условие (теорема 7) дает соотношение $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Имеем:

$$\begin{cases} a+c=b+d, \\ a^2+c^2=b^2+d^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c, \\ a^2-b^2=d^2-c^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c, \\ (a-b)(a+b)=(d-c)(d+c), \end{cases}$$

откуда либо $a = b$, $d = c$, либо

$$\begin{cases} a-b=d-c, \\ a+b=d+c, \end{cases}$$

что означает $a = d$ и $b = c$.

По условию задачи $AB \neq BC$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что $DC = BC = 6$.

Ответ: 6.

Пример 14. Пусть M — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором стороны AB, AD и BC равны между собой. Найти угол CMD, если известно, что $DM = MC$, а $\angle CAB \neq \angle DBA$.

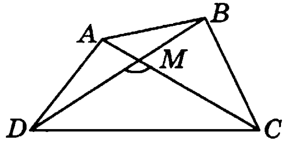


Рис. 99

Решение. Пусть $AB = AD = BC = a$, $DM = MC = b$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle DBA = \beta$, $\alpha \neq \beta$, $\angle AMD = \angle CMB = \varphi$. Применим к треугольникам AMD и CMB теорему синусов (рисунок 99). Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{AD}{\sin\angle AMD} = \dfrac{MD}{\sin\angle DAC}, \\ \dfrac{BC}{\sin\angle CMB} = \dfrac{MC}{\sin\angle CBD}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{b}{\sin\angle DAC}, \\ \dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{b}{\sin\angle CBD}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle DAC = \sin\angle CBD.$$

Это означает, что либо $\angle DAC = \angle CBD$, либо $\angle DAC + \angle CBD = 180°$. В первом случае мы получаем равные треугольники AMD и CMB, откуда следует равенство отрезков AM и BM, что противоречит условию $\angle CAB \neq \angle DBA$. Значит, $\angle DAC + \angle CBD = 180°$. Пусть $\angle DAC = \gamma$, тогда $\angle CBD = 180° - \gamma$.

Складывая все углы в треугольниках AMD и CMB, находим, что

$$360° = (\beta + \gamma + \varphi) + (\alpha + (180° - \gamma) + \varphi) \Leftrightarrow \alpha + \beta + 2\varphi = 180°.$$

С другой стороны, $\varphi = \alpha + \beta$ как внешний угол треугольника ABM. Из двух полученных равенств вытекает, что $\varphi = 60°$ и $\angle CMD = 120°$.

Ответ: 120°.

Задачи для самостоятельного решения

1. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

2. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

3. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26. Величина угла ABC равна $120°$. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.

4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

5. В трапеции $KLMN$ боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\angle KLM = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Найти диагональ LN.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$, а их длины относятся как $1 : 3$. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и имеет длину 6. Длина основания AD равна 8, а длина отрезка DO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6. Найти площадь треугольника COD.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD известно, что $AC = a$, $BD = \frac{7a}{5}$, а угол CAB вдвое больше угла DBA. Найти площадь трапеции.

9. Точка O лежит на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $OC = OD$ и что точка O одинаково удалена от прямых DA, AB и BC. Найти углы четырехугольника, если $\angle AOB = 130°$ и $\angle COD = 90°$.

10. Около окружности радиуса 3 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, площадь которой равна 48. Окружность касается сторон AB и CD в точках K и L. Найти KL.

11. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 10, 8 и 6. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

12. В трапеции $ABCD$ (AB — основание) величины углов DAB, BCD, ADC, ABD и ADB образуют арифметическую прогрессию (в том порядке, в котором они написаны). Найти расстояние от вершины C до диагонали BD, если высота трапеции равна h.

13. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L прямые, а величина угла при вершине M равна $\frac{2}{3}$. Найти длину диагонали NQ, если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 больше длины стороны LN.

14. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.

15. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O, при этом $AO = OC = 1$, $BO = OD = 2$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.

16. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и $AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

17. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $LK : KM = 1 : 3$.

18. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75°$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$ и сравнить ее с числом $2\sqrt{15}$.

19. Произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найти площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

20. Биссектрисы внутренних углов в параллелограмме $ABCD$ образуют четырехугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найти сумму квадратов длин всех сторон в четырехугольнике $EFGH$, если известно, что $AB - CD = \frac{3}{2}$.

21. Площадь четырехугольника $PQRS$ равна 48. Кроме того, известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P, Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найти длины сторон RS и SP.

22. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении 2 : 3. Найти тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

§ 10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ И ФОРМУЛ

Доказательство теоремы 3 параграфа 1:

Построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C и проведем высоту CD этого треугольника (рисунок 100). Докажем первое из равенств. Из подобия треугольников ACD и CBD (по двум углам) следует, что

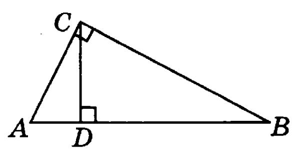


Рис. 100

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DC}{DB} \Leftrightarrow CD^2 = AD \cdot DB \Leftrightarrow h^2 = c_a \cdot c_b.$$

Для доказательства второго равенства рассмотрим подобные треугольники ABC и CBD. Имеем:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow BC^2 = AB \cdot BD \Leftrightarrow a^2 = c \cdot c_a.$$

Третье равенство доказывается аналогично второму.

Доказательство теоремы 3 параграфа 2:

Докажем только формулу Герона. Запишем теорему косинусов $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$ и формулу площади $4S = 2ab\sin\gamma$. Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получаем, что

$$(a^2+b^2-c^2)^2+16S^2=4a^2b^2,$$

откуда

$$16S^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2)=$$

$$=(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)=(c+a-b)(c+b-a)(a+b-c)(a+b+c).$$

Значит,

$$S^2=\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1 параграфа 3:

Построим треугольник ABC и проведем в нем биссектрису AD (рисунок 101). Имеем:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{bc\sin\alpha}{2}.$$

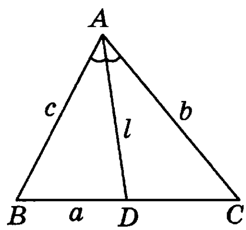


Рис. 101

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}=$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD=$$

$$=\frac{cl_a\sin\frac{\alpha}{2}+bl_a\sin\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Приравнивая полученные двумя способами значения площади треугольника ABC, имеем:

$$\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{cl_a\sin\frac{\alpha}{2}+bl_a\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\Leftrightarrow\quad l_a=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

При этом мы использовали формулу $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

Доказательство теоремы 2 параграфа 3:

Построим треугольник ABC и проведем в нем биссектрису AD (рисунок 102). Пусть $CD = x$ и $BD = y$. Применим к треугольникам ABD и ACD теорему косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD;$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos\angle CAD.$$

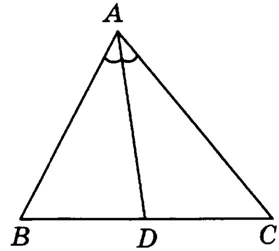


Рис. 102

Или, что то же самое,

$$y^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\frac{\alpha}{2}; \quad x^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Выразим из каждого равенства $\cos\frac{\alpha}{2}$ и приравняем полученные результаты:

$$\frac{c^2 + l_a^2 - y^2}{2cl_a} = \frac{b^2 + l_a^2 - x^2}{2bl_a} \Leftrightarrow bc^2 + bl_a^2 - by^2 = cb^2 + cl_a^2 - cx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc(c-b) + cx^2 - by^2 = l_a^2(c-b).$$

Применив теперь к треугольнику ABC теорему о биссектрисе внутреннего угла, получим:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{cx}{b}.$$

Отдельно преобразуем выражение $cx^2 - by^2$:

$$cx^2 - by^2 = cx^2 - b\left(\frac{cx}{b}\right)^2 = cx^2 - \frac{c^2x^2}{b} = cx^2\left(1 - \frac{c}{b}\right) =$$

$$= \frac{cx^2(b-c)}{b} = xy(b-c).$$

Последнее равенство верно в силу того, что $y = \frac{cx}{b}$. Имеем далее:

$$bc(c-b) + cx^2 - by^2 = l_a^2(c-b) \Leftrightarrow bc(c-b) + xy(b-c) = l_a^2(c-b).$$

Если $c \neq b$, то, сократив обе части равенства на $(c - b)$, получим требуемую формулу, если же $c = b$, то данная теорема сводится к теореме Пифагора.

Доказательство теоремы 4 параграфа 3:

Построим треугольник ABC и проведем в нем медиану AA_1 (рисунок 103). Применим в треугольниках AA_1B и AA_1C теорему косинусов:

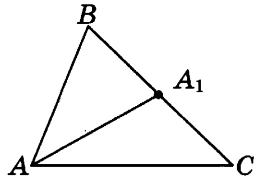


Рис. 103

$$AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos\angle AA_1B;$$

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\angle AA_1C.$$

Или, что то же самое,

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - am_a \cos\varphi; \quad b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - am_a \cos(\pi - \varphi),$$

где $\varphi = \angle AA_1B$. Так как $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, то сложив последние два равенства, получим

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Доказательство теоремы 5 параграфа 4:

Проведем через точку C прямую, параллельную прямой AB, до пересечения с прямой XZ в точке K (рисунок 104). Надо доказать, что

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1.$$

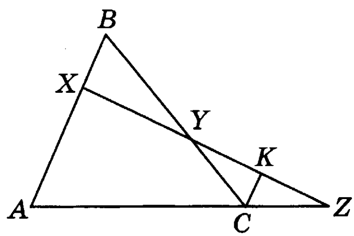


Рис. 104

Рассмотрим две пары подобных треугольников.

$$\Delta CKZ \sim \Delta AXZ \quad \Rightarrow \quad \frac{CZ}{AZ} = \frac{CK}{AX};$$

$$\Delta XBY \sim \Delta KCY \quad \Rightarrow \quad \frac{BY}{CY} = \frac{XB}{KC}.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим

$$\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{BY}{YC}=\frac{XB}{AX} \Leftrightarrow \frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6 параграфа 4:

Докажем подобие треугольников A_1BC_1 и ABC при помощи первого признака подобия (рисунок 105). Так как эти два треугольника имеют общий угол B, достаточно доказать, что

$$\frac{BA_1}{BA}=\frac{BC_1}{BC}.$$

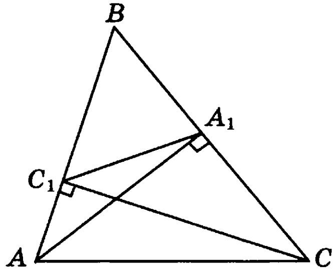


Рис. 105

Но это следует из того, что $\frac{BA_1}{BA}=\cos\angle B$ из прямоугольного треугольника ABA_1, а $\frac{BC_1}{BC}=\cos\angle B$ из прямоугольного треугольника CBC_1. Попутно доказана и вторая часть теоремы.

Доказательство теоремы 6 параграфа 7:

Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC этого треугольника соответственно в точках K, L и M (рисунок 106). Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AK = AM = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Пусть стороны треугольника равны $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Имеем:

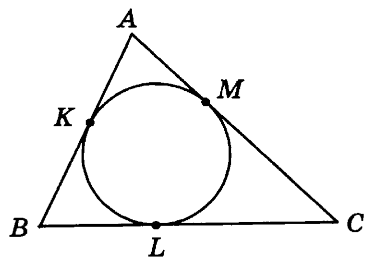


Рис. 106

$$\begin{cases} x+y=c, \\ y+z=a, \\ x+z=b; \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{b+c-a}{2}=p-a.$$

Следовательно, $AK = p - BC$.

Доказательство теоремы 7 параграфа 7:

Пусть окружность касается продолжения стороны AB треугольника ABC в точке K, стороны BC этого треугольника в точке L, продолжения стороны AC — в точке M (рисунок 107). Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AK = AM = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Пусть стороны треугольника равны $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Имеем:

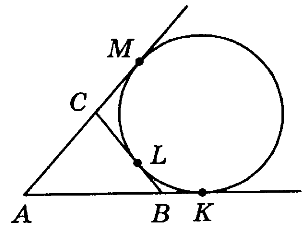


Рис. 107

$$\begin{cases} x - y = c, \\ y + z = a, \\ x - z = b; \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{b+c+a}{2} = p.$$

Следовательно, $AK = p$.

Доказательство теоремы 3 параграфа 9:

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ADC = 180° - \alpha$ (рисунок 108). Применим к треугольнику ABD теорему косинусов:

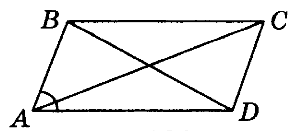


Рис. 108

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Применив теперь теорему косинусов к треугольнику ACD, получим, что

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Складывая почленно полученные равенства, находим, что

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4 параграфа 9:

Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, E — точка пересечения его диагоналей, $AE = a$, $BE = b$, $CE = c$, $DE = d$, $\angle AEB = \angle CED = \varphi$, $\angle BEC = \angle DEA = 180° - \varphi$ (рисунок 109). Имеем:

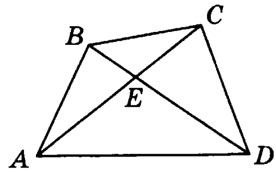


Рис. 109

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta CED} + S_{\Delta DEA} =$$

$$= \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin \angle AEB + \frac{1}{2} BE \cdot CE \cdot \sin \angle BEC +$$

$$+ \frac{1}{2} CE \cdot DE \cdot \sin \angle CED + \frac{1}{2} AE \cdot DE \cdot \sin \angle AED =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{2} \cdot (ab + bc + cd + ad) = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot (a + c)(b + d) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5 параграфа 9:

Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, описанный около окружности, O — центр этой окружности, OK, OL, OM и ON — перпендикуляры, опущенные из точки O на прямые AB, BC, CD и AD соответственно (рисунок 110).

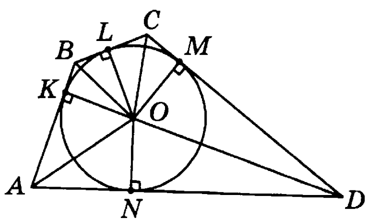


Рис. 110

Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot OK + \frac{1}{2} BC \cdot OL + \frac{1}{2} CD \cdot OM + \frac{1}{2} AD \cdot ON =$$

$$= \frac{r}{2} (AB + BC + CD + AD) = pr,$$

где r — радиус окружности, а p — полупериметр четырехугольника $ABCD$.

Доказательство теоремы 6 параграфа 9:

Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рисунок 111).

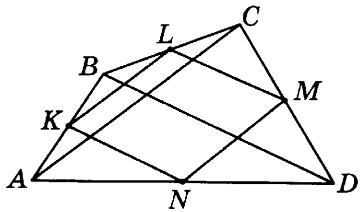


Рис. 111

Так как KL — средняя линия треугольника ABC, то прямая KL параллельна прямой AC и $KL=\frac{1}{2}AC$. Аналогично прямая NM параллельна прямой AC и $NM=\frac{1}{2}AC$. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм. Рассмотрим треугольник KBL. Его площадь равна четверти площади треугольника ABC. Площадь треугольника NDM также равна четверти площади треугольника ADC. Следовательно,

$$S_{\Delta KBL}+S_{\Delta NDM}=\frac{1}{4}(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC})=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Аналогично

$$S_{\Delta KAN}+S_{\Delta LCM}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Это значит, что

$$S_{\Delta KBL}+S_{\Delta NDM}+S_{\Delta KAN}+S_{\Delta LCM}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

откуда вытекает, что $S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Доказательство теоремы 7 параграфа 9:

Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, пусть E — точка пересечения его диагоналей, $AE=a$, $BE=b$, $CE=c$, $DE=d$ (рисунок 112). Применим к треугольникам ABE и CDE теорему Пифагора:

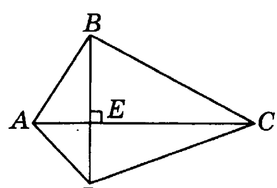


Рис. 112

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = a^2 + b^2,$$

$$CD^2 = CE^2 + DE^2 = c^2 + d^2,$$

следовательно,

$$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Применив теперь теорему Пифагора к треугольникам ADE и BCE, получим, что

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = a^2 + d^2,$$

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 = b^2 + c^2,$$

откуда вытекает, что

$$AD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Значит, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, что и требовалось доказать.

Глава V
ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В данной главе приводятся простейшие задачи на проценты. Процент — это сотая часть числа. Если число b составляет $p\%$ от числа a, то верно следующее соотношение:

$$\frac{b}{a}=\frac{p}{100}.$$

Из этой пропорции по двум известным величинам всегда можно найти третью.

Обратим внимание, что в задачах такого типа важно понимать, от какого из чисел берутся проценты. Например, утверждение «Число a больше числа b на $p\%$» не эквивалентно утверждению «Число b меньше числа a на $p\%$». Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1: Некоторое число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

Решение: Пусть x — первоначальное число. После уменьшения на 20% оно станет равно $0{,}8x$. Число x составляет $\frac{5}{4}$ от числа $0{,}8x$, то есть 125%. Таким образом, полученное число надо увеличить на 25%.

Ответ: На 25%.

Пример 2: Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% количества овощей, проданных в первый день. В третий день — оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

Решение: Пусть первоначально в магазине было x кг овощей, тогда к концу первого дня осталось $0{,}6x$. Во второй день магазин продал $0{,}8 \cdot 0{,}4x = 0{,}32x$, к концу второго дня осталось $0{,}6x - 0{,}32x = 0{,}28x$, что составило 28% от x. Значит, изначально было 100 кг овощей.

Ответ: 100 кг.

Пример 3: Сумма двух чисел равна 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного из них равны 5% другого.

Решение: Пусть x и y — данные числа. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1100, \\ 0{,}06x = 0{,}05y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1100, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}2x = 1100, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500, \\ y = 600. \end{cases}$$

Таким образом, наибольшее из чисел равно 600.

Ответ: 600.

Пример 4: Сколько надо взять 20%-го раствора соли, чтобы при смешивании с 2 кг 10%-го раствора соли получить 12%-й раствор?

Решение: Возьмем x кг 20%-го раствора соли, в нем содержится $0{,}2x$ кг соли. В 2 кг 10%-го раствора соли содержится 0,2 кг соли, таким образом, в смеси будет содержаться $0{,}2x + 0{,}2$ кг соли. Вес смеси равен $(2 + x)$ кг, поэтому процентное содержание соли в ней равно $\frac{0{,}2x + 0{,}2}{2 + x} \cdot 100\%$.

Имеем уравнение:

$$\frac{0{,}2x + 0{,}2}{2 + x} \cdot 100 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20(x + 1) = 12(2 + x) \Leftrightarrow x = 0{,}5.$$

Таким образом, необходимо взять 0,5 кг 20%-го раствора.

Ответ: 0,5 кг.

Пример 5: Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 литров, затем еще 5% от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31%. Сколько литров воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 литров воды?

Решение: Пусть первоначально в цистерне было x литров воды. Так как в бассейн было добавлено 2000 · 0,31= 620 литров, то такое же количество воды было вылито из цистерны. Согласно условию задачи имеем уравнение:

$$0{,}5x+100+0{,}05(0{,}5x-100)=620 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}525x=525 \Leftrightarrow x=1000.$$

Таким образом, в цистерне было 1000 литров.

Ответ: 1000 л.

Пример 6: На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число остальных абитуриентов, верно решивших все задачи, относится к числу не решивших ничего как 5:3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

Решение: Согласно условиям задачи число абитуриентов, верно решивших все задачи, составляет 25% от числа поступающих. Значит, с ошибками решили задачи 60% абитуриентов, что составило 144 человека. Таким образом, всего абитуриентов было $\frac{144}{60}\cdot 100=240$ человек.

Ответ: 240 человек.

Пример 7: В городе N 9% коренного населения в зимний период занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет 80% от численности в зимний период. Сколько процентов от общей численности населения в летний период занято народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как и в зимний период?

Решение: Пусть x — число коренного населения в зимний период. Тогда летом в городе N проживает $0{,}64x$ коренного населения и $0{,}16x$ туристов (всего $0{,}8x$). Народным промыслом летом заняты $0{,}09 \cdot 0{,}64x = 0{,}0576x$. Это от $0{,}8x$ составляет $\frac{0{,}0576x}{0{,}8x}\cdot 100\%=7{,}2\%$.

Ответ: 7,2%.

Пример 8: Из двух сплавов, первый из которых содержал 8 кг меди, а второй — 10 кг, получили новый сплав, содержащий не менее 36% меди. Каково процентное содержание меди в первом сплаве, если известно, что во втором оно было на 8% больше, чем в первом?

Решение: Пусть $p\%$ — процентное содержание меди в первом сплаве и $(p+8)\%$ — процентное содержание меди во втором сплаве. Тогда $\dfrac{8\cdot 100}{p}$ — масса первого сплава, а $\dfrac{10\cdot 100}{p+8}$ — масса второго сплава. Масса нового сплава равна $\dfrac{800}{p}+\dfrac{1000}{p+8}$, а процентное содержание меди в нем — $\left(18:\left(\dfrac{800}{p}+\dfrac{1000}{p+8}\right)\right)\cdot 100\%$. Согласно условию задачи имеем неравенство:

$$\left(18:\left(\frac{800}{p}+\frac{1000}{p+8}\right)\right)\cdot 100\ge 36\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{800}{p}+\frac{1000}{p+8}\le 50\Leftrightarrow\frac{16}{p}+\frac{20}{p+8}-1\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(p+8)+20p-p(p+8)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2-28p-128\ge 0\Leftrightarrow p\ge 32,$$

так как $p\ge 0$. Таким образом, процентное содержание меди в первом сплаве должно быть не менее 32%.

Ответ: Не менее 32%.

Пример 9: Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объем больше и на сколько процентов?

Решение: Пусть a, b и c — соответственно длина, ширина и высота второго куска. Тогда длина первого куска будет равна $1{,}5a$, ширина — $0{,}8b$, высота — $0{,}7c$. Объем первого куска равен $V_1 = 1{,}5a \cdot 0{,}8b \cdot 0{,}7c = 0{,}84abc$, объем второго куска — $V_2 = abc$. Значит, объем второго куска составляет от объема первого куска

$$\frac{abc}{0{,}84abc} \cdot 100\% = 119\frac{1}{21}\%.$$

Следовательно, объем второго куска больше объема первого куска на $19\frac{1}{21}\%$.

Ответ: Объем второго куска больше на $19\frac{1}{21}\%$.

Пример 10: Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

Решение: Пусть x и y — стоимость (в млн рублей) первого и второго пакетов акций соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 1{,}28(x+y) = 7{,}68; \\ 1{,}28(x+y) = 1{,}4x + 1{,}2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6, \\ 2y = 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4; \\ y = 3{,}6. \end{cases}$$

Таким образом, первый пакет акций стоил 2 млн 400 тыс. рублей, второй — 3 млн 600 тыс. рублей.

Ответ: 2 млн 400 тыс. рублей и 3 млн 600 тыс. рублей.

Пример 11: На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — 4%. Найти средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X, а на факультете Z — вдвое меньше, чем на факультете X.

Решение: Пусть n — количество студентов, которые учатся на факультете Z. Тогда на факультете X учатся $2n$ студентов, а на факультете Y — $3n$ студентов. На факультете X количество отличников равно $0{,}1 \cdot 2n = 0{,}2n$; на факультете Y — $0{,}2 \cdot 3n = 0{,}6n$; а на факультете Z — $0{,}04n$. Таким образом, общее число студентов равно $6n$, общее число отличников равно $0{,}84n$; и средний процент отличников равен $\frac{0{,}84n}{6n} \cdot 100\% = 14\%$.

Ответ: 14%.

Пример 12: Популярность продукта A за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта B. Популярность продукта B в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта A за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта B?

Решение: Пусть x — популярность продукта A в начале 2002 года. Тогда в конце 2002 года она была равна $1{,}2x$; а в конце 2003 года — $0{,}9 \cdot 1{,}2x = 1{,}08x$.

Популярность продукта B изначально составляла $1{,}5x$; в конце 2002 и 2003 годов — $0{,}8 \cdot 1{,}5x = 1{,}2x$; а в конце 2004 года — $1{,}4 \cdot 1{,}2x = 1{,}68x$.

Таким образом, популярность продукта A за 2004 год выросла с $1{,}08x$ до $1{,}68x$, то есть на

$$\frac{1{,}68x - 1{,}08x}{1{,}08x} \cdot 100\% = \frac{500}{9}\%.$$

Ответ: Выросла на $\frac{500}{9}\%$.

Пример 13: Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

Решение: Пусть x — цена товара, назначенная производителем. Первую часть товара (до уценки) магазин продал по цене $1{,}25x$; вторую часть (после уценки) — по цене

$$0{,}84 \cdot 1{,}25x = 1{,}05x.$$

Следовательно, согласно условию задачи, расходы на транспортировку составили 5%.

Ответ: 5%.

Пример 14: Четыре отраслевых предприятия K, L, M, N, обсуждая планы объединения усилий, установили, что без K три оставшихся будут контролировать 55% рынка отрасли; без L три других— 60%; K, L, N без M — 66%; три предприятия без N — 73% рынка отрасли. Какова доля каждого из этих предприятий на рынке?

Решение: Пусть предприятие K контролирует x% отрасли, предприятие L — y%, предприятие M — z% и предприятие N — t%. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} y+z+t=55, \\ x+z+t=60, \\ x+y+t=66, \\ x+y+z=73; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=5, \\ y-z=6, \\ z-t=7, \\ x+y+z=73; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=t+7, \\ y=z+6=t+13, \\ x=y+5=t+18, \\ (t+18)+(t+13)+(t+7)=73; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=29\dfrac{2}{3}, \\ y=24\dfrac{2}{3}, \\ z=18\dfrac{2}{3}, \\ t=11\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $29\frac{2}{3}$%, $24\frac{2}{3}$%, $18\frac{2}{3}$%, $11\frac{2}{3}$%.

Пример 15: В свежих грибах содержание воды колеблется от 80% до 99%, а в сушеных — от 20% до 40%. В какое наибольшее число раз при этих условиях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

Решение: Ясно, что условие задачи выполнено, если в свежих грибах содержание воды составляет 99%, а в сушеных — 20%. Возьмем килограмм свежих грибов, в них 990 граммов воды и 10 граммов «собственно грибов». После сушки останется также 10 граммов «собственно грибов», а вес m сушеных грибов определяем из пропорции:

$$\frac{10}{m}=\frac{80\%}{100\%} \Leftrightarrow m=12,5.$$

Значит, вес грибов уменьшился в $\frac{1000}{12,5}=80$ раз.

Ответ: В 80 раз.

Задачи для самостоятельного решения

1. Цену товара повысили на 50%, а затем снизили на 50%. Как изменится цена товара?

2. Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10%, затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

3. Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

4. После ремонта путей скорость движения поездов на участке длиной 90 км возросла на 20%, за счет чего время прохождения участка уменьшилось на 18 минут. За какое время поезда стали проходить данный участок пути?

5. Из двух сплавов, первый из которых содержал 1 кг, а второй — 3 кг серебра, получили новый сплав, содержащий 12% серебра. Каково процентное содержание серебра в первом сплаве, если известно, что во втором оно было на 12% больше, чем в первом?

6. Среди постоянных жителей горного курорта K 7% предпочитают отдыхать на море. Летом 64% постоянных жителей уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет 120% от численности постоянного населения в зимний период. Сколько процентов любителей морского отдыха среди общей численности населения в летний период, если их доля среди постоянных жителей не изменилась, а приезжающие туристы отдыхать на море не любят?

7. В сосуде находится некоторое количество смеси воды с кислотой. Чтобы уменьшить процентную концентрацию кислоты на 34%, в сосуд надо долить 3 л воды, а чтобы уменьшить ее на 17%, надо долить 1 л воды. Какова процентная концентрация кислоты в воде?

8. Антикварный магазин продал картину со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли магазин предполагал получить первоначально?

9. Сплав из двух металлов массой в 40 кг содержит 15% одного из них. Сколько кг этого металла надо добавить к сплаву, чтобы его процентное содержание увеличилось до 32%?

10. В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи — со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найти первоначальные цены костюма и плаща.

11. Имеется сплав меди с никелем. Сплавив его с 6 кг меди, получили сплав, в котором содержится 50% меди, а сплавив его с 10 кг никеля, получили сплав, в котором содержится 10% меди. Найти процентное содержание меди в первоначальном сплаве.

12. После того, как 1500 новых вкладчиков открыли в банке счета на общую сумму в 7 млн 800 тыс. рублей, средний размер вклада, составлявший 6 тыс. рублей, уменьшился на 10%. Определить число старых вкладчиков банка.

13. Имеются три сплава никеля с цинком, общая масса которых 30 кг. В первом содержится 40% никеля, во втором — 22%, в третьем — 90%. Если первый сплав сплавить со вторым, то получится сплав, содержащий 30% никеля. Если первый сплав сплавить с третьим, получится сплав, содержащий 30% цинка. Найти массу каждого сплава.

14. На покраску дома желтой краски потребовалось больше, чем белой, на 20%, а коричневой краски — на 25% меньше, чем желтой. На сколько процентов коричневой и желтой краски суммарно потребовалось больше, чем белой?

15. После продажи акций оказалось, что доходность каждой акции первого пакета выросла на 30%, а доходность каждой акции второго пакета, в три раза большего по объему, понизилась на 20%. Во сколько раз отличались ожидаемые показатели доходности каждой акции этих пакетов, если вырученная от продажи сумма превысила планируемую на 10%?

§ 2. ФОРМУЛА СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Формула сложных процентов возникает при расчете величины банковского вклада, находящегося несколько лет под действием определенной годовой процентной ставки. Дело в том, что в конце каждого года проценты начисляются уже на ту сумму, которая к этому времени находится на банковском счете. Естественно, начисляемые в конце разных лет суммы отличаются друг от друга (чем дольше лежит вклад, тем больше эта сумма).

Итак, пусть гражданин положил в банк A условных единиц под p процентов годовых на k лет. В конце первого года ему будет начислена сумма, равная $A\cdot\dfrac{p}{100}$, и сумма вклада станет равна $A+A\cdot\dfrac{p}{100}=A\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ условных единиц. В конце второго года будет начислено $A\left(1+\dfrac{p}{100}\right)\cdot\dfrac{p}{100}$ и на счету у гражданина окажется

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)+A\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ условных единиц.}$$

И так далее, в конце k-го года сумма на счете станет равна

$$S=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^k \text{ условных единиц.}$$

Это и есть формула сложных процентов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1: Банк ежегодно начисляет 10% от суммы вклада. Через сколько лет вклад увеличится хотя бы вдвое?

Решение: Пусть k — искомое число лет, x — сумма вклада.

После первого года размер вклада станет равным

$$x + 0{,}1x = 1{,}1x,$$

после второго года —

$$1{,}1x + 0{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}1^2 \cdot x,$$

после k-го года — $1{,}1^k \cdot x$. Согласно условию задачи имеем неравенство

$$1{,}1^k \cdot x \ge 2x \Leftrightarrow 1{,}1^k \ge 2 \Leftrightarrow k \ge 8,$$

так как $1{,}1^7 < 1{,}95$, а $1{,}1^8 > 2{,}14$.

Ответ: Через 8 лет.

Пример 2: В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Решение: Пусть x — размер суммы, которую вкладчик дополнительно вносил на счет в конце каждого из первых четырех лет.

Согласно условию задачи имеем уравнение:

$$\left(\left(\left(\left(3900 \cdot 1{,}5 + x\right) \cdot 1{,}5 + x\right) \cdot 1{,}5 + x\right) \cdot 1{,}5 + x\right) \cdot 1{,}5 = 3900 \cdot 8{,}25$$

или, после преобразований,

$$3900 \cdot (1{,}5)^5 + 12{,}1875x = 32175 \Leftrightarrow x = 210.$$

Ответ: 210 тыс. рублей.

Пример 3: Курс доллара в течение двух месяцев увеличивался на одно и то же число процентов ежемесячно, но не более чем в 1,2 раза. За сумму, вырученную от продажи в начале первого месяца одного доллара, к концу второго месяца можно было купить на 9 центов меньше, чем в конце первого месяца. На сколько процентов уменьшился курс рубля за два месяца?

Решение: Пусть в начале первого месяца от продажи одного доллара можно было получить x рублей, в конце первого месяца — $x\left(1+\frac{p}{100}\right)$ рублей, в конце второго — $x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ рублей. Тогда в конце первого месяца за x рублей можно было получить $\frac{100}{100+p}$ долларов, в конце второго — $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2$ долларов. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$\frac{100}{100+p}-\left(\frac{100}{100+p}\right)^2=\frac{9}{100},$$

откуда $\frac{100}{100+p}=0,9$ или $\frac{100}{100+p}=0,1$.

В первом случае $p=\frac{100}{9}$, во втором — $p = 900$. Второй случай не имеет места, так как согласно условию задачи курс доллара увеличился не более чем в 1,2 раза. Это означает, что каждый месяц курс доллара увеличивается в $1+\frac{p}{100}=\frac{10}{9}$ раза.

То есть если в начале первого месяца $100x$ рублей стоили 100 долларов, то в конце второго — 81 доллар. Таким образом, курс рубля за два месяца уменьшился на 19%.

Ответ: На 19%.

Пример 4: Выработка продукции за год работы предприятия возросла на p%, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Решение: Пусть x — первоначальная выработка продукции.

Так как за первый год выработка возросла на $p\%$, то она стала равна $x\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Аналогично, так как за второй год выработка продукции увеличилась на $(p + 10)\%$, она стала равной

$$x\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p+10}{100}\right).$$

Имеем уравнение:

$$x\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p+10}{100}\right)=x\left(1+\frac{48{,}59}{100}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2+210p-3859=0\Leftrightarrow p=17.$$

Ответ: На 17%.

Пример 5: Курс рубля по отношению к доллару падает на $28\frac{4}{7}\%$ в квартал. Что выгоднее: сделать валютный вклад на год с начислением 60% годовых или конвертировать доллары в рубли и сделать рублевый вклад с начислением 510% годовых?

Решение: Рубль по отношению к доллару каждый квартал дешевеет в $\frac{100}{100-28\frac{4}{7}}=\frac{7}{5}$ раза, следовательно, доллар по отношению к рублю дорожает каждый квартал в $\frac{7}{5}$ раза. Следовательно, через год доллар станет дороже в $\left(\frac{7}{5}\right)^4=3{,}8416$ раза.

Пусть в начале года один доллар стоит x рублей. Тогда при первом варианте вкладчик за один доллар получит

$$1{,}6\cdot 3{,}8416x = 6{,}14656x \text{ рублей},$$

при втором — $6{,}1x$ рублей. Таким образом, первый вариант предпочтительнее.

Ответ: Первый вариант выгоднее.

Пример 6: Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{1}{6}$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А еще через год в счет полного погашения кредита фермер внес в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение: Пусть x — сумма полученного кредита, p% — процент годовых в данном банке.

Через год после получения кредита фермер должен был банку $x\left(1+\frac{p}{100}\right)$, вернул в счет погашения долга $\frac{x}{6}\left(1+\frac{p}{100}\right)$, остаток долга $\frac{5x}{6}\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Еще через год долг стал равен $\frac{5x}{6}\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

Согласно условию задачи имеем следующее уравнение:

$$\frac{5x}{6}\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 1+\frac{p}{100} = 1{,}2 \Leftrightarrow p = 20.$$

Ответ: 20%.

Пример 7: В коммерческий банк был сделан вклад под фиксированный процент годового дохода. За первые два года величина вклада возросла на 21 000 рублей, а за третий год она увеличилась еще на 12 100 рублей. Какова была первоначальная величина вклада?

Решение: Пусть x — первоначальный размер вклада, p% — процент годового дохода. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 - x = 21\,000, \\ x\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 - x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 12\,100. \end{cases}$$

Пусть $\left(1+\frac{p}{100}\right)=a$. Имеем:

$$\begin{cases} x(a^2-1)=21\,000, \\ x(a^3-a^2)=12\,100; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a^3-a^2}{a^2-1}=\frac{12\,100}{21\,000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a+1}=\frac{121}{210} \Leftrightarrow a=1{,}1.$$

Далее, $p = 10$ и $x=\frac{21\,000}{a^2-1}=100\,000$.

Ответ: 100 000 рублей.

Пример 8: В начале года вкладчик открыл счет в банке и внес 1640 тыс. рублей. В конце года он снял 882 тыс. рублей. Еще через год на его счете оказалось 882 тыс. рублей. Сколько процентов годовых начисляет банк?

Решение: Пусть $r\%$ — процент годового дохода в данном банке. Тогда через год после открытия вклада на счете было $1640\left(1+\frac{r}{100}\right)$ тыс. рублей, вкладчик снял 882 тыс. рублей, остаток $1640\left(1+\frac{r}{100}\right)-882$ тыс. рублей. Еще через год на счете оказалось $\left(1640\left(1+\frac{r}{100}\right)-882\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$ тыс. рублей.

Имеем следующее уравнение:

$$\left(1640\left(1+\frac{r}{100}\right)-882\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)=882 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 820\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-441\left(1+\frac{r}{100}\right)-441=0,$$

откуда

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{21}{20} \text{ и } r=5.$$

Ответ: 5%.

Пример 9: В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. тонн железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предыдущим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

Решение: Пусть n — количество лет, в течение которых годовая добыча руды увеличивалась на 25%. Имеем следующее уравнение:

$$100\cdot\left(1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}+3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}\right)=850\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right)+3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}=\frac{17}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n-4+3\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n=\frac{17}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{32}{5}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{4}\right)^n=\frac{125}{64}\Leftrightarrow n=3.$$

В преобразованиях мы использовали формулу суммы n членов геометрической прогрессии:

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Таким образом, месторождение разрабатывалось 7 лет.

Ответ: 7 лет.

Пример 10: Курс рубля в течение некоторых двух месяцев уменьшался на одно и то же, не превышающее 22, число процентов. В начале первого месяца гражданин К. имел некоторую сумму (в долларах), которую он тогда же конвертировал в рубли. Двое других граждан, имея каждый рублевые суммы в 6,25 раза больше, чем та, которую получил гражданин К. от совершенной им валютной операции, конвертировали их в доллары: один — в конце первого месяца, а другой — в конце второго. При этом у одного из них долларов оказалось больше ровно на столько, сколько господин

К. имел в начале первого месяца. На сколько процентов за эти два месяца вырос курс доллара?

Решение: Пусть в начале первого месяца гражданин К. имел x долларов, за которые он тогда же получил y рублей. Тогда один из других граждан получил в конце первого месяца за $6{,}25y$ рублей $6{,}25x\left(1-\frac{p}{100}\right)$ долларов, второй в конце второго месяца — $6{,}25x\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$ долларов. Согласно условию задачи имеем следующее уравнение:

$$6{,}25x\left(1-\frac{p}{100}\right)-6{,}25x\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=x,$$

откуда $1-\frac{p}{100}=\frac{4}{5}$ или $1-\frac{p}{100}=\frac{1}{5}$. В первом случае $p = 20$, во втором — $p = 80$. Реализуется только первый случай. Таким образом, курс рубля по отношению к доллару уменьшался каждый из этих двух месяцев на 20%, значит, курс доллара по отношению к рублю вырос на 25% в месяц. Тогда за 2 месяца курс вырос в $1{,}25^2$ раза, то есть на 56,25%.

Ответ: На 56,25%.

Пример 11: 31 декабря 2018 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение: Пусть x — сумма ежегодного платежа. Согласно условию задачи имеем следующее уравнение:

$$\left(\left(9930000\cdot1{,}1-x\right)\cdot1{,}1-x\right)\cdot1{,}1-x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9930000\cdot1{,}1^3-x\left(1{,}1^2+1{,}1+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3{,}31x=13216830\Leftrightarrow x=3993000.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Пример 12: Евгений взял 15 января кредит на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. Каждый месяц 15-го числа долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найти наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн рублей.

Решение: Пусть, для определенности, Евгений выплачивает долг 14-го числа каждого месяца. Запишем в виде таблицы суммы этих выплат:

Дата	Сумма выплаты (в млн рублей)
14.02	$1+\frac{r}{100}-0,9$
14.03	$0,9\left(1+\frac{r}{100}\right)-0,8$
14.04	$0,8\left(1+\frac{r}{100}\right)-0,7$
14.05	$0,7\left(1+\frac{r}{100}\right)-0,6$
14.06	$0,6\left(1+\frac{r}{100}\right)-0,5$
14.07	$0,5\left(1+\frac{r}{100}\right)$

Согласно условию задачи имеем следующее неравенство:

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)(1+0,9+0,8+0,7+0,6+0,5)-$$

$$-(0,9+0,8+0,7+0,6+0,5)>1,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4,5\left(1+\frac{r}{100}\right)>4,75 \Leftrightarrow 1+\frac{r}{100}>\frac{19}{18} \Leftrightarrow r>\frac{50}{9}.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее полученному неравенству, — это $r = 6$.

Ответ: $r = 6$.

Пример 13: В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года. С февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга. Найти r, если известно, что, если выплачивать по 777 600 рублей, то кредит будет погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 1 317 600 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года.

Решение: Пусть x — сумма полученного кредита, $1+\frac{r}{100}=p$, $1\,317\,600 = a$, $777\,600 = b$. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}(((xp-b)p-b)p-b)-b=0,\\(xp-a)p-a=0.\end{cases}$$

Если мы домножим первое уравнение на p^2, а затем из второго уравнения вычтем первое, то получится уравнение

$$ap^3+ap^2-bp^3-bp^2-bp-b=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(p^3+p^2)-b(p+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p+1)((a-b)p^2-b)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2=\frac{b}{a-b}=1,44 \Leftrightarrow p=1,2.$$

Следовательно, $1+\frac{r}{100}=1,2$ и $r = 20$.

Ответ: $r = 20$.

Пример 14: В июле был взят кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года. С февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 77 200 рублей?

Решение: Пусть x — сумма кредита, y — размер ежегодного платежа.

Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1,2(1,2(1,2x-y)-y)-y=0, \\ 3y=x+77\,200; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 216x=455y, \\ 3y=x+77\,200; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=182\,000, \\ y=86\,400. \end{cases}$$

Таким образом, в банке было взято 182 000 рублей.

Ответ: 182 000 рублей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Оборудование изнашивается на 10% в год и списывается при износе более чем наполовину. Через сколько лет будет списано оборудование?

2. Найти первоначальную сумму вклада, если после истечения трех лет она выросла на 765,1 рубля при 2% годовых.

3. В городе N в течение двух лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей во втором году, если известно, что он на 5,3 меньше, чем процент роста населения за два года.

4. Спустя год после того, как некоторая сумма была внесена на банковский счет, вклад за счет процентов увеличился на 20 160 рублей. Добавив еще 79 840 рублей, вкладчик оставил свой вклад в банке еще на один год. По истечении этого периода общая сумма на банковском счете стала равна 628 160 рублей. Какой процент годовых выплачивает банк, если первоначальный взнос должен быть не менее 5000 рублей?

5. В коммерческий банк был сделан вклад под фиксированный процент годового дохода. За первый год величина вклада возросла на 40 000 рублей, а за последующие два года она увеличилась еще на 86 100 рублей. Какова была первоначальная величина вклада?

6. Заработная плата повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов повышалась зарплата в первый раз, если до первого повышения она была 70 тысяч рублей, а после второго составила 92 400 рублей?

7. В банк сроком на два года был сделан вклад в размере 1 600 000 рублей. При этом клиент рассчитал, что если он в конце каждого года будет снимать со своего вклада 592 000 рублей, то по истечении двух лет его вклад составит 752 000 рублей. Какой процент годовых по вкладу установлен в данном банке?

8. В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. тонн нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50%, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35 миллионов 650 тысяч тонн. Сколько всего лет разрабатывалось месторождение?

9. Гражданин положил в банк определенную сумму денег под постоянный месячный процент, рассчитывая получить за год доход 900 тысяч рублей. Через полгода ему пришлось снять со счета 400 тысяч рублей. Какова была величина исходного вклада, если в конце года сумма на счете составила 2 миллиона рублей?

10. Сергей взял 15 января кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца. Не ранее 2-го числа, но не позднее 14-го числа каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы 15-го числа каждого месяца долг был бы на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найти r.

11. В июле 2018 года для развития предприятия планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S — целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы. Каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года. С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга. В июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2018	2019	2020	2021	2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найти наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 миллионов рублей.

12. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 400 000 рублей. Условия его возврата таковы. Каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года. С февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. Найти число r, если известно, что кредит был полностью погашен за 2 года, причем в первый год было переведено 330 000 рублей, а во второй год — 121 000 рублей.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ГРАФИЧЕСКИЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

В данной главе приводятся задачи, в процессе решения которых приходится исследовать различные функции, причем как с помощью производной, так и без нее. Самая популярная из этих функций — квадратичная, графиком которой служит парабола. Хорошо известно, что максимум (или минимум) квадратичной функции достигается в вершине этой параболы. В некоторых задачах мы будем применять графическую иллюстрацию, изображая на координатной плоскости графики функций или области, задаваемые соответствующими неравенствами. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1: Прибыль P предприятия за год определяется соотношением $P = A\sqrt{X} - X$, где X — расходы на производство, A — некоторая положительная постоянная. В 2017 году прибыль P оказалась положительной и составила 40% от расходов X. В 2018 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была максимальной. Найти отношение расходов в 2017 году к расходам в 2018 году.

Решение: Для расходов в 2017 году имеем уравнение $0{,}4X = A\sqrt{X} - X$, откуда $X = \frac{A^2}{1{,}96}$.

Найдем теперь расходы в 2018 году. Рассмотрим функцию $f(X) = A\sqrt{X} - X$. Производная этой функции равна $f'(X) = \frac{A}{2\sqrt{X}} - 1$ и обращается в нуль в точке $X = \frac{A^2}{4}$. Кроме того, в этой точке производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $X = \frac{A^2}{4}$ — точка максимума. Таким образом, отношение расходов в 2017 году к расходам в 2018 году равно $\frac{A^2}{1{,}96} : \frac{A^2}{4} = \frac{100}{49}$.

Ответ: 100 : 49.

Пример 2: Стоимость изготовления m коробок равна $17 + 5m + m^2$. Определить количество коробок, при котором стоимость изготовления одной коробки минимальна.

Решение: Стоимость изготовления одной коробки равна $5 + m + \frac{17}{m}$. Рассмотрим функцию $f(x) = 5 + x + \frac{17}{x}$ при $x > 0$. Производная этой функции равна $f'(x) = 1 - \frac{17}{x^2}$ и обращается в нуль в точке $x = \sqrt{17}$. Кроме того, $f'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt{17}$ и $f'(x) > 0$ при $x > \sqrt{17}$. Поэтому на первом из указанных промежутков функция $f(x)$ убывает, на втором — возрастает, $x_0 = \sqrt{17}$ — точка минимума. Так как x_0 не является целым числом, необходимо проверить ближайшие целые числа, то есть $x = 4$ и $x = 5$. Так как $f(4) < f(5)$, то для минимизации стоимости изготовления одного изделия необходимо изготовить 4 коробки.

Ответ: $m = 4$.

Пример 3: Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа P и 2010 деталей типа Q. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Решение: Пусть x — число рабочих в бригаде, изготовляющей детали типа P, $192 - x$ — число рабочих в бригаде, изготовляющей детали типа Q; y — количество деталей типа Q, которое один рабочий делает за единицу времени, тогда $2y$ — количество деталей типа P, которое один рабочий делает за ту же единицу времени. Тогда время изготовления деталей типа P составит $t_1 = \frac{1005}{2yx}$, а время изготовления деталей типа Q есть $t_2 = \frac{2010}{y(192-x)}$. Минимальное время выполнения заказа будет достигаться при $t_1 = t_2$:

$$\frac{1005}{2xy} = \frac{2010}{y(192-x)}.$$

Решим уравнение $\frac{1}{2x} - \frac{2}{192-x} = 0$. Получим $x^* = 38\frac{2}{5}$.

Поскольку x^* не является целым числом, необходимо исследовать два близлежащих целых числа $x_1 = 38$ и $x_2 = 39$.

Если $x = 38$, $t_1 = \frac{1005}{76y}$, $t_2 = \frac{1005}{77y}$, поэтому время выполнения заказа равно $\frac{1005}{76y}$.

Если же $x = 39$, то в этом случае $t_1 = \frac{1005}{78y}$, а $t_2 = \frac{2010}{153y}$.

Здесь время выполнения заказа составит $\frac{2010}{153y}$.

Ясно, что минимальное время достигается при $x = 39$. Таким образом, рабочих фабрики следует разделить на бригады в количестве 39 и 153 человек.

Ответ: 39 и 153 человека.

Пример 4: Строительство нового завода стоит 78 миллионов рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ миллионов рублей в год. Если продукцию завода продать по цене P тысяч рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении P строительство завода окупится не более чем через 3 года?

Решение: Рассмотрим квадратичную функцию

$$y(x) = px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right) = -0{,}5x^2 + (p-2)x - 6.$$

Максимум этой функции достигается в вершине параболы $x_0 = p - 2$ (если вершина параболы лежит левее оси Oy, то максимум достигается при $x = 0$, что не имеет практического смысла) и равен

$$y(x_0) = -0{,}5(p-2)^2 + (p-2)^2 - 6 = 0{,}5(p-2)^2 - 6.$$

Согласно условию задачи имеем неравенство

$$\frac{78}{0{,}5(p-2)^2 - 6} \le 3 \Leftrightarrow 0{,}5(p-2)^2 - 6 \ge 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p-2)^2 \ge 64 \Leftrightarrow p \ge 10.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить $p = 10$.

Ответ: $p = 10$.

Пример 5: На автомобиле стоят два одинаковых номерных знака, которые можно менять местами — один спереди, другой сзади. Знак, стоящий спереди, за 6 лет эксплуатации приходит в негодность и подлежит замене. Знак, стоящий сзади, приходит в негодность за 12 лет. Износ можно считать пропорциональным времени. Какой максимальный срок (в годах) может прослужить один комплект из двух номерных знаков, если своевременно поменять передний и задний номерной знак местами?

Решение: Зависимость износа переднего номерного знака от времени задается формулой $y_1(t)=\frac{t}{6}$ (когда $y_1(t)$ становится равным 1, знак приходит в негодность), а заднего — $y_2(t)=\frac{t}{12}$. Пусть t_1 и t_2 — это те интервалы времени, которые изначально передний номерной знак находился соответственно спереди и сзади. Тогда изначально задний номерной знак спереди и сзади находился в течение интервалов времени t_2 и t_1 соответственно. Чтобы комплектом можно было пользоваться, необходимо выполнение следующих неравенств:

$$y_1(t_1)+y_2(t_2)\le 1 \Leftrightarrow \frac{t_1}{6}+\frac{t_2}{12}\le 1$$

и

$$y_2(t_1)+y_1(t_2)\le 1 \Leftrightarrow \frac{t_1}{12}+\frac{t_2}{6}\le 1.$$

Имеем следующую систему:

$$\begin{cases}\frac{t_1}{6}+\frac{t_2}{12}\le 1,\\ \frac{t_1}{12}+\frac{t_2}{6}\le 1;\end{cases} \Rightarrow \frac{t_1}{6}+\frac{t_2}{12}+\frac{t_1}{12}+\frac{t_2}{6}\le 2 \Leftrightarrow t_1+t_2\le 8.$$

При этом равенство $t_1 + t_2 = 8$ достигается при $t_1 = t_2 = 4$ (эти числа удовлетворяют системе неравенств). Таким образом, один комплект из двух номерных знаков может прослужить максимум 8 лет.

Ответ: 8 лет.

Пример 6: На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляются в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в начале второго квартала, начисляются в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

Решение: Пусть x — это та сумма, которую вкладчик положил на счет в начале первого квартала. Согласно условиям задачи, в конце второго квартала на счете у вкладчика будет находиться сумма, равная $\left(x\left(1+\frac{r_1}{100}\right)-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)$, причем $r_1 + r_2 = 150$. Пусть $r_1 = t$, тогда задача сводится к нахождению точки максимума функции

$$f(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{150-t}{100}\right)=10^{-4}(50+t)(250-t).$$

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому максимум этой функции достигается в вершине этой параболы $t_0 = 100$. Таким образом, ответом к задаче будет служить $r_1 = 100$.

Ответ: $r_1 = 100$.

Пример 7: Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью 2500 м^2. Стоимость одного дома площадью a м^2 складывается из стоимости материалов $p_1a^{\frac{3}{2}}$ тысяч рублей, стоимости строительных работ p_2a тысяч рублей и стоимости отделочных работ $p_3a^{\frac{1}{2}}$ тысяч рублей. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?

Решение: Сначала найдем числа p_1, p_2 и p_3. Согласно условиям задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} p_2^2 = p_1p_3, \\ p_1+p_2+p_3=21, \\ p_1p_2p_3=64, \end{cases}$$

которая имеет решением тройки чисел (1, 4, 16) и (16, 4, 1). Кроме того, должно выполняться неравенство $p_1a^{\frac{3}{2}} < p_2a+p_3a^{\frac{1}{2}}$, где $a=\dfrac{2500}{63}$. В первом случае это неравенство имеет вид $a<4\sqrt{a}+16$, что эквивалентно неравенству $a<24+8\sqrt{5}$, во втором — $16a<4\sqrt{a}+1$, что равносильно неравенству $a<\dfrac{3+\sqrt{5}}{32}$. Ясно, что для данного a реализуется только первый случай. Итак, $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 16$.

Пусть построено x домов. Тогда площадь одного дома равна $a=\dfrac{2500}{x}$ и затраты на строительство равны

$$S=\left[\left(\frac{2500}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+4\cdot\frac{2500}{x}+16\cdot\left(\frac{2500}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot x=$$

$$=\frac{125000}{\sqrt{x}}+10000+800\sqrt{x}\geq$$

$$\geq 10000+2\sqrt{\frac{125000}{\sqrt{x}}\cdot 800\sqrt{x}}=30000$$

тысяч рублей согласно неравенству, связывающему среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $\dfrac{125000}{\sqrt{x}}=800\sqrt{x}$, то есть x = 156,25. Так как получилось нецелое число, необходимо проверить x = 156 и x = 157. Если x = 156, то S = 30 000,005; если же x = 157, то S = 30 003,947. Поэтому выгоднее строить 156 домов.

Ответ: 156 домов.

Пример 8: Инвестору предлагаются два проекта для вложения денежных средств. В каждом проекте зависимость прибыли y (тыс. рублей) от вложений x (тыс. рублей) определяется квадратичной функцией $y(x) = ax^2 + bx$ с коэффициентами a и b, зависящими от проекта. Известно, что при инвестировании средств только в первый проект максимальная прибыль в 200 тыс. рублей достигается при вложении 100 тыс. рублей, а при инвестировании только во второй проект максимальная прибыль в 150 тыс. рублей достигается при вложении 150 тыс. рублей. Инвестор решил вложить 290 тыс. рублей в оба проекта. Какую сумму ему следует вложить в каждый из проектов, чтобы общая прибыль была максимальной? Найти максимальную общую прибыль.

Решение: Как известно, квадратичная функция $y = ax^2 + bx$ свое максимальное значение на промежутке $x \in (0, +\infty)$ принимает в вершине параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и только при $a < 0$ и $b > 0$. Тогда согласно первому из условий задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} a < 0, \\ -\dfrac{b}{2a} = 100, \\ y(100) = 200; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ b = -200a, \\ 10000a + 100b = 200; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ b = -200a, \\ 100a + b = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ b = -200a, \\ 100a - 200a = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{50}, \\ b = 4. \end{cases}$$

Таким образом, для первого проекта имеем функцию

$$y = -\frac{1}{50}x^2 + 4x.$$

Аналогично, для второго проекта получаем:

$$\begin{cases} a < 0, \\ -\dfrac{b}{2a} = 150, \\ y(150) = 150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ b = -300a, \\ 22500a + 150b = 150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ b = -300a, \\ 150a + b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ b = -150a, \\ 150a - 300a = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{150}, \\ b = 2. \end{cases}$$

Следовательно, для второго проекта квадратичная функция имеет вид

$$y = -\frac{1}{150}x^2 + 2x.$$

Пусть теперь t и $(290 - t)$ — это те суммы, которые инвестор намерен вложить соответственно в первый и второй проекты. Тогда общая прибыль будет равна

$$y = \left(-\frac{1}{50}t^2 + 4t\right) + \left(-\frac{1}{150}(290 - t)^2 + 2(290 - t)\right) =$$

$$= -\frac{2}{75}t^2 + \frac{88}{15}t + \frac{290}{15}.$$

Максимум этой функции достигается в точке $t_0 = \frac{88}{15} : \frac{4}{75} =$ $= 110$ и равен $y\ (110) = 342$. Значит, в первый проект следует вложить 110 тыс. рублей, во второй — 180 тыс. рублей. Общая прибыль при этом составит 342 тыс. рублей.

Ответ: 110 тыс. рублей в первый проект, 180 тыс. рублей во второй проект; максимальная общая прибыль 342 тыс. рублей.

Пример 9: Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно также, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют $\left(\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right)$ тысяч рублей, а цена реализации каждого телевизора равна $\left(540 - \frac{3n}{10}\right)$ тыс. рублей. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая ежемесячная прибыль.

Решение: Согласно условиям задачи, ежемесячная прибыль предприятия может быть задана следующей функцией:

$$f(n) = n\left(\left(540 - \frac{3n}{10}\right) - \left(\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right)\right) =$$

$$= -\frac{3n^2}{10} + 270n - 40500 + |90n - 40500|.$$

Если $90n \geq 40\,500$, то есть $n \geq 450$, то

$$f(n)=-\frac{3n^2}{10}+270n-40\,500+(90n-40\,500)=$$

$$=-\frac{3n^2}{10}+360n-81\,000.$$

Максимум этой функции достигается в точке

$$n_0=360:\frac{3}{5}=600,$$

максимальное значение равно $f(600)=27\,000$. Если же $90n<40\,500$, то есть $n<450$, имеем:

$$f(n)=-\frac{3n^2}{10}+270n-40\,500-(90n-40\,500)=-\frac{3n^2}{10}+180n.$$

Максимум этой функции достигается в точке $n_0=180:\frac{3}{5}=$ $=300$, максимальное значение равно $f(300)=27\,000$. Таким образом, ежемесячный объем производства должен быть равен 600 либо 300 телевизорам.

Ответ: 300 или 600.

Пример 10: На полевых работах геологу нужно собрать образцы типов A и B. Вес одного образца типа A равен 3 кг, а типа B — 4 кг. По каждому из образцов типа A требуется провести 5 видов анализов, а по каждому из образцов типа B — 7 видов. Известно, что вес всех собранных образцов не должен превышать 149 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее чем 249. Какое минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов можно собрать при указанных условиях?

Решение: Пусть x и y — количество собранных образцов типа A и B соответственно, $t=x+y$ — суммарное количество образцов. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases}3x+4y\le 149,\\ 5x+7y\ge 249,\\ t=x+y;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4(t-x)\le 149,\\ 5x+7(t-x)\ge 249,\\ y=t-x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le\dfrac{149+x}{4},\\ t\ge\dfrac{249+2x}{7}.\end{cases}$$

На координатной плоскости Oxt изобразим множество точек, являющихся решением последней системы неравенств с учетом условия $x > 0$ и $t > 0$ (рисунок 1).

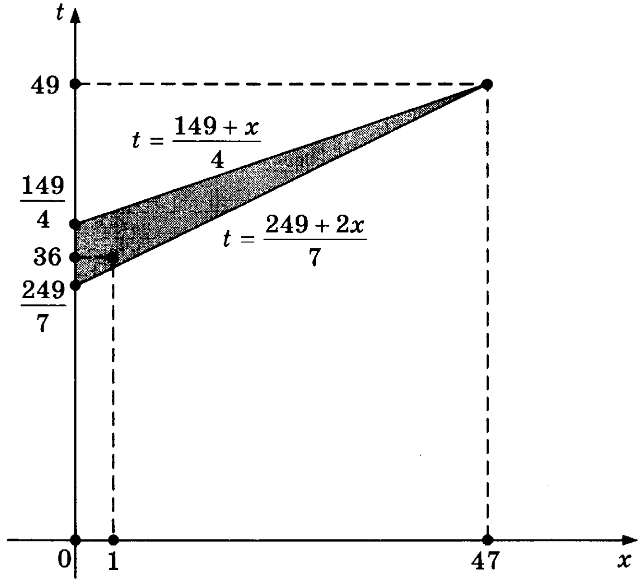


Рис. 1

Так как x и t — целые числа, то точки этого множества с наименьшей ординатой есть точки $(x,t) = \{(1,36); (2,36)\}$, а точка с наибольшей ординатой есть точка $(x, t) = (47,49)$.

Таким образом, при данных условиях можно собрать минимально 36 образцов, максимально — 49 образцов.

Ответ: 36 и 49.

Задачи для самостоятельного решения

1. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $(90 + 0{,}4v^2)$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

2. Стоимость изготовления n банок равна $24 + 4n + n^2$. Определить количество банок, при котором стоимость изготовления одной банки минимальна.

3. Кооперативу садоводов предлагается указать длину и ширину земельного участка прямоугольной формы, одна из сторон которого должна прилегать к шоссе. Нужно, чтобы площадь участка равнялась 150 га. Участок придется огородить забором, причем 1 погонный метр забора, прилегающий к шоссе, стоит 10 000 руб., а один погонный метр забора на трех оставшихся сторонах стоит 5000 руб. Какими должны быть стороны участка, чтобы стоимость забора была минимальной?

4. Цех получил заказ на изготовление 2000 деталей типа A и 14 000 деталей типа B. Каждый из 146 рабочих цеха затрачивает на изготовление одной детали типа A время, за которое он мог бы изготовить 2 детали типа B. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

5. Инвестору предлагаются два проекта для вложения денежных средств. В каждом проекте зависимость прибыли y от вложений x определяется квадратичной функцией $y(x) = ax^2 + bx$ с коэффициентами a и b, зависящими от проекта. Известно, что при инвестировании средств только в первый проект максимальная прибыль в 250 тыс. рублей достигается при вложении 100 тыс. рублей, а при инвестировании только во второй проект максимальная прибыль в 200 тыс. рублей достигается при вложении 200 тыс. рублей. Инвестор решил вложить 240 тыс. рублей в оба проекта. Какую сумму ему следует вложить в каждый из проектов, чтобы общая прибыль была максимальной? Найти максимальную общую прибыль.

6. Одна и та же резина на передних колесах автомобиля выходит из строя через 24 000 км, а на задних — через 36 000 км. Каково максимальное расстояние, которое автомобиль может пройти на этой резине, если передние и задние колеса можно менять местами?

7. При проведении геологических исследований требуется пробурить скважины типов A и B. Каждая скважина типа A имеет глубину 70 метров, а типа B — 90 метров. Расходы на бурение одной скважины типа A составляют 500 тыс. рублей, а одной скважины типа B — 600 тыс. рублей. Суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 3290 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 22 300 тыс. рублей. Какое минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов можно пробурить при указанных условиях?

8. Предприятие производит детские велосипеды и является убыточным. Известно, что при изготовлении m велосипедов в месяц расходы предприятия на выпуск одного велосипеда составляют $\left(\dfrac{168\,000}{m}+36-\left|12-\dfrac{72\,000}{m}\right|\right)$ тыс. рублей, а цена реализации каждого велосипеда равна $\left(72-\dfrac{3m}{1000}\right)$ тыс. рублей.

Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего возможного уровня.

§ 4. ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

В некоторых задачах, связанных с экономикой, необходимо не выходя за рамки данных в условии задачи минимизировать (или максимизировать) какую-либо величину. Такие задачи сложны тем, что не имеют какого-либо единого алгоритма решения. Приходится учитывать различные факторы, а именно: целочисленность решений, их неотрицательность (или положительность) и т.д. Как правило, приходится разбирать большое количество вариантов. Тем не менее иногда для решения нужна просто хорошая идея. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1: Имеются три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40% металла B, 30% металла C. Сколько кг каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

Решение: Пусть x, y и z — количество (в килограммах) соответственно первого, второго и третьего сплавов в новом сплаве. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ 0,2x + 0,5y + 0,3z = 2,5, \\ 0,3x + 0,2y + 0,4z = t; \end{cases}$$

при этом t должно быть минимально возможным. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ 0,2x + 0,5y + 0,3z = 2,5, \\ 0,3x + 0,2y + 0,4z = t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10, \\ 2x + 5y + 3z = 25, \\ 3x + 2y + 4z = 10t; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y - z, \\ (20 - 2y - 2z) + 5y + 3z = 25, \\ (30 - 3y - 3z) + 2y + 4z = 10t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y - z, \\ 3y + z = 5, \\ 30 - y + z = 10t; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y - z, \\ y = \dfrac{5 - z}{3}, \\ 30 - \dfrac{5 - z}{3} + z = 10t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y - z, \\ y = \dfrac{5 - z}{3}, \\ 85 + 4z = 30t. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что t будет минимально возможным $\left(t = \dfrac{85}{30}\right)$, если $z = 0$. При этом $y = \dfrac{5}{3}$ и $x = \dfrac{25}{3}$. Таким образом, надо взять $\dfrac{25}{3}$ кг первого сплава и $\dfrac{5}{3}$ кг второго сплава.

Ответ: $\dfrac{25}{3}$ кг первого сплава и $\dfrac{5}{3}$ кг второго сплава.

Пример 2: Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определить количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

Решение: Для любого положительного x и любого $k > 1$ имеем $(x+1000)k > xk+1000$, поэтому первое выступление кандидата должно быть в газете. Далее, 112 тысяч рублей хватит либо на два выступления по радио и одно по телевидению, либо на два выступления по телевидению, все остальные варианты явно хуже. В первом случае, независимо от порядка выступления, число кандидатов увеличивается в $1{,}4 \times 1{,}4 \times 1{,}8 = 3{,}528$ раза, во втором — в $1{,}8 \times 1{,}8 = 3{,}24$ раза. Ясно, что первый вариант предпочтительнее. Итак, сначала надо выступить в газете, а затем в любом порядке два раза по радио и один по телевидению.

Ответ: Сначала выступление в газете, затем в любом порядке два раза по радио и один по телевидению.

Пример 3: Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Решение: Пусть x, y и z — число домов на 12, 16 и 21 квартиру соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Какое наибольшее значение может принять выражение $12x + 16y + 21z$ при условиях, что $70x + 110y + 150z \le 900$ и $100x + 150y + 200z \le 1300$?» Пусть $t = 12x + 16y + 21z$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 12x+16y+21z, \\ 70x+110y+150z \le 900, \\ 100x+150y+200z \le 1300; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(t-16y-21z), \\ 7x+11y+15z \le 90, \\ 2x+3y+4z \le 26; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(t - 16y - 21z), \\ 7t + 20y + 33z \le 1080, \\ t + 2y + 3z \le 156. \end{cases}$$

Так как числа y и z не принимают отрицательных значений и хотя бы одно из них отлично от нуля, из последнего неравенства системы следует, что $t \le 154$. Пусть $t = 154$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(154 - 16y - 21z), \\ 20y + 33z \le 2, \\ 2y + 3z \le 2. \end{cases}$$

Второе условие системы не может быть выполнено при указанных y и z. Аналогичная ситуация и при $t = 153$ и $t = 152$. Пусть $t = 151$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(151 - 16y - 21z), \\ 20y + 33z \le 23, \\ 2y + 3z \le 5. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют пара чисел $y = 1$, $z = 0$, однако x в этом случае не является целым числом. То же самое произойдет и при $t = 150$. Пусть теперь $t = 149$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(149 - 16y - 21z), \\ 20y + 33z \le 37, \\ 2y + 3z \le 7. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют пары чисел $y = 1$, $z = 0$ и $y = 0$, $z = 1$, однако x снова ни в одном из случаев не является целым числом. И, наконец, если $t = 148$, система примет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(148 - 16y - 21z), \\ 20y + 33z \le 44, \\ 2y + 3z \le 8 \end{cases}$$

и будет иметь единственное целочисленное решение $x = 11$, $y = 1$ и $z = 0$.

Замечание: Случай $y = z = 0$ предлагается разобрать самостоятельно.

Ответ: Один дом на 16 квартир и 11 домов на 12 квартир.

Пример 4: Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Решение: Пусть x, y и z — количество лис, леопардов и львов соответственно (x, y и z — натуральные числа, так как по предположению в зоопарке живут и лисы, и леопарды, и львы). Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких натуральных x, y и z, таких, что $2x + 14y + 21z = 111$, выражение $20x + 160y + 230z$ принимает наибольшее значение?»

Пусть $t = 2x + 16y + 23z$. Выразив x через t, y и z и подставив в первое уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} (t - 16y - 23z) + 14y + 21z = 111, \\ 2x = t - 16y - 23z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2y + 2z + 111, \\ 2x = t - 16y - 23z. \end{cases}$$

Значит, t максимально, когда максимально $y + z$. Это означает, что леопардов и львов в сумме должно быть как можно больше. Но так как леопард съедает меньше мяса, чем лев, надо брать как можно больше леопардов. При этом наибольшее возможное число леопардов — семь, иначе им не хватит на всех 111 кг мяса. Пусть $y = 7$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 14 + 2z + 111, \\ 2x = t - 112 - 23z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2z + 125, \\ 2x = 13 - 21z. \end{cases}$$

Так как $2x \geq 2$, то и $13 - 21z \geq 2$. Но это неравенство не имеет решений в натуральных числах, поэтому последняя система также решений не имеет. Пусть $y = 6$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 12 + 2z + 111, \\ 2x = t - 96 - 23z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2z + 123, \\ 2x = 27 - 21z. \end{cases}$$

Так как $2x \geq 2$, то и $27 - 21z \geq 2$. Следовательно, $z = 1$, поскольку z — натуральное число. Тогда решением системы служит пара чисел $x = 3$ и $y = 1$. Таким образом, в зоопарке должно быть 3 лисы, 6 леопардов и 1 лев.

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов и 1 лев.

Пример 5: Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет одно поле втрое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на 2 часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за 7 часов 12 минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется 40 минут.

Решение: Обозначим через x, y и z соответственно производительность первого, второго и третьего тракторов, то есть ту часть (одного) поля, которую этот трактор может вспахать за один час. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 3y, \\ \dfrac{1}{z} - 2 = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{36}{5}. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим, что

$$x + y + z = \frac{5}{36} \Rightarrow 4y + z = \frac{5}{36} \Leftrightarrow z = \frac{5}{36} - 4y.$$

Подставим полученные выражения переменных x и z через y во второе уравнение системы. Имеем:

$$\frac{1}{\frac{5}{36} - 4y} = 2 + \frac{1}{3y} \Leftrightarrow \frac{36}{5 - 144y} = \frac{1+6y}{3y} \Leftrightarrow 864y^2 + 222y - 5 = 0.$$

Положительным корнем этого уравнения является $y = \dfrac{1}{48}$, откуда $x = \dfrac{1}{16}$ и $z = \dfrac{1}{18}$. Итак, первый трактор может вспахать одно поле за 16 часов, второй — за 48 часов, третий — за 18 часов.

Оптимальная стратегия вспашки двух полей следующая. Сначала первый и второй трактора начинают работать на первом поле, а третий — на втором поле. Через некоторое время t второй трактор (как самый медленно работающий) начинает переезжать на второе поле, а первый и третий продолжают работу. И, наконец, второй трактор, приехав на второе поле, совместно с третьим заканчивают работу. Время t подбирается таким образом, чтобы окончание работы второго и третьего тракторов совпало бы с окончанием работы первого трактора. Найдем это значение t. Для этого составим следующее уравнение:

$$\frac{1-(x+y)t}{x}+t=t+\frac{2}{3}+\frac{1-z\left(t+\frac{2}{3}\right)}{y+z}.$$

Здесь в левой и правой частях уравнения мы считаем время, прошедшее от начала до окончания работы соответственно на первом и втором полях, в числителе первой дроби — та часть первого поля, которую необходимо вспахать первому трактору после отъезда второго; в числителе второй дроби — часть второго поля, которую необходимо вспахать совместно второму и третьему тракторам после приезда второго. Имеем:

$$16\left(1-\frac{t}{12}\right)=\frac{2}{3}+\frac{144}{11}\left(1-\frac{t+\frac{2}{3}}{18}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16-\frac{4t}{3}=\frac{2}{3}+\frac{144}{11}\left(\frac{26}{27}-\frac{t}{18}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t}{3}-\frac{8t}{11}=16-\frac{2}{3}-\frac{416}{33}\Leftrightarrow\frac{20t}{33}=\frac{30}{11}\Leftrightarrow t=\frac{9}{2}.$$

Подставив найденное значение t в левую (или правую) часть исходного уравнения, получим, что общее время вспашки двух полей составляет 14,5 часа.

Ответ: 14 часов 30 минут.

Пример 6: На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 140 рублей. Тетрадь в клетку стоит 3 рубля, тетрадь в линейку — 2 рубля. При закупке число тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более чем на 9. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество тетрадей, при этом тетрадей в линейку нужно закупить как можно меньше. Сколько тетрадей в клетку и сколько тетрадей в линейку можно закупить при указанных условиях?

Решение: Пусть x и y — количество закупленных тетрадей в клетку и в линейку соответственно, $t = x + y$ — общее количество тетрадей. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 140, \\ |x - y| \le 9, \\ t = x + y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(t - y) + 2y \le 140, \\ t - 2y \ge -9, \\ t - 2y \le 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t - 2y \le 280, \\ 2y - t \le 9, \\ t - 2y \le 9. \end{cases}$$

Сложив первые два неравенства, получим неравенство $5t \le 289$, которое эквивалентно неравенству $t \le 57$, поскольку t — целое число. Следовательно, максимально возможное значение переменной t это $t = 57$. При этом исходная система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 171 - y \le 140, \\ 57 - 2y \ge -9, \\ 57 - 2y \le 9; \end{cases} \Leftrightarrow 31 \le t \le 33.$$

Ясно, что минимально возможное значение переменной y это $y = 31$, при этом $x = t - y = 26$. Таким образом, нужно купить 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку.

Ответ: 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку.

Пример 7: Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее количество меди может быть в этом новом сплаве?

Решение: Пусть x, y и z — процентное содержание соответственно первого, второго и третьего сплавов в новом сплаве. Тогда, согласно условиям задачи, $0{,}3x + 0{,}15z$; $0{,}9y + 0{,}6z$ и $0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z$ — процентное содержание соответственно никеля, марганца и меди в новом сплаве. Значит, условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Какое наименьшее и какое наибольшее значения может принимать выражение $0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z$ при условии, что $0{,}9y + 0{,}6z = 40$ и $x + y + z = 100$?» Пусть $0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z = t$, тогда $14x = 20t - 2y - 5z$. Имеем:

$$\begin{cases} 0,9y + 0,6z = 40, \\ x + y + z = 100, \\ 14x = 20t - 2y - 5z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y + 6z = 400, \\ 14x + 14y + 14z = 1400, \\ 14x = 20t - 2y - 5z; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y + 6z = 400, \\ 20t + 12y + 9z = 1400, \\ 14x = 20t - 2y - 5z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27y + 18z = 1200, \\ 18z = 2800 - 24y - 40t, \\ 14x = 20t - 2y - 5z; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40t = 1600 + 3y, \\ 9y + 6z = 400, \\ 14x = 20t - 2y - 5z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что наименьшее возможное значение t достигается при $y = 0$ и равно $t = 40$. При этом $z = 66\frac{2}{3}$, а $x = 33\frac{1}{3}$. С другой стороны, t максимально, когда максимально y. Но из второго уравнения системы вытекает, что y принимает наибольшее значение при $z = 0$ и равно $y = 44\frac{4}{9}$. При этом $t = 43\frac{1}{3}$ и $x = 55\frac{5}{9}$. Таким образом, в новом сплаве меди может содержаться от 40% до $43\frac{1}{3}\%$.

Ответ: 40% и $43\frac{1}{3}\%$.

Пример 8: В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. рублей и 12 кг для первого типа, 500 тыс. рублей и 16 кг для второго типа, 600 тыс. рублей и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Решение: Обозначим через x, y и z число деталей первого, второго и третьего типа соответственно, x, y и z — натуральные числа. Условие задачи можно сформулировать следующим образом. «При условии $12x + 16y + 15z = 326$ найти наибольшее и наименьшее значения суммарной стоимости комплектующих изделий. Обозначим ее $100t$. Тогда $100t = 100\,(4x + 5y + 6z)$». Выразив x из первого равенства и подставив во второе, получим, что $3t = 326 + 3z - y$. Найдем сначала максимально возможное значение t. Ясно, что z надо брать как можно большим, а y как можно меньшим. Если $z = 20$, а $x = y = 1$, то суммарный вес комплектующих будет превосходить 326 кг. Если $z = 19$, то $3t = 383 - y$. Минимальное значение y, при котором t является целым числом, это $y = 2$. Однако при этих значениях z и y переменная x не принимает целочисленного значения. Наконец, если $z = 18$, то $3t = 380 - y$, откуда $y = 2$, $t = 126$ и $x = 2$. Ясно, что таким образом мы нашли максимально возможное значение переменной t.

Теперь найдем максимальное значение y, которому будет соответствовать минимальное значение t. По той же причине, что и в предыдущем доказательстве, y не может быть больше либо равен 19. Если $y = 18$, то $3t = 3z + 308$, что невозможно, так как 308 не делится на 3. Пусть $y = 17$, имеем $3t = 309 + 3z$, то есть $t = 103 + z$. При $z = 1$ получаем, что $4x + 85 + 6 = 104$ — это уравнение не имеет решений в целых числах. Наконец, если $z = 2$, тогда $t = 105$, $4x + 85 + 12 = 105$ и $x = 2$. Таким образом, мы нашли минимальное значение t.

Замечание: Необходимо проверить, что $z = 1$ не является решением ни при каких x и y, что предоставляется сделать читателю.

Ответ: 12 600 и 10 500 тыс. рублей.

Пример 9: Паром грузоподъемностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джипов. Вес и стоимость перевозки одного джипа составляют 3 тонны и 600 рублей, а грузовика — 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джипов и грузовиков при данных условиях.

Решение: Пусть x и y — количество перевозимых на пароме джипов и грузовиков соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 5y \le 109, \\ y \ge 1,2x, \\ 600x + 700y = 100t; \end{cases}$$

где $100t$ — суммарная стоимость перевозки всех джипов и грузовиков, которую надо сделать максимальной. Исключая из системы переменную x, получаем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t-7y}{6}, \\ \dfrac{t-7y}{2} + 5y \le 109, \\ y \ge \dfrac{t-7y}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{218-t}{3}, \\ y \ge \dfrac{t}{12}; \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{12} \le \frac{218-t}{3} \Leftrightarrow t \le 174,4.$$

Так как t — целое число, получаем, что $t \le 174$. Пусть $t = 174$. Имеем:

$$\begin{cases} y \le \dfrac{44}{3}, \\ y \ge \dfrac{174}{12} \end{cases} —$$

нет целых решений. Если $t = 173$, получаем

$$\begin{cases} y \le 15, \\ y \ge \dfrac{173}{12}; \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = \frac{68}{6} —$$

не является целым числом. При $t = 172$ имеем

$$\begin{cases} y \le \dfrac{46}{3}, \\ y \ge \dfrac{172}{12}; \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = \frac{67}{6} —$$

не является целым числом. И, наконец, если $t = 171$, получаем

$$\begin{cases} y \le \dfrac{47}{3}, \\ y \ge \dfrac{172}{12}; \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = 11.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить сумма $100t = 17\ 100$ рублей.

Ответ: 17 100 рублей.

Пример 10: С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Решение: Покажем сначала, как все блоки можно перевезти за 20 рейсов. Сначала грузим в машину один большой и 30 маленьких блоков, и делаем таких 16 рейсов. По объему это как раз составляет 44 маленьких блока, а по весу — $3{,}6 + 30 \cdot 0{,}2 = 9{,}6$ тонны за один рейс. После этого у нас остается 8 больших и 30 маленьких блоков, и мы их перевозим за 4 рейса следующим образом. В машину грузим по 2 больших и 8 маленьких блоков (последние два рейса — по 7 маленьких блоков). По объему это составляет $28 + 8 = 36$ маленьких блоков, а по весу — $2 \cdot 3{,}6 + 8 \cdot 0{,}2 = 8{,}8$ тонны за каждый рейс (меньше за последние два рейса).

Теперь докажем, что все блоки нельзя перевезти за 19 рейсов. Действительно, суммарный объем всех блоков равен $24 \cdot 14 + 510 = 846$ маленьких блоков, а в 19 машин можно погрузить максимум $19 \cdot 44 = 836$ маленьких блоков. Таким образом, минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков, равно 20.

Ответ: 20 рейсов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеются три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 30% металла A, 50% металла B, 20% металла C. Второй сплав содержит 30% металла A, 30% металла B, 40% металла C. Третий сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 15 килограммов нового сплава, который содержал бы 40% металла B, а процентное содержание металла C было бы минимально возможным?

2. Тремя сеялками нужно засеять пшеницей два одинаковых поля. При работе в одиночку третья сеялка засеет одно поле втрое быстрее, чем вторая. Вторая и третья сеялки, работая вместе, засеют одно поле на 5 часов быстрее, чем первая сеялка при работе в одиночку. Все три сеялки при совместной работе засеют одно поле за 6 часов. Найти наименьшее время, за которое можно засеять оба поля при условии, что все сеялки начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любой сеялке требуется 1 час 20 минут.

3. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 6-квартирного дома необходимо 30 деталей первого и 40 деталей второго вида. Для 10-квартирного дома требуется 40 и 60, а для дома на 14 квартир нужно 90 и 120 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

4. В контейнер упакованы комплектующие изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тысяч рублей и 12 килограммов для первого типа и 600 тысяч рублей и 15 килограммов для второго типа. Общий вес комплектующих равен 321 килограмму. Определить минимальную и максимальную возможные суммарные стоимости находящихся в контейнере комплектующих изделий.

5. Школа хочет приобрести наборы учебных пособий трех видов на сумму 22 000 рублей, при этом должны быть куплены наборы всех трех видов и истрачена вся сумма.

Набор из 5 пособий стоит 500 рублей, набор из 19 пособий — 1800 рублей, набор из 16 пособий — 1500 рублей. Сколько наборов каждого типа следует купить, чтобы общее количество купленных пособий было наибольшим при заданных условиях?

6. В профком поступили путевки трех типов на отдых в санатории. Одна путевка первого типа стоит 4 тысячи рублей, одна путевка второго типа — 6 тысяч рублей, одна путевка третьего типа — 9 тысяч рублей. По путевке первого типа можно отдыхать 8 дней, по путевке второго типа — 14 дней, по путевке третьего типа — 20 дней. Сколько путевок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла 100 тысяч рублей?

7. Детский сад хочет приобрести на сумму 2200 рублей наборы конфет. Наборы одного типа стоят 50 рублей (в каждой коробке 10 конфет), наборы другого типа — 180 рублей (в каждой коробке 38 конфет), наборы третьего типа — 150 рублей (в каждой коробке 32 конфеты). Сколько коробок каждого типа должен купить детский сад, чтобы общее число купленных конфет было максимальным?

8. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 30 рублей, роза — 40 рублей. На покупку гвоздик и роз можно потратить не более 710 рублей. При покупке число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

9. Из пункта A в пункт B по железной дороге нужно перевезти 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона равна 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.

10. Автофургон грузоподъемностью 339 кг перевозит ящики с виноградом и яблоками. Вес и стоимость одного ящика с виноградом составляют 15 кг и 10 условных единиц, ящика с яблоками — 27 кг и 8 условных единиц соответственно.

Известно, что количество загруженных на автофургон ящиков с виноградом составляет не более 70% от количества загруженных ящиков с яблоками. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех ящиков с виноградом и яблоками, перевозимых автофургоном при данных условиях.

§ 5. СПЕЦИФИКА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В данной главе будут разобраны задачи, при решении которых используются различные свойства целых чисел, такие как делимость, возможность конечного перебора чисел, заключенных в интервал, и другие. Более подробно с задачами такого типа можно ознакомиться в книге того же автора «Задание 19. Решение задач и уравнений в целых числах». Мы же разберем несколько примеров, имеющих экономический уклон.

Пример 1: В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии свою успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

Решение: Пусть x — число учеников в классе. Ясно, что x будет минимальным, если минимально число учеников, повысивших во втором полугодии свою успеваемость. Пусть это будет один ученик. Число 1 от числа x составляет $\frac{1}{x}\cdot 100\%$. Согласно условию задачи имеем:

$$2,9\% \le \frac{1}{x}\cdot 100\% \le 3,1\% \Leftrightarrow \frac{100}{3,1} \le x \le \frac{100}{2,9}.$$

Только два целых числа x удовлетворяют полученным неравенствам: это $x = 33$ и $x = 34$. Ясно, что меньшее среди них — это $x = 33$.

Замечание: Если бы полученный промежуток не содержал целых чисел, необходимо было рассмотреть случай $x = 2$ и т.д.

Ответ: 33.

Пример 2: Брокерская фирма выставила на торги акции двух компаний: нефтяной компании — по 100 долларов за акцию и газовой компании— по 65 долларов 60 центов за акцию. Общая сумма выручки оказалась равной 13 120 долларам.

Найти сумму выручки, полученной за акции газовой компании.

Решение: Пусть x и y — количество проданных акций нефтяной и газовой компаний соответственно. Согласно условию задачи имеем:

$$100x + 65{,}6y = 13\,120.$$

Поделив обе части равенства на 65,6, получим

$$100x + 65{,}6y = 13\,120 \Leftrightarrow \frac{125}{82}x + y = 200.$$

Так как число $\frac{125}{82}x$ является целым, а числа 125 и 82 взаимно простые, то x должно делиться на 82 без остатка. Следовательно, $x = 82$, так как иначе число $y = 200 - \frac{125}{82}x$ будет отрицательным. Таким образом, выручка от продажи акций газовой компании составляет

$$65{,}6y = 13\,120 - 100x = 4920 \text{ долларов.}$$

Ответ: 4920 долларов.

Пример 3: В первый день у Васи было денег на 30 рублей больше, чем у Пети. Вася внес на покупку книг $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя — $\frac{1}{2}$ часть своих денег, при этом Петя внес на 20 рублей больше Васи. На второй день мальчики пошли в магазин за тетрадями. На этот раз у Васи было на 60 рублей больше, чем у Пети. На покупку тетрадей Вася снова внес $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя внес $\frac{1}{4}$ часть своих денег, при этом Вася внес на 40 рублей больше Пети. Сколько денег было у

Пети в первый и второй день, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

Решение: Пусть в первый и второй день у Пети было соответственно x и y рублей, тогда у Васи — соответственно $x + 30$ и $y + 60$ рублей. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+30}{n} = 20, \\ \dfrac{y+60}{n} - \dfrac{y}{4} = 40; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xn - 2x - 60 = 40n, \\ 4y + 240 - yn = 160n; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{40n+60}{n-2}, \\ y = \dfrac{240-160n}{n-4}. \end{cases}$$

Так как x и y — положительные числа, имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{40n+60}{n-2} > 0, \\ \dfrac{240-160n}{n-4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty), \\ n \in \left(\dfrac{3}{2}, 4\right); \end{cases} \Leftrightarrow n \in (2, 4).$$

Так как n — целое число, то $n = 3$, при этом $x = 180$ и $y = 240$.

Ответ: 180 рублей и 240 рублей, $n = 3$.

Пример 4: За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, $12{,}5\%$ в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Решение: Пусть x, y, z и t — число месяцев, которое вклад находился под действием каждой из перечисленных процентных ставок соответственно. Имеем уравнение:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^y\cdot\left(1+\frac{11\frac{1}{9}}{100}\right)^z\cdot\left(1+\frac{12,5}{100}\right)^t=\left(1+\frac{104\frac{1}{6}}{100}\right)$$

или, после преобразований,

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^y\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^z\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^t=\frac{49}{24}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2y+z+3}\cdot 3^{x+2t+1}\cdot 5^z\cdot 7^{x+y}=2^{2x+3t}\cdot 3^{2z}\cdot 5^{x+2y}\cdot 7^2.$$

Используя теорему об единственности разложения любого натурального числа на простые множители, получим систему:

$$\begin{cases}2y+z+3=2x+3t,\\ x+2t+1=2z,\\ z=x+2y,\\ x+y=2.\end{cases}$$

Так как x и y — натуральные числа, из последнего уравнения немедленно следует, что $x=y=1$. Далее не составляет труда найти, что $z=3$ и $t=2$. Таким образом, общее число месяцев, которое вклад находился в банке, есть

$$x+y+z+t=7.$$

Ответ: 7 месяцев.

Пример 5: Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов A и B общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида A больше цены одной акции вида B. К концу дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов A и B.

Решение: Обозначим через x, y, z количество акций вида A в начале дня у первого, второго и третьего брокеров соответственно, а через p и q — цены на акции видов A и B $(p>q)$. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases}px+q(11-x)=4402,\\ py+q(21-y)=4402,\\ pz+q(29-z)=4402.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p-q)x+11q=4402,\\ (p-q)y+21q=4402,\\ (p-q)z+29q=4402.\end{cases}$$

Вычтем третье уравнение из первого и третье из второго. Имеем:

$$\begin{cases}(p-q)(x-z)=18q\\(p-q)(y-z)=8q\end{cases}\Rightarrow 4(x-z)=9(y-z).$$

Последнее равенство было получено делением двух уравнений с одновременным выполнением условий $p > q > 0$, $x - z > 0$, $y - z > 0$. Далее, так как $1 \le x \le 10$ и $z \ge 1$, то $x - z = 9$ (поскольку из полученного равенства следует, что $x - z$ делится на 9) и, значит, $x = 10$ и $z = 1$. Тогда $y - z = 4$ и $y = 5$. Возвращаясь к исходной системе, находим, что $p = 426$ и $q = 142$.

Ответ: 426 рублей и 142 рубля.

Задачи для самостоятельного решения

1. При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5% до 93,5%. Определить минимально возможное число членов этой бригады.

2. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}$%, на третьем — $6\frac{1}{4}$% и на четвертом — $\frac{100}{7}$% в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить продолжительность периода реконструкции.

3. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

4. Три фермера отправились на ярмарку для продажи баранов. Первый привел 10 голов, второй — 16, третий — 26 голов. Каждый продал часть своих баранов (не менее одного, но не всех) в течение первого дня, при этом все они продавали по одной цене, которая не менялась в продолжение всего первого дня. На второй день цена на баранов упала, и фермеры, опасаясь дальнейшего понижения цены, продали остальных баранов опять по одинаковой цене. По какой цене продавались бараны в первый и второй день, если каждый из фермеров выручил от продажи 3500 рублей?

5. На первом складе сахара было на 16 тонн больше, чем соли. За день с первого склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. На втором складе соли было на 4 тонны больше, чем сахара. За день со второго склада также вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{5}$ часть соли, причем сахара вывезли на 3 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на первом и втором складах, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

§ 6. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

В данной главе будут разобраны несколько задач экономической тематики, не вошедшие в предыдущие главы.

Пример 1: Три предприятия A, B и C на паритетных (равных) началах прокладывают необходимую им шоссейную дорогу длиной 16 километров. Предприятие A взяло на себя прокладку 10 километров дороги, предприятие B — остальных 6 километров, а предприятие C внесло свою долю деньгами, уплатив 16 миллионов рублей (третью часть стоимости дороги). Как эти деньги нужно распределить между предприятиями A и B?

Решение: Пусть прокладка 1 километра дороги стоит x миллионов рублей. Тогда стоимость прокладки всей дороги равна $16x$ миллионов рублей и равна 48 миллионам рублей (так как каждое предприятие должно внести треть всей суммы). Значит, $x = 3$, предприятие A затратило на прокладку своей части дороги 30 миллионов рублей, предприятие B — 18 миллионов рублей. Следовательно, предприятие C должно заплатить предприятию A 14 миллионов рублей, а предприятию B — 2 миллиона рублей.

Ответ: 14 миллионов рублей для A и 2 миллиона рублей для B.

Пример 2: В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 60% к текущей сумме на счете, во втором — 40%. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Решение: Пусть вкладчик положил x условных единиц в первый банк и y условных единиц во второй банк. Тогда через два года на счете в первом банке он будет иметь $1{,}6^2 \cdot x = 2{,}56x$; во втором банке — $1{,}4^2 \cdot y = 1{,}96y$. Согласно условию задачи имеем следующее уравнение:

$$2,56x + 1,96y = 2(x + y) \Leftrightarrow 0,56x = 0,04y \Leftrightarrow 14x = y.$$

Следовательно, вкладчик положил в первый банк $\frac{1}{15}$ всех денег.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

Пример 3: Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% — в проект Y. Проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможные уровни процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

Решение: Пусть S — объем суммарных вложений в оба проекта. По условию задачи к концу года прибыли p_X и p_Y от вложений в проекты X и Y будут находиться в пределах

$$\frac{19}{100}\cdot\frac{40}{100}S \le p_X \le \frac{24}{100}\cdot\frac{40}{100}S$$

и

$$\frac{29}{100}\cdot\frac{60}{100}S \le p_Y \le \frac{34}{100}\cdot\frac{60}{100}S,$$

а чистая прибыль банка p — в рамках

$$\frac{10}{100}S \le p \le \frac{15}{100}S.$$

При этом часть прибыли, подлежащая возврату клиентам, составит в процентном выражении

$$q = \frac{p_X + p_Y - p}{S}\cdot 100\%.$$

Используя приведенные выше неравенства, оценим q:

$$q \le 24\cdot\frac{40}{100} + 34\cdot\frac{60}{100} - 10 = 20$$

и

$$q \ge 19\cdot\frac{40}{100} + 29\cdot\frac{60}{100} - 15 = 10.$$

Итак, величина q находится в пределах от 10% до 20%.

Ответ: 10% и 20%.

Пример 4: Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{5}{6}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{5}{6}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равна 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

Решение: Обозначим через x исходную сумму денежных единиц, $p\%$ и $q\%$ — проценты годовых в первом и втором банке соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{6}\left(1+\dfrac{p}{100}\right)+\dfrac{x}{6}\left(1+\dfrac{q}{100}\right)=670, \\ \dfrac{5x}{6}\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2+\dfrac{x}{6}\left(1+\dfrac{q}{100}\right)^2=749, \\ \dfrac{x}{6}\left(1+\dfrac{p}{100}\right)+\dfrac{5x}{6}\left(1+\dfrac{q}{100}\right)=710. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы находим, что $x\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=660$ и $x\left(1+\dfrac{q}{100}\right)=720$. Отсюда $1+\dfrac{p}{100}=\dfrac{660}{x}$ и $1+\dfrac{q}{100}=\dfrac{720}{x}$. Используя данные равенства и второе уравнение системы, получаем, что

$$\frac{5x}{6}\left(\frac{660}{x}\right)^2+\frac{x}{6}\left(\frac{720}{x}\right)^2=749 \Leftrightarrow x=600.$$

Это означает, что $1+\dfrac{p}{100}=\dfrac{660}{600}=1{,}1$ и $x\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2=726$.

О т в е т: 726 денежных единиц.

Пример 5: Имеются три пакета акций. Суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тысяч рублей до 20 тысяч рублей, а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тысяч рублей и не больше 60 тысяч рублей. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Решение: Обозначим через x, y и $x + y$ соответственно количество акций в первом, втором и третьем пакетах. Пусть также S — стоимость первого пакета, тогда второй пакет стоит $4S$, а третий — $5S$. Согласно условиям задачи имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} 16 \le \dfrac{4S}{y} - \dfrac{S}{x} \le 20, \\ 42 \le \dfrac{5S}{x+y} \le 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 \le \dfrac{4S}{y} - \dfrac{S}{x} \le 20, \\ \dfrac{1}{12} \le \dfrac{x}{S} + \dfrac{y}{S} \le \dfrac{5}{42}. \end{cases}$$

Пусть $\dfrac{S}{x} = t$, $\dfrac{x}{y} = k$, тогда $\dfrac{S}{y} = kt$. Имеем:

$$\begin{cases} 16 \le (4k-1)t \le 20, \\ \dfrac{1}{12} \le \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{kt} \le \dfrac{5}{42}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{4k-1} \le t \le \dfrac{20}{4k-1}, \\ \dfrac{42(k+1)}{5k} \le t \le \dfrac{12(k+1)}{k}. \end{cases}$$

Воспользуемся далее очевидным утверждением: при любых a, b, c и d эквивалентны следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} a \le t \le b, \\ c \le t \le d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le t \le d, \\ c \le t \le b. \end{cases}$$

Используя это утверждение, получаем, что

$$\begin{cases} \dfrac{16}{4k-1} \le t \le \dfrac{20}{4k-1}, \\ \dfrac{42(k+1)}{5k} \le t \le \dfrac{12(k+1)}{k}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{4k-1} \le t \le \dfrac{12(k+1)}{k}, \\ \dfrac{42(k+1)}{5k} \le t \le \dfrac{20}{4k-1}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{4k-1} \le \dfrac{12(k+1)}{k}, \\ \dfrac{42(k+1)}{5k} \le \dfrac{20}{4k-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k \le 12(k+1)(4k-1), \\ 42(k+1)(4k-1) \le 100k; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12k^2+5k-3 \ge 0, \\ 84k^2+13k-21 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right), \\ -\dfrac{7}{12} \le k \le \dfrac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le k \le \frac{3}{7}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{3} \le \frac{y}{x} \le 3 \Leftrightarrow \frac{10}{3} \le \frac{y}{x}+1 \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{3} \le \frac{x+y}{x} \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{x}{x+y} \le \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \frac{x}{2(x+y)} \le \frac{3}{20}.$$

Следовательно, в первом пакете может содержаться от 12,5% до 15% от общего количества акций.

Ответ: 12,5% и 15%.

Пример 6: Акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую десятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется бóльшая из них. Определить сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.

Решение: Подсчитаем общий размер скидок, сделанных акционерным обществом. Скидка в размере 10% составляет 100 руб. и применяется к 100 акциям, значит, $100 \times 100 =$ $= 10\,000$ рублей. Так как $\dfrac{1000}{13} = 76\dfrac{12}{13}$, то скидка в размере 250 рублей применяется к 76 акциям и дает сумму 19 000 руб. Кроме этого, каждая 130-я акция выбывает из первого списка, так как на нее установлена скидка 25%. Таких акций 7, поскольку $\dfrac{1000}{130} = 7\dfrac{9}{13}$, поэтому из общей суммы скидок мы должны вычесть 700 рублей. Следовательно, общая сумма скидок равна

$$10\,000 + 19\,000 - 700 = 28\,300 \text{ руб.}$$

Значит, сумма, вырученная от продажи всех акций, равна

1 000 000 − 28 300 = 971 700 рублей.

Ответ: 971 700 рублей.

Пример 7: На собрании акционеров было принято решение увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента выпускаемой продукции. Экономический анализ показал, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый вид новой продукции, оказываются равными 75 млн рублей, дополнительные расходы при освоении первого вида новой продукции составляют 13 млн рублей, а освоение каждого последующего вида требует на 7 млн рублей расходов больше, чем освоение предыдущего вида. Очередной вид продукции принимается к производству при условии, что он принесет прибыль. Верно ли, что в результате решения акционеров:

1) предприятие может освоить более 11 видов новой продукции?

2) предприятие может освоить менее 9 видов новой продукции?

3) возможный наибольший прирост прибыли составит менее 310 млн рублей?

4) возможный наименьший прирост прибыли составит более 65 млн рублей?

Решение: Расходы на освоение n-го нового вида продукции вычисляются по формуле

$$S_n = 13 + 7(n - 1) = 6 + 7n\,.$$

Тогда, согласно условию задачи, должно быть выполнено неравенство $6 + 7n < 75$, откуда $n \le 9$.

Поэтому утверждение 1 является неверным, а утверждение 2 — верным. Наибольшая прибыль будет получена при освоении 9 новых видов продукции и составит

$$75 \times 9 - \left(6 \times 9 + 7\left(1 + 2 + \ldots + 9\right)\right) = 306 \text{ миллионов рублей.}$$

Наименьшая прибыль (при освоении только одного нового вида) составит 75 − 13 = 62 миллиона рублей.

Таким образом, утверждение 3 верно, а утверждение 4 — нет.

Ответ: 1) нет; 2) да; 3) да; 4) нет.

Пример 8: По итогам года средняя (т.е. в расчете на одно предприятие) прибыль по отрасли составила 2 миллиарда рублей, хотя часть предприятий работала в убыток. Для каждого из перечисленных ниже утверждений выяснить, всегда ли оно верно или может быть как верным, так и неверным.

1) Количество прибыльных предприятий превосходит количество убыточных;

2) суммарная прибыль всех прибыльных предприятий больше 4 миллиардов рублей;

3) наибольшая величина прибыли среди всех предприятий больше 2 миллиардов рублей;

4) средняя прибыль по всем прибыльным предприятиям больше среднего убытка по всем убыточным предприятиям.

Решение: Утверждение 1 верно не всегда. В качестве примера можно взять три предприятия, одно из которых приносит прибыль 8 миллиардов рублей, а два других — убыток по 1 миллиарду рублей каждое. Докажем, что утверждение 2 верно всегда. Обозначим через S_1 суммарную прибыль всех прибыльных предприятий, S_2 — суммарный убыток всех убыточных предприятий, n — количество всех предприятий. Согласно условию задачи имеем:

$$\frac{S_1 - S_2}{n} = 2 \Leftrightarrow S_1 = S_2 + 2n > 4,$$

так как $S_2 > 0$ и $n \geq 2$.

Докажем, что утверждение 3 также всегда верно. Обозначим, в дополнение к пункту 2, число прибыльных предприятий через k и предположим, что каждое такое предприятие приносит прибыль, не превосходящую 2 миллиардов рублей. Имеем:

$$2 = \frac{S_1 - S_2}{n} \leq \frac{2k - S_2}{n} \Rightarrow \frac{2k - S_2}{n} \geq 2 \Leftrightarrow 2k \geq 2n + S_2,$$

что невозможно, так как $k < n$, а $S_2 > 0$. Утверждение 4, как и утверждение 1, верно не всегда. В качестве примера возьмем 11 предприятий, 10 из которых приносят прибыль по 3 миллиарда рублей каждое, а одиннадцатое — убыток 8 миллиардов рублей.

Ответ: Утвеждения 2 и 3 верны всегда, а 1 и 4 — не всегда.

Пример 9: Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 миллион рублей, в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,05, а когда он добавил еще 1 миллион рублей, его доля увеличилась еще на 0,04. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,06?

Решение: Обозначим через x и y те суммы, которые первоначально вложили вкладчики в общее дело. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+y+1} - \dfrac{x}{x+y} = 0,05; \\ \dfrac{x+2}{x+y+2} - \dfrac{x}{x+y} = 0,09; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x+y) - x(x+y+1)}{(x+y+1)(x+y)} = 0,05; \\ \dfrac{(x+2)(x+y) - x(x+y+2)}{(x+y+2)(x+y)} = 0,09; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{(x+y+1)(x+y)} = 0,05; \\ \dfrac{2y}{(x+y+2)(x+y)} = 0,09. \end{cases}$$

Разделив первое из полученных равенств на второе, получим, что

$$\frac{x+y+2}{2(x+y+1)} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x + 9y + 18 = 10x + 10y + 10 \Leftrightarrow x = 8 - y.$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение последней системы. Имеем:

$$\frac{y}{72} = 0,05 \Leftrightarrow y = 3,6 \Rightarrow x = 4,4.$$

Обозначим теперь через z ту сумму, которую необходимо добавить первому вкладчику, чтобы его доля увеличилась еще на 0,06. Имеем:

$$\frac{x+2+z}{x+y+2+z}=\frac{x}{x+y}+0,15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6,4+z}{10+z}=\frac{4,4}{8}+0,15 \Leftrightarrow \frac{6,4+z}{10+z}=0,7 \Leftrightarrow z=2.$$

Ответ: 2 миллиона рублей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Три предприятия D, E и F строят сооружение на равных долевых началах. Для строительства потребовалось 110 каменных блоков. Предприятие D предоставило 70 блоков, предприятие E — остальные 40, а предприятие F решило всю свою долю оплатить деньгами, выделив для этого 110 тысяч рублей. Как разделить эти деньги между предприятиями D и E?

2. Имеются три партии товара. Общее количество единиц товара в первых двух партиях совпадает с общим количеством единиц товара в третьей партии. Вторая партия в 9 раз дороже первой, а суммарная стоимость первой и второй партий совпадает со стоимостью третьей партии. Единица товара из первой партии дешевле единицы товара из второй партии на величину, заключенную в пределах от 35 тысяч рублей до 40 тысяч рублей, а цена единицы товара из третьей партии не меньше 42 тысяч рублей и не больше 56 тысяч рублей. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества единиц товара может содержаться в первой партии.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{3}{5}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 денежным единицам, к концу следующего года — 701 денежной единице. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{3}{5}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равна 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

4. Банк планирует вложить на 1 год 30% имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные 70% — в проект B. Проект A может принести прибыль в размере от 32% до 37% годовых, а проект B — от 22% до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 10% до 20% годовых. Определить, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты A и B может при этом получить банк.

5. Город административно поделен на пять частей: западную, северную, восточную, южную и центральную. Средняя цена дизельного топлива по бензозаправочным станциям восточного района составляет 36 рублей за литр, в западном — 36 рублей 70 копеек, в центральном — 41 рубль, в северном районе — 34 рубля 50 копеек соответственно, в южном совпадает со средней ценой по всем бензозаправкам города. Известно, что в центральной части бензозаправочных станций в полтора раза больше, чем в западной, а на востоке на треть больше, чем на западе. Во сколько раз бензозаправочных станций в северном районе меньше, чем в восточном, если средняя цена дизельного топлива по заправочным станциям города составляет 37 рублей 20 копеек?

6. На собрании акционеров было принято решение увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента выпускаемой продукции. Экономический анализ показал, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый вид новой продукции, оказываются равными 80 миллионам рублей, дополнительные расходы при освоении первого вида новой продукции составляют 15 миллионов рублей, а освоение каждого последующего вида требует на 9 миллионов рублей расходов больше, чем освоение предыдущего вида. Очередной вид продукции принимается к производству при условии, что он принесет прибыль. Верно ли, что в результате решения акционеров:

1) предприятие может освоить менее 8 видов новой продукции?

2) предприятие может освоить более 10 видов новой продукции?

3) возможный наименьший прирост прибыли составит более 67 миллионов рублей?

4) возможный наибольший прирост прибыли составит менее 270 миллионов рублей?

7. Предприятие выплатило заработную плату своим сотрудникам, перечислило 26% от заработной платы в социальные фонды и закупило необходимое оборудование; кроме этого, предприятие еще выплатило 15% от всех указанных затрат в виде налога государству. Для всех выплат предприятию потребовалось 202 400 тысяч рублей. Если бы заработная плата увеличилась на 10%, а затраты на оборудование возросли на 30%, то суммарные затраты в этом случае составили бы уже 234 140 тысяч рублей. Сколько средств предприятие потратило на заработную плату, а сколько — на закупку оборудования?

8. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 миллион рублей, в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 миллион рублей, его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?

9. В целях рекламы новой модели роликовых коньков спортивный магазин установил скидку 20% на каждую третью продаваемую пару коньков и 30% на каждую пятую продаваемую пару коньков новой модели. В случае если на одну пару коньков выпадают обе скидки, то применяется большая из них. За месяц было продано 250 пар роликовых коньков новой модели. Выясните месячную выручку магазина от продажи новой модели роликовых коньков, если их базовая цена составляет 10 000 рублей.

10. Подводя еженедельно баланс финансовой деятельности, в турфирме отмечают неделю либо как прибыльную при положительном балансе, либо как убыточную — при отрицательном. Общий доход за 52 недели — 26 миллионов рублей. Для каждого из перечисленных ниже утверждений выяснить, всегда ли оно верно или может быть как верным, так и неверным:

1) убыточных недель меньше, чем прибыльных;

2) абсолютная величина суммарного баланса по убыточным неделям меньше, чем суммарный баланс по прибыльным неделям;

3) абсолютная величина баланса в самую убыточную неделю меньше, чем величина баланса в самую прибыльную неделю;

4) средняя величина недельного баланса по прибыльным неделям составляет не менее полумиллиона рублей;

5) наибольшая величина недельной прибыли больше полумиллиона рублей.

Глава VI

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано уравнение $ax = b$, где a и b — параметры. Это уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$, если $a \neq 0$. Если $a = 0$, а $b \neq 0$, то данное уравнение решений не имеет. И, наконец, если $a = b = 0$, то решений бесконечно много (решением является любое число $x \in R$).

При исследовании системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными возможен как алгебраический, так и геометрический подход. Можно выразить какую-либо переменную из одного уравнения и подставить в другое, тогда задача сведется к исследованию линейного уравнения с одной переменной. Можно также сопоставить линейному уравнению с двумя переменными прямую на плоскости, для этого необходимы некоторые сведения из аналитической геометрии.

В аналитической геометрии уравнение прямой линии на плоскости записывается в виде $Ax + By + C = 0$, где хотя бы одно из чисел A и B отлично от нуля. Если $B \neq 0$, то такую прямую можно записать уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, если же $B = 0$, то эта прямая имеет вид $x = p$ и параллельна оси Oy. Сформулируем несколько утверждений о взаимном расположении двух прямых на плоскости.

Теорема 1. Пусть прямые l_1 и l_2 на координатной плоскости Oxy заданы соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда прямые l_1 и l_2 параллельны, но не совпадают в том и только в том случае, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

При этом равенство $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ понимается как пропорция, то есть если, например, $A_2 = 0$, то и $A_1 = 0$.

Теорема 2. Прямые l_1 и l_2, заданные на координатной плоскости Oxy соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Теорема 3. Прямые l_1 и l_2, заданные на координатной плоскости Oxy соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x+b^2+\left(2+\sqrt{2}\right)b+2\sqrt{2}=b^2\left(b+\sqrt{2}\right)+4x$$

имеет бесконечно много корней?

Решение: Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$b^4x+b^2+\left(2+\sqrt{2}\right)b+2\sqrt{2}=b^2\left(b+\sqrt{2}\right)+4x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(b^4-4\right)x=b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}.$$

Последнее уравнение имеет бесконечно много корней тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases}b^4-4=0,\\ b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=0.\end{cases}$$

Уравнение $b^4 - 4 = 0$ имеет два решения: $b=\sqrt{2}$ или $b=-\sqrt{2}$. Если $b=\sqrt{2}$, то

$$b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=$$

$$=2\sqrt{2}+2\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-4\neq 0,$$

если $b=-\sqrt{2}$, тогда

$$b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=$$

$$=-2\sqrt{2}+2\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0.$$

Следовательно, решением системы является $b=-\sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx+2y=b+2, \\ 2bx+(b+1)y=2b+4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение: **1-й способ (алгебраический).** Выразив из первого уравнения y через x, получим: $y=\frac{1}{2}(b+2-bx)$. Подставим это значение y во второе уравнение и сделаем необходимые преобразования:

$$2bx+\frac{1}{2}(b+1)(b+2-bx)=2b+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3b-b^2\right)x=6+b-b^2.$$

Если $3b-b^2\neq 0$, т.е. $b\neq 0$ и $b\neq 3$, то это уравнение, а значит, и исходная система будет иметь единственное решение $x=\frac{b+2}{b}$. Если $b=0$, то уравнение примет вид $0\cdot x=6$ и не будет иметь решений. Если $b=3$, то уравнение примет вид $0\cdot x=0$ и будет иметь бесконечно много решений. Значит, условию задачи удовлетворяют все $b\neq 0$.

2-й способ (геометрический). Найдем те b, при которых данная в условии задачи система не имеет решений. Это эквивалентно тому, что прямые, задаваемые уравнениями системы, параллельны, но не совпадают. Согласно теореме 1 должны выполняться соотношения:

$$\frac{2b}{b}=\frac{b+1}{2}\neq\frac{2b+4}{b+2}.$$

Если $b = 0$, то $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}\neq\frac{4}{2}$ (отношение $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}$ понимается как пропорция, т.е. $0 \cdot 2 = 0 \cdot 1$), что удовлетворяет условию задачи.

Если $b = 3$, то $\frac{6}{3}=\frac{4}{2}\neq\frac{10}{5}$, что не удовлетворяет условию задачи.

Если же $b\neq 0$ и $b\neq 3$, тогда $2=\frac{b+1}{2}\neq\frac{2b+4}{b+2}$, что также не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, система не имеет решений при $b = 0$. Остальные b запишем в ответ.

Ответ: $b\neq 0$.

Пример 3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax-4y=1+a, \\ 2x+(a+6)y=3+a. \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение: **1-й способ (алгебраический).** Выразив y через x из первого уравнения, получим: $y=\frac{1}{4}(ax-a-1)$. Подставим найденное значение y во второе уравнение системы и преобразуем полученное уравнение:

$$2x+\frac{1}{4}(a+6)(ax-a-1)=3+a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+6a+8\right)x=a^2+11a+18.$$

Данное уравнение, а значит, и исходная система не имеет решений, если выполняются условия

$$\begin{cases} a^2+6a+8=0, \\ a^2+11a+18\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow a=-4.$$

2-й способ (геометрический). Согласно теореме 1 прямые, задаваемые уравнениями системы, параллельны и не совпадают (система не имеет решений) тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{2}=\frac{-4}{a+6}\neq\frac{1+a}{3+a}.$$

Равенство $\frac{a}{2}=\frac{-4}{a+6}$ перепишем в виде $a^2+6a+8=0$.

Если $a=-4$, то $\frac{-4}{2}=\frac{-4}{2}\neq\frac{-3}{-1}$, что является решением задачи.

Если $a=-2$, тогда $\frac{-2}{2}=\frac{-4}{4}\neq\frac{-1}{1}$, что не является решением задачи.

Таким образом, ответом к задаче будет служить $a=-4$.

Ответ: -4.

Пример 4. Найти все пары значений (a, b), при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases}(a+b)x+26y=2,\\ 8x+\left(a^2-ab+b^2\right)y=4\end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Решение: **1-й способ (алгебраический).** Выразим y через x из первого уравнения и подставим во второе уравнение. Имеем:

$$\begin{cases}y=\frac{1}{26}\left(2-(a+b)x\right),\\ 8x+\frac{1}{26}\left(a^2-ab+b^2\right)\left(2-(a+b)x\right)=4.\end{cases}$$

Второе уравнение после преобразований примет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{26}\left(a^3+b^3\right)-8\right)x=\frac{1}{13}\left(a^2-ab+b^2\right)-4.$$

Данное уравнение, а значит, и исходная система имеет бесконечное множество решений, если выполняются условия:

$$\begin{cases} \frac{1}{26}\left(a^3+b^3\right)-8=0, \\ \frac{1}{13}\left(a^2-ab+b^2\right)-4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=208, \\ a^2-ab+b^2=52; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=208, \\ a^2-ab+b^2=52; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ a^2-ab+b^2=52; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ a^2-a(4-a)+(4-a)^2=52; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ a^2-4a-12=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-2,\ b=6 \text{ или } a=6,\ b=-2.$$

2-й способ (геометрический). Согласно теореме 2 прямые, задаваемые уравнениями системы, совпадают (система имеет бесконечно много решений) тогда и только тогда, когда

$$\frac{a+b}{8}=\frac{26}{a^2-ab+b^2}=\frac{2}{4}.$$

Отсюда получаем ту же самую систему

$$\begin{cases} a+b=4, \\ a^2-ab+b^2=52. \end{cases}$$

О т в е т: $a=-2$, $b=6$ или $a=6$, $b=-2$.

Пример 5. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x-ay=1-a, \\ bx+(3-2b)y=3+a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x=y=1$. Найти числа a и b.

Решение: Подставим $x=y=1$ в исходную систему. Имеем:

$$\begin{cases} a^2-a=1-a, \\ b+(3-2b)=3+a. \end{cases}$$

Полученная система имеет две пары решений: $a=1$, $b=-1$ и $a=-1$, $b=1$. Подставив первую из этих пар в исходную систему, получим систему

$$\begin{cases} x-y=0, \\ -x+5y=4, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение. Если мы подставим вторую пару значений a и b в исходную систему, то получим систему

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=2, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений. Поэтому условию задачи удовлетворяет только первая пара чисел.

Ответ: $a = 1$, $b = -1$.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых не найдется ни одной такой пары (u, v), чтобы функция $f(x) = vx^4 + a(au-1)x^3 - 2u - 2$ удовлетворяла одновременно условиям $f(-1) = -2u$ и $f(1) = -2$.

Решение: Условия $f(-1) = -2u$ и $f(1) = -2$ запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} v - a^2u + a - 2u - 2 = -2u, \\ v + a^2u - a - 2u - 2 = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - a^2u + a - 2 = 0, \\ v + \left(a^2 - 2\right)u - a = 0. \end{cases}$$

Полученная система не имеет ни одной пары решений (u, v) тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{1} = \frac{-a^2}{a^2 - 2} \neq \frac{a-2}{-a}.$$

Легко получаем, что эти условия выполняются только при $a = -1$.

Ответ: -1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

2. При каких a система

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Найти максимальное значение величины $x + y$, если числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 2 \end{cases}$$

при некоторых a и b таких, что $a^2 + b^2 = 1$.

4. Найти все значения a, при которых для любого b система

$$\begin{cases} bx - 4y = a^2, \\ x + (b-4)y = a + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

имеет, по крайней мере, одно решение (x, y).

5. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} y = a\,|\,x - 3a\,|, \\ |\,x\,| = b - |\,y\,| \end{cases}$$

имеет относительно неизвестных x и y бесконечно много решений?

6. Точка $M(x, y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a^2x - y = 2a^2 - 2b, \\ x - by = 2 - 2a^2, \end{cases}$$

лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких действительных a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3; -1)$?

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА С ПОМОЩЬЮ ДИСКРИМИНАНТА

Квадратным трехчленом называется выражение вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. *Дискриминантом* квадратного трехчлена называется число $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных решения, если $D = 0$ — одно решение (два совпадающих корня), если $D < 0$, то уравнение решений не имеет. Корни квадратного уравнения находятся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если b — четное число, то эта формула имеет более простой вид

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a},\ \text{где}\ \frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$$

Сформулируем несколько утверждений, касающихся неравенств вида $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$, где $f(x)$ — квадратный трехчлен. Для определенности будем считать, что ветви параболы направлены вверх, то есть $a>0$ (в противном случае всегда можно умножить обе части неравенства на (-1)). Поэтому квадратный трехчлен мы будем далее записывать в виде $f(x)=x^2+px+q$.

Теорема 1. Неравенство $x^2+px+q>0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in R$ тогда и только тогда, когда $D=p^2-4q<0$.

Теорема 2. Неравенство $x^2+px+q\geq 0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in R$ тогда и только тогда, когда $D\leq 0$.

Теорема 3. Неравенство $x^2+px+q<0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D>0$.

Теорема 4. Неравенство $x^2+px+q\leq 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D\geq 0$.

Теоремы 1–4 проиллюстрированы на рисунках 1–4 соответственно.

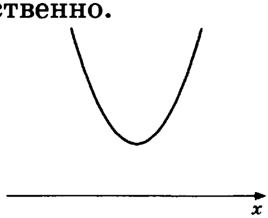


Рис. 1

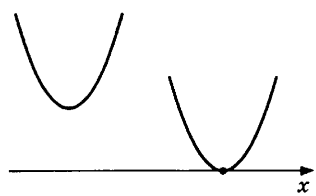


Рис. 2

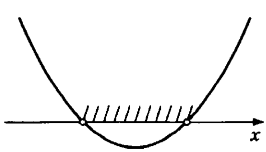


Рис. 3

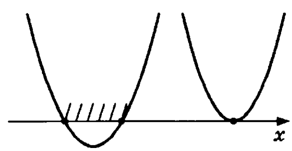


Рис. 4

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два различных действительных корня?

Решение: Если $3a - 1 = 0$, то есть $a = \frac{1}{3}$, уравнение принимает вид $\frac{2}{3}x - 1 = 0$ и имеет единственное решение $x = \frac{3}{2}$. Следовательно, $a = \frac{1}{3}$ не является решением задачи. Пусть $a \neq \frac{1}{3}$. Тогда для того, чтобы квадратное уравнение имело два различных решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения был положителен. Имеем:

$$\frac{D}{4} = a^2 - (3a-1)(3a-2) > 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 9a + 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{16}, \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right).$$

Так как $a = \frac{1}{3}$ принадлежит полученному промежутку, окончательно получаем ответ $a \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{16}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{16}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

Пример 2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2axy + 2x - 2y + 3 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2axy + 2x - 2y + 3 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2axy + 2x - 2y + 3 = 0, \\ x(y+1) = -2y - 1. \end{cases}$$

Пусть $y = -1$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} -2ax + 2x + 5 = 0, \\ -1 = 0 \end{cases}$$

и решений иметь не будет. Пусть $y \neq -1$. Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2axy + 2x - 2y + 3 = 0, \\ x = -\dfrac{2y+1}{y+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ay \cdot \dfrac{2y+1}{y+1} + 2 \cdot \dfrac{2y+1}{y+1} + 2y - 3 = 0, \\ x = -\dfrac{2y+1}{y+1}. \end{cases}$$

Первое уравнение после преобразований принимает следующий вид:

$$(4a + 2)y^2 + (2a + 3)y - 1 = 0.$$

Это уравнение, а значит, и исходная система имеет единственное решение в двух случаях:

а) коэффициент при y^2 равен нулю, т.е. $4a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$;

б) дискриминант равен нулю, т.е.

$$D = (2a+3)^2 + 4(4a+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 28a + 17 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}.$$

Кроме того, необходимо рассмотреть случай, когда один из корней квадратного уравнения будет равен -1. Так как значению $y = -1$ не будет соответствовать ни одно значение x, то в этом случае исходная система также будет иметь единственное решение. Подставив $y = -1$ в квадратное уравнение, получим, что

$$(4a + 2) - (2a + 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Ответ: 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Решение: Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x:

$$2x^2 + (y + z)x + 2y^2 + yz + z^2 - 4 = 0.$$

Это уравнение будет иметь решение в том и только в том случае, когда его дискриминант больше либо равен нулю. Имеем:

$$D = (y+z)^2 - 8\left(2y^2 + yz + z^2 - 4\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leq 0.$$

Согласно теореме 4 условие существования решений последнего неравенства (как квадратного относительного y) есть неотрицательность его дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = 9z^2 - 15\left(7z^2 - 32\right) \geq 0 \Leftrightarrow z^2 \leq 5 \Leftrightarrow z \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right].$$

Значит, наибольшее возможное значение, которое может принимать z при данных условиях, — это $z = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Пример 4. Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1, 2)$.

Решение: Сформулируем задачу следующим образом: «Найти все значения c, при которых система неравенств

$$-1 < \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} < 2$$

выполнена при всех $x \in R$». Учитывая, что выражение $2x^2 - 3x + 2$ положительно при всех $x \in R$, преобразуем данную систему следующим образом:

$$-1 < \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} > -1, \\ \dfrac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (c-3)x + 1 > 0, \\ 3x^2 - (c+6)x + 5 > 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 1 выполнение условия задачи равносильно отрицательности каждого из дискриминантов. Имеем:

$$\begin{cases}(c-3)^2-12<0,\\(c+6)^2-60<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2\sqrt{3}<c<3+2\sqrt{3},\\-6-2\sqrt{15}<c<-6+2\sqrt{15};\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c\in\left(3-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{15}-6\right).$$

Ответ: $\left(3-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{15}-6\right)$.

Пример 5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x)=\frac{3x+p}{x^2+5x+7}$$

содержит полуинтервал $(-1,\ 3]$. Определить при каждом таком p множество значений функции $f\ (x)$.

Решение: Заметим сначала, что выражение x^2+5x+7 положительно при всех значениях переменной x; отсюда, в частности, следует, что функция $f\ (x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Тогда для того, чтобы область значений функции $f\ (x)$ содержала промежуток $(-1,\ 3]$, необходимо выполнение следующих двух условий: «Существует такое x, при котором $f(x)\geq 3$, и существует такое x, при котором $f(x)\leq -1$». Имеем:

$$\frac{3x+p}{x^2+5x+7}\geq 3\Leftrightarrow 3x^2+12x+21-p\leq 0$$

и

$$\frac{3x+p}{x^2+5x+7}\leq -1\Leftrightarrow x^2+8x+7+p\leq 0.$$

Существование решений каждого из неравенств равносильно неотрицательности его дискриминанта. Имеем:

$$\begin{cases}36-3(21-p)\geq 0,\\16-(7+p)\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\geq 9,\\p\leq 9;\end{cases}\Rightarrow p=9.$$

Следовательно, условие задачи может быть выполнено только при $p=9$. Проверим это и найдем при $p=9$ область значений функции $f\ (x)$. Имеем:

$$f(x)=\frac{3x+p}{x^2+5x+7}=\frac{3x+9}{x^2+5x+7}=y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yx^2+(5y-3)x+7y-9=0.$$

Необходимо найти все значения y, при которых последнее уравнение имеет решение. Если $y = 0$, то уравнение принимает вид $-3x - 9 = 0$ и имеет корень $x = -3$. Если $y \neq 0$, то наличие корней этого уравнения равносильно неотрицательности его дискриминанта. Имеем:

$$(5y-3)^2 - 4y(7y-9) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 3].$$

Таким образом, при $p = 9$ область значений функции $y = f(x)$ представляет собой отрезок $[-1, 3]$.

Ответ: $p = 9$; $[-1, 3]$.

Пример 6. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет, по крайней мере, одно решение (x, y, z).

Решение: Рассмотрим данную систему как линейную относительно переменных x и y. Согласно теореме 3 предыдущего параграфа эта система будет иметь единственное решение (независимо от значений a и z) тогда и только тогда, когда

$$\frac{b}{b-6} \neq \frac{-1}{2b} \Leftrightarrow 2b^2 + b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -2 \text{ и } b \neq \frac{3}{2}.$$

Пусть $b = -2$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} -2x - y - az^2 = 0, \\ -8x - 4y - 4z - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + az^2 = 0, \\ 2x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем уравнение $az^2 - z - 1 = 0$, которое должно иметь решение относительно z. Значит, $D = 1 + 4a \geq 0$, то есть $a \geq -\frac{1}{4}$.

Аналогично, при $b = \frac{3}{2}$ получаем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y - az^2 = 0, \\ -\frac{9}{2}x + 3y - 4z - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y - 6az^2 = 0, \\ 9x - 6y + 8z + 8 = 0; \end{cases} \Rightarrow 3az^2 + 4z + 4 = 0.$$

Условие существования решения последнего уравнения есть $4 - 12a \ge 0$, откуда $a \le \frac{1}{3}$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

Пример 7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$$

содержит хотя бы одно целое число.

Решение: Рассмотрим данное неравенство как квадратное относительно a:

$$4a^2 + (6x - 24)a + 6x^2 - 3x + 35 < 0.$$

Необходимым и достаточным условием существования его решений является положительность дискриминанта:

$$(3x - 12)^2 - 4(6x^2 - 3x + 35) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x^2+60x-4<0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-30-8\sqrt{15}}{15}, \frac{-30+8\sqrt{15}}{15}\right).$$

Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x — это $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Требуется для каждого из этих значений x найти соответствующие значения параметра a.

а) Если $x = -4$, то неравенство принимает вид

$$4a^2-48a+143<0 \Leftarrow a \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

б) Если $x = -3$, получаем

$$2a^2-21a+49<0 \Leftarrow a \in \left(\frac{7}{2}, 7\right).$$

в) При $x = -2$ имеем

$$4a^2-36a+65<0 \Leftarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

г) Для $x = -1$ получаем

$$2a^2 - 15a + 22 < 0 \Leftarrow a \in \left(2, \frac{11}{2}\right).$$

д) Если $x = 0$, то

$$4a^2 - 24a + 35 < 0 \Leftarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Ответ выписывается как результат объединения всех полученных интервалов: $a \in (2, 7)$.

Ответ: $a \in (2, 7)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из всех решений (x, y) уравнения

$$x^2y - x^2 + 4xy + 6y - 2x = 3$$

найти те решения, для которых y принимает наименьшее значение.

2. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$.

3. Определить, под каким углом видно из начала координат множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

4. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принять выражение $2x + y - z$?

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$ выполняется для любых пар (x, y) таких, что $|x| = |y|$.

6. Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $x + y + z = x^2 + 4y^2$ и $x + 2y + 3z = a$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

8. Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

9. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \ge 0$.

§ 3. ТЕОРЕМА ВИЕТА

При исследовании квадратного трехчлена, а также знаков его корней большую роль играет теорема Виета. Сформулируем эту теорему, а также обратную к ней.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, а $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная к теореме Виета. Если квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 и известно, что $x_1 + x_2 = p$, а $x_1 x_2 = q$, то это уравнение может быть записано как $x^2 - px + q = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$$

Решение: Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ (x+y)^2-2xy=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ (3a-1)^2-2xy=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ xy=\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Согласно теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-(3a-1)t+\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}=0.$$

Существование корней данного уравнения равносильно выполнению неравенства $D \geq 0$:

$$(3a-1)^2-\left(10a^2-8a-2\right)\geq 0 \Leftrightarrow a^2-2a-3\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq a\leq 3.$$

Так как $xy=\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}$, то

$$\min_{-1\leq a\leq 3}\left(\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}\right)=\min_{-1\leq a\leq 3}\left(\frac{5}{2}\left(a-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{9}{10}\right)=(\text{или}\, a=\frac{2}{5})=-\frac{9}{10}.$$

Ответ: $-\frac{9}{10}$.

Пример 2. Найти все значения a, для которых система

$$\begin{cases} a(x-4)=3y+6, \\ y+\sqrt{x}=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Решение: Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} a(x-4)=3y+6, \\ \sqrt{x}=-y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x-4)=3y+6, \\ x=y^2, \\ y\leq 0. \end{cases}$$

Эта система будет иметь такое же количество решений, как и система $\begin{cases} a\left(y^2-4\right)=3y+6, \\ y\leq 0. \end{cases}$

Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких a уравнение

$$a\left(y^2-4\right)=3y+6 \quad\Leftrightarrow\quad ay^2-3y-4a-6=0$$

имеет два различных неположительных корня?» При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень. Пусть $a \neq 0$. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} D>0, \\ y_1\leq 0, \\ y_2\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ y_1\cdot y_2\geq 0, \\ y_1+y_2\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+4a(4a+6)>0, \\ \dfrac{-4a-6}{a}\geq 0, \\ \dfrac{3}{a}\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2+24a+9>0, \\ -4a-6\le 0, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne -\dfrac{3}{4}, \\ a\ge -\dfrac{3}{2}, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},0\right).$$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

Пример 3. Найти все действительные значения a, при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Решение: Сделаем замену $x^4 = t$. Рассмотрим квадратное уравнение $t^2 + at + 1 = 0$. Чтобы выполнялось первое условие задачи, это уравнение должно иметь два различных положительных корня t_1 и t_2. Это означает выполнение неравенств

$$\begin{cases} D=a^2-4>0, \\ t_1+t_2=-a>0, \\ t_1t_2=1>0, \end{cases}$$

то есть $a < -2$. Пусть $t_1 < t_2$. Тогда числа $-\sqrt[4]{t_2}$, $-\sqrt[4]{t_1}$, $\sqrt[4]{t_1}$ и $\sqrt[4]{t_2}$ должны составлять арифметическую прогрессию, а это значит, что $\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_1}-(-\sqrt[4]{t_1})$, т.е. $\sqrt[4]{t_2}=3\sqrt[4]{t_1}$ или $t_2=81t_1$. По теореме Виета $t_1 + t_2 = -a$ и $t_1t_2 = 1$. Получаем систему:

$$\begin{cases} t_1+t_2=-a, \\ t_1t_2=1, \\ t_2=81t_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 82t_1=-a, \\ 81t_1^2=1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{1}{9}, \\ a=-\dfrac{82}{9}; \end{cases} \vee \begin{cases} t_1=-\dfrac{1}{9}, \\ a=\dfrac{82}{9}. \end{cases}$$

Решением, удовлетворяющим условию $a < -2$, будет служить пара $t_1=\frac{1}{9}$ и $a=-\frac{82}{9}$.

Ответ: $-\frac{82}{9}$.

Пример 4. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2x+y=a-1, \\ 2xy=a^2-3a+1, \\ 4x^2+y^2 \le -a^2+5a-4 \end{cases}$$

имеет решение?

Решение: Согласно первым двум уравнениям системы, по теореме, обратной теореме Виета, числа $2x$ и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + (1 - a)t + a^2 - 3a + 1 = 0.$$

Условие существования решения этого уравнения есть

$$D=(1-a)^2-4\left(a^2-3a+1\right)\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\le a\le 3.$$

С другой стороны, $4x^2 + y^2 = (2x + y)^2 - 4xy$. Тогда, согласно третьему неравенству системы,

$$4x^2+y^2=(a-1)^2-2\left(a^2-3a+1\right)\le -a^2+5a-4 \Leftrightarrow a\ge 3.$$

Следовательно, система имеет решение только при $a = 3$.

Ответ: 3.

Пример 5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Решение: Существование корней данного уравнения равносильно выполнению неравенства $D \ge 0$. Имеем:

$$\frac{D}{4}=a^2-2a^2-4a-3=-a^2-4a-3\ge 0,$$

откуда $a\in[-3, -1]$. Выразив при этом сумму квадратов корней данного уравнения через их сумму и произведение, получим:

$$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=$$

(по теореме Виета)

$$=(-2a)^2-2\left(2a^2+4a+3\right)=-8a-6.$$

Ясно, что

$$\max_{-3\le a\le -1}(-8a-6)=-8\cdot(-3)-6=18.$$

Ответ: При $a = -3$ эта сумма равна 18.

Пример 6. Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

Решение: Рассмотрим уравнение $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$. Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geq 0$. Получим уравнение $at^2 + bt + 2 = 0$, которое, согласно условию задачи, имеет одним из своих корней число $t_1 = 3$. При обратной замене $x^2 = 3$ получаем, что $x = \pm\sqrt{3}$. Заметим, однако, что корни $t_{1,2}$ уравнения $at^2 + bt + 2 = 0$ удовлетворяют условию $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{2}{a}$ (согласно теореме Виета). Так как $a < 0$, а $t_1 > 0$, то отсюда следует, что $t_2 < 0$. Значит, обратная замена $x^2 = t_2$ других решений уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$ не дает. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

Пример 7. Найти все значения a, при которых уравнение $4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ не имеет решений.

Решение: Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда данное уравнение примет следующий вид:

$$t^2 + \left(a^2 + 5\right)t - a^2 + 9 = 0.$$

Заметим, что по теореме Виета сумма корней этого уравнения (если они существуют) равна $t_1 + t_2 = -a^2 - 5 < 0$ для любого a, а произведение $t_1 \cdot t_2 = 9 - a^2$. Рассмотрим два случая.

а) Если $a \in [-3, 3]$, то есть $9 - a^2 \geq 0$, то либо корней нет вообще, либо они есть и тогда $t_1 \leq 0$ и $t_2 \leq 0$. Ни в том ни в другом варианте исходное уравнение не имеет решений.

б) Если $|a| > 3$, то корни квадратного уравнения существуют, так как

$$D = \left(a^2 + 5\right)^2 + 4\left(a^2 - 9\right) > 0.$$

Кроме того, $t_1 \cdot t_2 = 9 - a^2 < 0$, поэтому один из этих корней положительный, а другой отрицательный. Ясно, что положительный корень (t_1 или t_2) даст при обратной замене $2^x = t$ решение исходного уравнения $x = \log_2 t$.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in [-3, 3]$.

Ответ: $a \in [-3, 3]$.

Пример 8. Найти все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+a^2x-a^2+2a-3}{x^2-7x-a^2+2a-3}<0,$$

не меньше 11.

Решение: Пусть

$$f(x)=x^2+a^2x-a^2+2a-3,$$

$$g(x)=x^2-7x-a^2+2a-3.$$

Заметим, что $f(0)=g(0)=-a^2+2a-3<0$ при любом значении a. Кроме того, вершина параболы $y=f(x)$ имеет отрицательную абсциссу, а вершина параболы $y=g(x)$ — положительную. Поэтому корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$ существуют и чередуются: то есть если $x_1 < x_2$ — корни уравнения $f(x)=0$, а $x_3<x_4$ — корни уравнения $g(x)=0$, то $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$, как показано на рисунке 5.

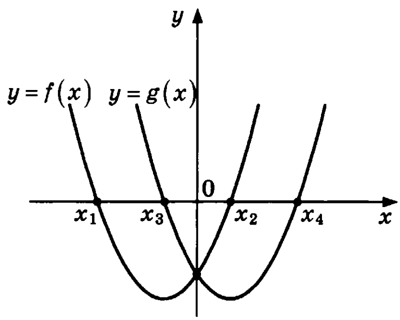


Рис. 5

Из этого же рисунка видно, что интервалы (x_1, x_3) и (x_2, x_4) составляют решение неравенства $\frac{f(x)}{g(x)}<0$. Тогда

$$(x_3-x_1)+(x_4-x_2)\ge 11 \Leftrightarrow (x_3+x_4)-(x_1+x_2)\ge 11 \Leftrightarrow$$

(по теореме Виета)

$$\Leftrightarrow 7+a^2 \ge 11 \Leftrightarrow a\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

Ответ: $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_a x + \log_x (17 - 10a) = 2$$

имеет, по крайней мере, два корня и при этом произведение всех его корней не меньше $1/10000$?

3. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x = 0$ имеет ровно пять различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

4. Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$2^{1+x} + p + q \cdot 2^{1-x} = 0$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найти при этом условии произведение всех различных корней уравнения $(x^2 - 5x - 300)(x^2 - px - q) = 0$.

5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$\left(2\log_a |x-1| - \log_a x - 1\right)\left(2\log_{a^2} |x+5| - \log_a 3a + 1\right) = 0$$

больше, чем $8a + 1$?

6. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найти это максимальное значение.

7. Обозначим x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $(a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 2 + 5a$. Найти все b, для каждого из которых величина $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых она определена.

8. При каких значениях p уравнение

$$4\left(x-\sqrt{p\cdot 4^p}\right)x+4\left(4^p-1\right)+p=0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p?

9. Найти все значения параметра α, при которых больший корень уравнения

$$x^2+\frac{x+4}{\sqrt{3}}\sin 2\alpha-16=0$$

на $\sqrt{\frac{2}{3}}$ больше, чем квадрат разности корней уравнения

$$x^2-x\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{4}-1=0.$$

10. Для каждого положительного значения параметра c изобразить множество тех пар (b, a), для каждой из которых уравнение $bx^2+ax-\frac{b}{4}+c=0$ имеет два различных отрицательных корня, и указать все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов.

§ 4. РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В настоящем параграфе будет показано, как можно исследовать расположение корней квадратного трехчлена без нахождения самих корней. Мы по-прежнему считаем, что ветви параболы направлены вверх и квадратичная функция записывается как $f(x)=x^2+px+q$. В противном случае всегда можно умножить обе части уравнения (или неравенства) на (−1). Напомним, что координаты вершины параболы (x_0, y_0) находятся по формулам $x_0=-\frac{p}{2}$, $y_0=f(x_0)$. Сформулируем несколько утверждений.

Теорема 1. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня больше некоторого числа a тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 > a, \\ x_2 > a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > a, \\ f(a) > 0, \end{cases}$$

где D — дискриминант, а x_0 — абсцисса вершины параболы.

Теорема 2. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня меньше некоторого числа a тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 < a, \\ x_2 < a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 < a, \\ f(a) > 0. \end{cases}$$

Теорема 3. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных корня, и число a расположено строго между его корнями тогда и только тогда, когда $f(a)<0$.

Теоремы 1–3 проиллюстрированы на рисунках 6–8.

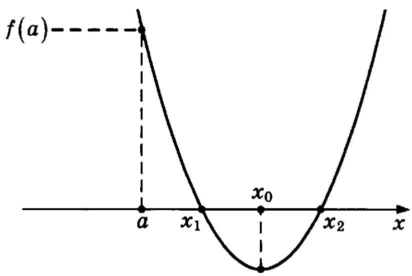


Рис. 6

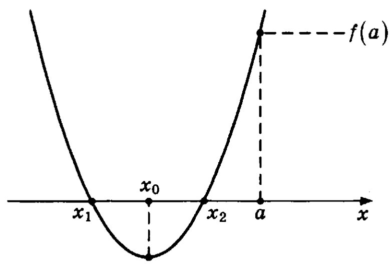


Рис. 7

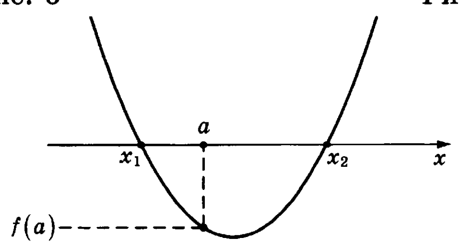


Рис. 8

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите все значения a, для каждого из которых система неравенств

$$\begin{cases} -x^2+12x-a\ge 0, \\ x\le 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x.

Решение: Решение первого неравенства, если оно существует, есть отрезок $[x_1, x_2]$ (возможно, вырожденный в точку), где $x_{1,\,2}$ — корни квадратного уравнения

$$x^2 - 12x + a = 0.$$

Значит, условие задачи может быть сформулировано следующим образом: «Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $x^2 - 12x + a = 0$ существуют и хотя бы один из этих корней меньше либо равен двум» (рисунок 9).

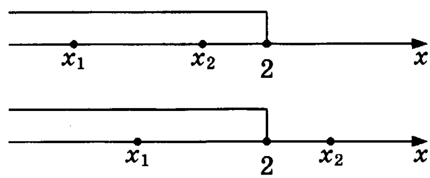


Рис. 9

Эти условия равносильны следующему неравенству:

$$x_1=6-\sqrt{36-a}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{36-a}\ge 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36-a\ge 16 \Leftrightarrow a\le 20.$$

Ответ: $(-\infty, 20]$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x<20\cdot 3^x+a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение: Обозначим $3^x = t > 0$, тогда данное неравенство принимает вид $t^2 - 20t - a < 0$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = t^2 - 20t - a.$$

На координатной плоскости Oty графиком этой функции будет служить парабола, абсцисса вершины которой равна $t_0 = 10$. Тогда целочисленным решениям исходного неравенства $x = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ будут соответствовать $t=3^x=\ldots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots$. Отсюда следует, что исходное неравенство не имеет ни одного целочисленного решения тогда и только тогда, когда число $t = 9$ не входит в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$ (или это неравенство вообще не имеет решений). И в том и в другом случае должно выполняться условие $y(9) \geq 0$ (рисунок 10).

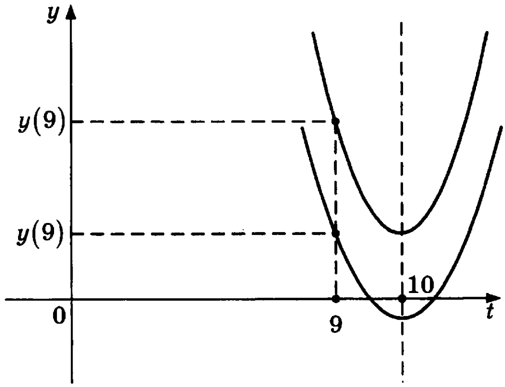


Рис. 10

В противном случае (то есть когда $y(9) < 0$) число $t = 9$ попадает в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$, и значит, $x = 2$ является решением исходного неравенства. Окончательно имеем:

$$y(9) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 81 - 20 \cdot 9 - a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq -99.$$

Полученные значения a и будут служить ответом к задаче.

Ответ: $a \leq -99$.

Пример 3. Найти все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

Решение: При $a = 0$ данное уравнение принимает вид $4x + 1 = 0$ и имеет единственный отрицательный корень $x = -\frac{1}{4}$. Пусть $a \neq 0$. Разделим обе части квадратного уравнения на a. Имеем:

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a+4}{a}x + \frac{a+1}{a} = 0.$$

Пусть $f(x)=x^2+\frac{a+4}{a}x+\frac{a+1}{a}$. Возможны три случая.

а) Квадратное уравнение имеет два различных корня, один из которых — положительный, другой — отрицательный. Согласно теореме 3 имеем $f(0)<0$ (рисунок 11), откуда $a\in(-1,0)$.

б) Квадратное уравнение имеет два различных корня, один из которых равен нулю, другой — отрицательный. В этом случае получаем (рисунок 12):

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1<0, \\ x_2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=0, \\ x_0<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1, \\ -\dfrac{a+4}{2a}<0, \end{cases}$$

— нет решений (здесь x_0 — абсцисса вершины параболы).

в) Квадратное уравнение имеет два совпадающих корня, оба из которых отрицательны. Это равносильно выполнению следующих условий (рисунок 13):

$$\begin{cases} D=0, \\ x_0<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+4)^2-4a(a+1)=0, \\ -\dfrac{a+4}{2a}<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-4a-16=0, \\ \left[\begin{array}{l} a<-4, \\ a>0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{2+2\sqrt{13}}{3}.$$

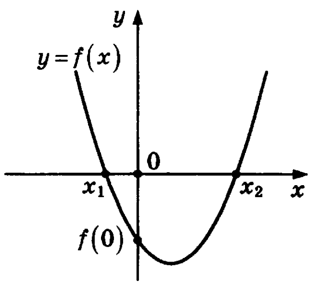


Рис. 11

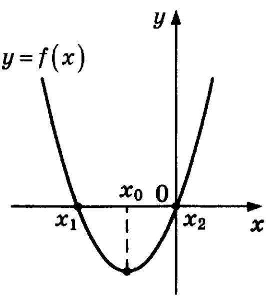


Рис. 12

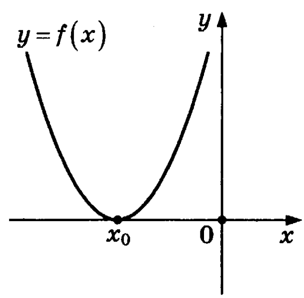


Рис. 13

Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $(-1,0]\cup\left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$.

Пример 4. Найти все значения a, для которых неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется для всех x из интервала $(-1, 0)$.

Решение: При $a = 0$ данное неравенство принимает вид $1 > 4x$ и имеет решением $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, поэтому $a = 0$ является решением задачи. Пусть $a > 0$ и $f(x) = ax^2 - 4x + 3a + 1$. Возможны три случая.

а) Дискриминант квадратного трехчлена

$$f(x) = ax^2 - 4x + 3a + 1$$

отрицателен, тогда парабола расположена целиком выше оси x (рисунок 14), неравенство $f(x) > 0$ выполнено при всех $x \in R$, в том числе при $x \in (-1, 0)$.

Имеем:

$$4 - a(3a+1) < 0 \Leftrightarrow 3a^2 + a - 4 > 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (1, +\infty).$$

Так как $a > 0$, то $a \in (1, +\infty)$.

б) Квадратный трехчлен имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня больше либо равны нулю. Имеем (рисунок 15):

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ f(0) \ge 0, \\ x_0 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \le a \le 1, \\ 3a + 1 \ge 0, \\ \frac{2}{a} \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, 1].$$

Здесь x_0 — абсцисса вершины параболы. Все a из промежутка $a \in (0, 1]$ являются решением задачи.

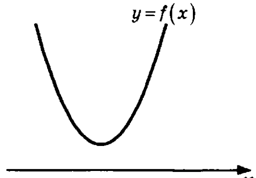


Рис. 14

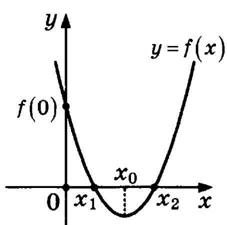


Рис. 15

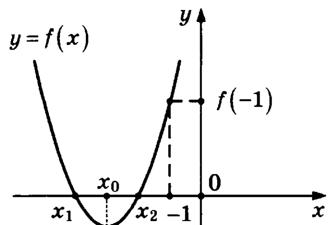


Рис. 16

в) Квадратный трехчлен имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня меньше либо равны (-1). В этом случае получаем (рисунок 16):

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1 \le -1, \\ x_2 \le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ f(-1) \ge 0, \\ x_0 \le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \le a \le 1, \\ 4a+5 \ge 0, \\ \frac{2}{a} \le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \le a \le 1, \\ a \ge -\frac{5}{4}, \\ -2 \le a < 0. \end{cases}$$

Ясно, что нет положительных значений a, удовлетворяющих этой системе неравенств.

Пусть теперь $a < 0$. Тогда ветви параболы направлены вниз и условие задачи может быть выполнено в единственном случае, а именно, когда квадратный трехчлен имеет два различных корня, один из которых меньше либо равен (-1), а другой больше либо равен нулю. Имеем (рисунок 17):

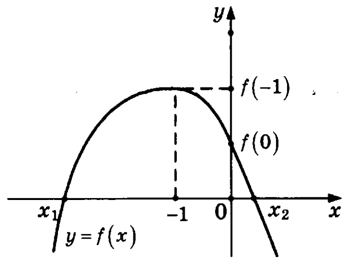


Рис. 17

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 \le -1, \\ x_2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \ge 0, \\ f(0) \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+5 \ge 0, \\ 3a+1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

Так как $a < 0$, то $a \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$. Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

О т в е т: $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Пример 5. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (-3a+1)x + 2a^2 \le 2$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 5 + a) \ge 0$.

Решение: Множество решений неравенства

$$x^2 + (-3a+1)x + 2a^2 \le 2,$$

эквивалентного неравенству $(x-(2a-2))(x-(a+1)) \le 0$, образует отрезок (возможно, вырожденный в точку) с концами $2a - 2$ и $a + 1$ (рисунок 18).

Множество решений неравенства $ax(x - 5 + a) \ge 0$ образует при $a > 0$ объединение двух лучей (направленных в противоположные стороны и, возможно, «склеенных» в одну прямую) с концами 0 и $5 - a$; при $a < 0$ — отрезок с теми же концами, а при $a = 0$ — всю прямую (рисунок 19).

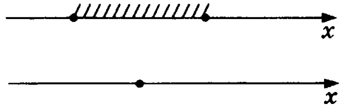


Рис. 18

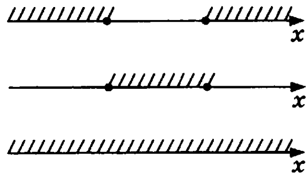


Рис. 19

Ровно одна точка первого множества может принадлежать второму, только когда первое вырождается в точку или один из его концов совпадает с концом второго множества, т.е. в следующих случаях:

а) $2a - 2 = a + 1$, следовательно, $a = 3$, тогда только одно решение ($x = 4$) первого неравенства удовлетворяет второму;

б) $2a - 2 = 0$, следовательно, $a = 1$, тогда только одно решение ($x = 0$) первого неравенства удовлетворяет второму;

в) $2a - 2 = 5 - a$, следовательно, $a = \frac{7}{3}$, тогда все числа отрезка $\left[\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right]$, состоящего из решений первого неравенства, удовлетворяют второму;

г) $a + 1 = 0$, следовательно, $a = -1$, тогда только одно решение ($x = 0$) первого неравенства удовлетворяет второму;

д) $a + 1 = 5 - a$, следовательно, $a = 2$, тогда только одно решение ($x = 3$) первого неравенства удовлетворяет второму.

Ответ: $a = -1$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Пример 6. Найти все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-2, -1)$ значение выражения $x^4 - 5$ не равно значению выражения $(3a + 2)x^2$.

Решение: Пусть $x^2 = t$. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти все значения a, при которых уравнение $t^2 - (3a + 2)t - 5 = 0$ не имеет решений на промежутке $t \in (1, 4]$».

Пусть $f(t)=t^2-(3a+2)t-5$. Заметим, что дискриминант этого квадратного трехчлена всегда положителен, действительно, $D=(3a+2)^2+20>0$ при любом a. Возможны три случая.

а) Квадратный трехчлен $f(t)=t^2-(3a+2)t-5$ имеет два корня (возможно, совпадающих), причем оба корня больше 4. Имеем (рисунок 20):

$$\begin{cases} f(4)>0, \\ t_0>4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-4(3a+2)-5>0, \\ \dfrac{3a+2}{2}>4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{1}{4}, \\ a>2, \end{cases}$$

— нет решений (здесь t_0 — абсцисса вершины параболы).

б) Квадратный трехчлен имеет два корня (возможно, совпадающих), причем оба корня меньше либо равны 1. В этом случае получаем (рисунок 21):

$$\begin{cases} f(1)\ge 0, \\ t_0\le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(3a+2)-5\ge 0, \\ \dfrac{3a+2}{2}\le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -2, \\ a\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty,-2].$$

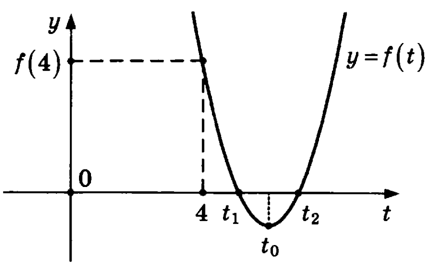


Рис. 20

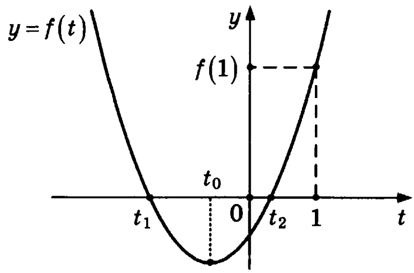


Рис. 21

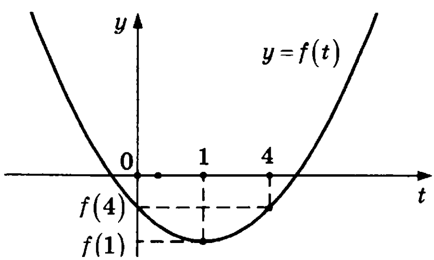


Рис. 22

в) Квадратный трехчлен имеет два различных корня, один из которых больше 4, а другой меньше либо равен 1. Это эквивалентно выполнению следующих условий (рисунок 22):

$$\begin{cases} t_1 \le 1, \\ t_2 > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(4) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a-6 \le 0, \\ -12a+3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $(-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Пример 7. При каких значениях a строго между двумя корнями уравнения $ax^2 + 2x + 2a^2 = 0$ находится ровно один корень уравнения $ax^2 + 2x - 2a^2 = 0$ и строго между двумя корнями второго уравнения находится ровно один корень первого уравнения?

Решение: Пусть $f(x) = ax^2 + x + 2a^2$ и $g(x) = ax^2 + 2x - 2a^2$ и пусть x_0 — абсцисса точки пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Имеем:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 + x + 2a^2 = ax^2 + 2x - 2a^2 \Leftrightarrow x_0 = 4a^2.$$

Если $a > 0$, то условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $f(x_0) < 0$ (рисунок 23).

Если же $a < 0$, то необходимым и достаточным условием будет $f(x_0) > 0$ (рисунок 24). Объединяя два разобранных случая, получаем

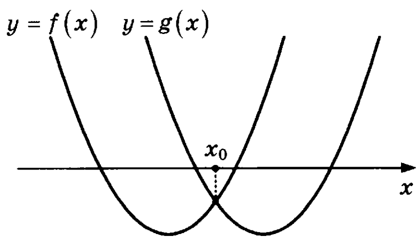


Рис. 23

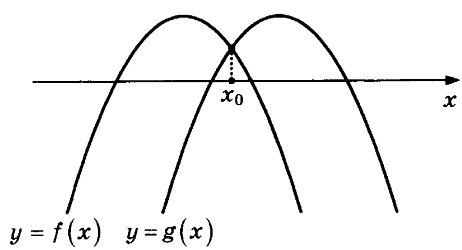


Рис. 24

$$af(x_0) < 0 \Leftrightarrow a\left(16a^5 + 6a^2\right) < 0 \Leftrightarrow a\left(8a^3 + 3\right) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right)$.

Пример 8. Найти все значения a, при каждом из которых все решения неравенства $x^2-(4a+4)x+3a^2+12a\le 0$ удовлетворяют неравенству $x(x+a+1)\ge 0$.

Решение: Множество решений неравенства

$$x^2-(4a+4)x+3a^2+12a\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-3a)(x-a-4)\le 0$$

образует отрезок (возможно, вырожденный в точку) с концами $3a$ и $a+4$ (рисунок 25).

Множество решений неравенства $x(x+a+1)\ge 0$ образует объединение двух лучей (направленных в противоположные стороны и, возможно, с общим началом) с концами 0 и $-a-1$ (рисунок 26).

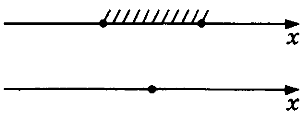


Рис. 25

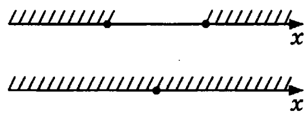


Рис. 26

Все точки первого множества принадлежат второму тогда и только тогда, когда:

а) оба конца первого множества попадают в один и тот же луч второго множества, т.е. когда

$$\begin{cases}3a\ge 0,\\ a+4\ge 0,\\ 3a\ge -a-1,\\ a+4\ge -a-1;\end{cases}\Leftrightarrow a\ge 0$$

или когда

$$\begin{cases}3a\le 0,\\ a+4\le 0,\\ 3a\le -a-1,\\ a+4\le -a-1;\end{cases}\Leftrightarrow a\le -4;$$

б) второе множество есть вся прямая, т.е. когда $0=-a-1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a=-1$.

Ответ: $a\in(-\infty,-4]\cup\{-1\}\cup[0,+\infty)$.

Пример 9. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+\left(a^2+4a-5\right)>0$ хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-2,1]$.

Решение: Сформулируем задачу следующим образом: «Найти все значения параметра x, при которых неравенство

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+\left(a^2+4a-5\right)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+\left(x^3-2x^2+4\right)a+2x^3-x^2-6x-5>0$$

имеет относительно переменной a решение, принадлежащее отрезку $a\in[-2,1]$». Будем искать те x, при которых данное неравенство не имеет решений на отрезке $[-2,1]$ (в ответ запишем все остальные x). Это произойдет тогда и только тогда, когда будут одновременно выполнены два условия: $f(-2)\le 0$ и $f(1)\le 0$, где

$$f(a)=a^2+\left(x^3-2x^2+4\right)a+2x^3-x^2-6x-5$$

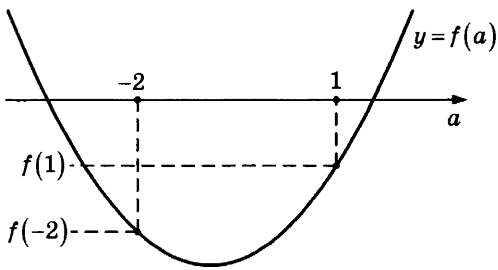


Рис. 27

Имеем:

$$\begin{cases} f(-2)\le 0, \\ f(1)\le 0; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4-2\left(x^3-2x^2+4\right)+2x^3-x^2-6x-5\le 0, \\ 1+\left(x^3-2x^2+4\right)+2x^3-x^2-6x-5\le 0; \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2x-3\le 0, \\ x\left(x^2-x-2\right)\le 0; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -1\le x\le 3. \\ x\in(-\infty,-1]\cup[0,2]; \end{cases}\Leftrightarrow x\in\{-1\}\cup[0,2].$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$.

Пример 10. Найти все значения b, при которых уравнение $3\cdot\sqrt[5]{x+2}-16b^2\cdot\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$ имеет единственное решение.

Решение: Согласно области определения уравнения $x\in(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$. Заметим, что $x=-1$ не является решением ни при каком b, и рассмотрим промежуток $x\in(-1,+\infty)$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt[5]{x+1}$, получим, что:

$$3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x+1}}-32b^2=\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}.$$

Пусть $y=\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}$. Тогда уравнение принимает вид $3y^2-y-32b^2=0$. Для нахождения области значения функции $y=y(x)$ построим график функции $f(x)=1+\frac{1}{x+1}$ (рисунок 28).

Из этого графика видно, что при $x\in(-1,+\infty)$ значения функции $f(x)$, а значит, и $y(x)$ принадлежат промежутку $y(x)\in(1,+\infty)$.

Вернемся теперь к квадратному уравнению. Найдем такие b, при которых ровно один его корень будет больше единицы. Рассмотрим квадратный трехчлен $g(y)=3y^2-y-32b^2$. Так как абсцисса вершины параболы равна $y_0=\frac{1}{6}$, то это равносильно выполнению условия $g(1)<0$ (рисунок 29).

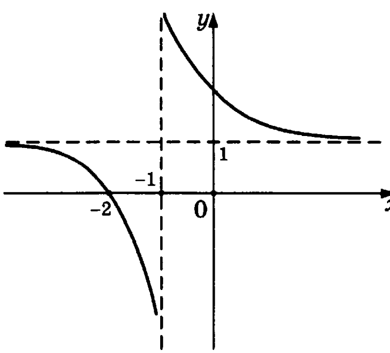


Рис. 28

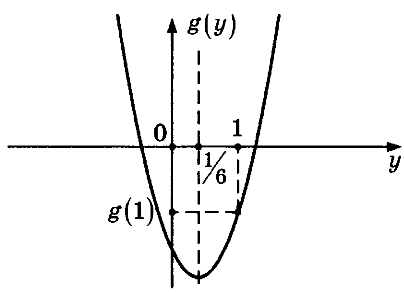


Рис. 29

Имеем:

$$g(1)=3-1-32b^2<0\Leftrightarrow b^2>\frac{1}{16}\Leftrightarrow b\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right).$$

При остальных b уравнение $g(y)=0$ на промежутке $y\in(1,+\infty)$ решений иметь не будет.

Пусть теперь $x\le -2$. Снова разделим обе части исходного уравнения на $\sqrt[5]{x+1}$. Имеем:

$$3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x+1}}-32b^2=-\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}.$$

Обозначив $y=\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}$, получим уравнение

$$g(y)=3y^2+y-32b^2=0.$$

При этом на промежутке $x\in(-\infty,-2]$ функция $y=y(x)$ принимает значения $y\in[0,\ 1)$. Здесь абсцисса вершины параболы равна $y_0=-\frac{1}{6}$. Ровно один корень квадратного уравнения лежит в промежутке $y\in[0,\ 1)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $g(0)\le 0$ и $g(1)>0$ (рисунок 30).

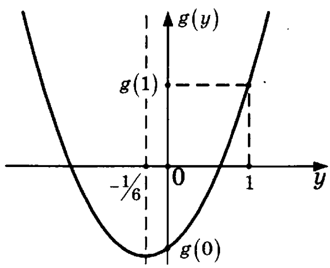


Рис. 30

Имеем:

$$\begin{cases} g(0)\le 0, \\ g(1)>0; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -32b^2\le 0, \\ 3+1-32b^2>0; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b^2\ge 0, \\ b^2<\frac{1}{8}; \end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}<b<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

При остальных b уравнение $g(y)=0$ на промежутке $y\in[0,\ 1)$ решений иметь не будет.

Таким образом, при $b\in\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ исходное уравнение будет иметь два решения (одно на промежутке $x\in(-1,+\infty)$, другое на промежутке $x\in(-\infty,-2]$), а при остальных b будет иметь единственное решение. Эти b и запишем в ответ.

Ответ: $\left(-\infty,-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]\cup\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2\sqrt{2}},+\infty\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(4\cos x-3-a)\cdot\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$$

имеет хотя бы один корень.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\operatorname{tg}x+6)^2-\left(a^2+2a+8\right)(\operatorname{tg}x+6)+a^2(2a+8)=0$$

имеет на отрезке $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$$

и указать, при каких a оно имеет единственное решение.

4. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$b\cdot 3^{-2x}+b+1=-3^{-4x-1}$$

имеет ровно два корня, больший из которых не меньше $\frac{1}{2}$.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

6. При каких значениях параметра a все числа из отрезка $-1\le x\le 3$ удовлетворяют неравенству

$$2ax+2\sqrt{2x+3}-2x+3a-5<0\,?$$

7. Найти все значения параметра a, для которых неравенство

$$4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \le 0$$

имеет хотя бы одно решение.

8. Найти все те значения параметра s, при которых корни уравнений $x^2 + \dfrac{3x}{s} + 2s = 0$ и $x^2 + \dfrac{12x}{s} - s = 0$ не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

9. Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств

$$x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 \text{ и } x^2 + 2kx \le 3k^2 - 8k + 4.$$

10. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$$

имеет единственное решение.

11. Найти все значения b, при которых оба неравенства

$$2b\cos 2(x-y) + 8b^2\cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0$$

и

$$x^2 + y^2 + 1 > \quad > 2bx + 2y + b - b^2$$

выполняются при любых x и y.

12. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4 + \sin^2 x} = a - \cos x$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ИЛЛЮСТРАЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Рассмотрим несколько задач, связанных с исследованием квадратного трехчлена, при решении которых применяется графическая иллюстрация.

Пример 1. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-4\left|x-a^2\right|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение: Если $x \geq a^2$, то $f(x)=x^2-12x+4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 6$. Если же $x \leq a^2$, то $f(x)=x^2-4x-4a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = 2$, ветви которой также направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $\left(a^2, f\left(a^2\right)\right)$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках 31–33.

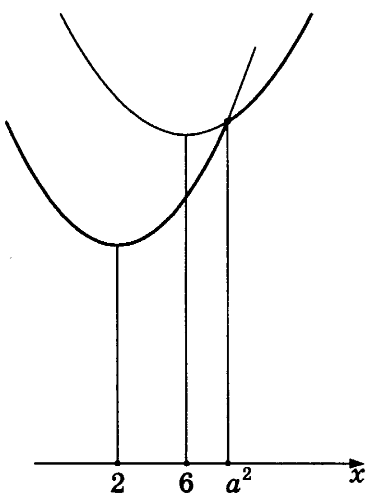


Рис. 31

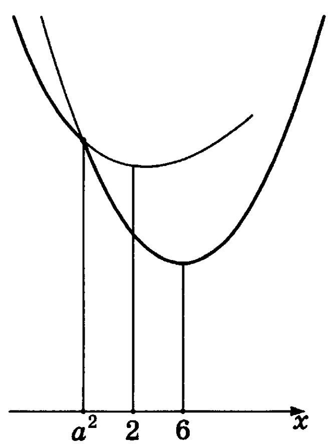


Рис. 32

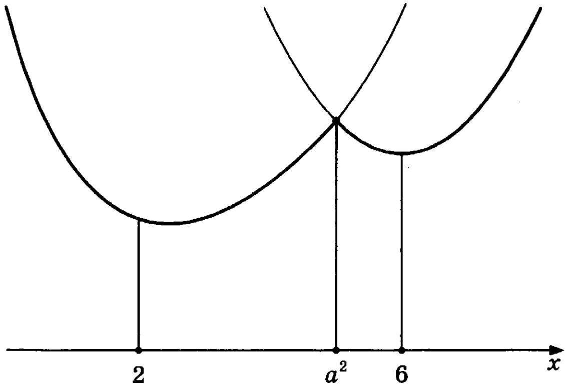


Рис. 33

Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно — три, в единственном случае (рисунок 33): $2<a^2<6 \Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$.

Ответ: $\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$.

Пример 2. Найти все значения a, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции

$$f(x)=(2a-3)x-(x+3)|x-a|.$$

Решение: Если $x\geq a$, то

$$f(x)=(2a-3)x-(x+3)(x-a)=-x^2+(3a-6)x+3a,$$

поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x=\frac{3}{2}a-3$.

Если же $x\leq a$, то

$$f(x)=(2a-3)x+(x+3)(x-a)\ =\ x^2+ax-3a,$$

и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x=-\frac{1}{2}a$, ветви которой уже направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a,f(a))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках 34–37.

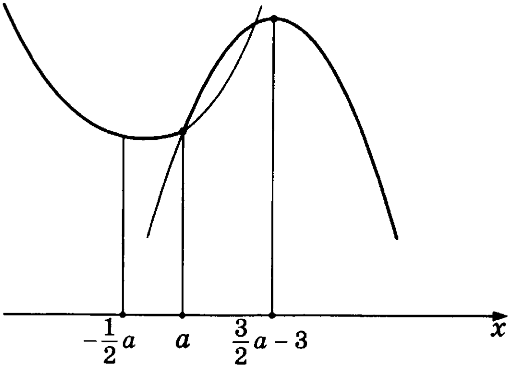


Рис. 34

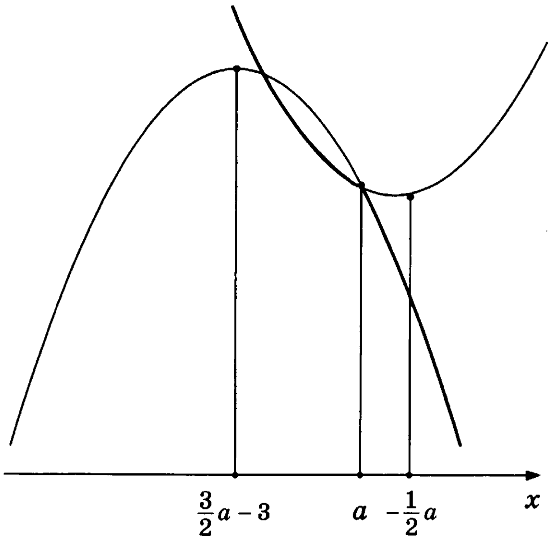


Рис. 35

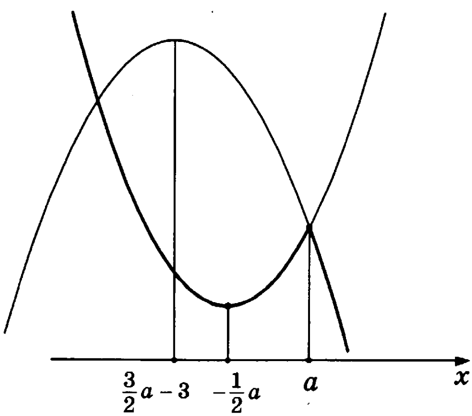


Рис. 36

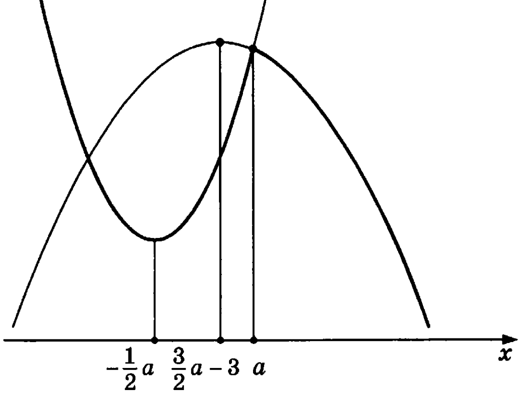


Рис. 37

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции $y = f(x)$ в нечетном числе точек тогда и только тогда, когда функция монотонна на всей числовой прямой. Это происходит в единственном случае (рисунок 35): $\frac{3}{2}a - 3 \le a \le -\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a \le 0$.

Ответ: $(-\infty, 0]$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = -x^2 + 5|x-a| - 3x$ на отрезке $[-6, 3]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение: Если $x \ge a$, то

$$f(x) = -x^2 + 5(x-a) - 3x = -x^2 + 2x - 5a,$$

поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = 1$.

Если же $x \le a$, то

$$f(x) = -x^2 - 5(x-a) - 3x = -x^2 - 8x + 5a,$$

и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -4$, ветви которой также направлены вниз. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a, f(a))$. Если точка $x = a$ не принадлежит интервалу $(-4, 1)$ (рисунки 38, 39), то функция $f(x)$ не имеет точек минимума, поэтому наименьшее значение этой функции на любом отрезке принимается на одном из концов этого отрезка. Следовательно, все такие значения a удовлетворяют условию задачи.

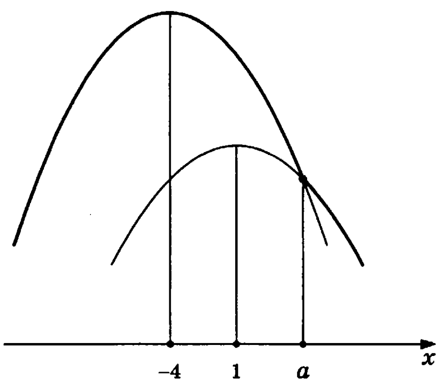


Рис. 38

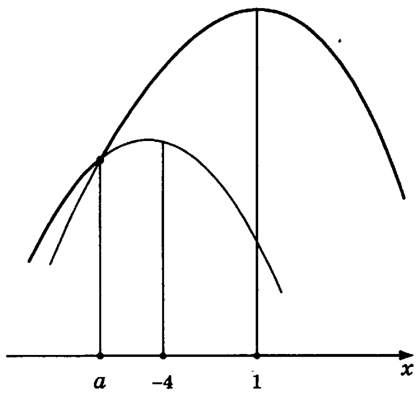


Рис. 39

В противном случае функция $f(x)$ имеет точку минимума (точка $x = a$), лежащую внутри интервала $(-4,\ 1)$. Если точка $x = a$ расположена не дальше от точки $x = 1$, чем точка $x = 3$, то значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ не меньше значения этой функции в точке $x = 3$ (рис. 40).

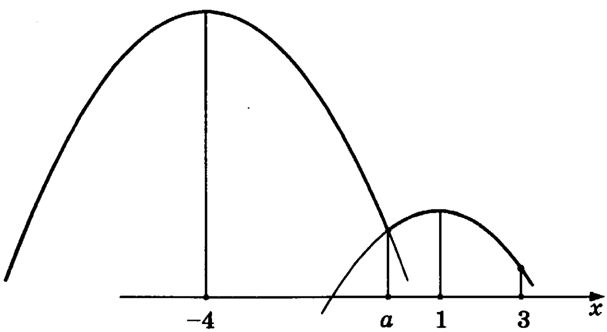


Рис. 40

Поэтому наименьшее значение функции на отрезке $[-6, 3]$ опять же принимается на одном из концов этого отрезка. Поэтому все такие a являются решением задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -4 < a < 1, \\ 1 - a \le 3 - 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 1, \\ a \ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in [-1, 1).$$

Аналогично, если точка $x = a$ расположена не дальше от точки $x = -4$, чем точка $x = -6$, то значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ не меньше значения этой функции в точке $x = -6$ (рисунок 41).

И в этом случае наименьшее значение функции на отрезке $[-6, 3]$ принимается на одном из концов этого отрезка и все такие a удовлетворяют условию задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -4 < a < 1, \\ a-(-4) \le -4-(-6); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 1, \\ a \le -2; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-4, -2].$$

Для всех остальных a значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ является наименьшим на отрезке $[-6, 3]$ (рисунок 42), и условие задачи не выполняется.

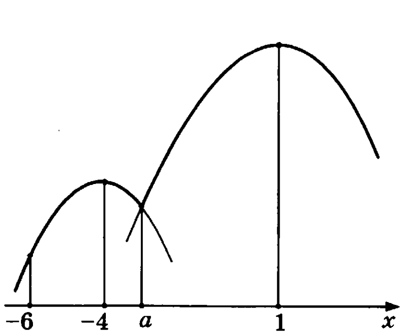


Рис. 41

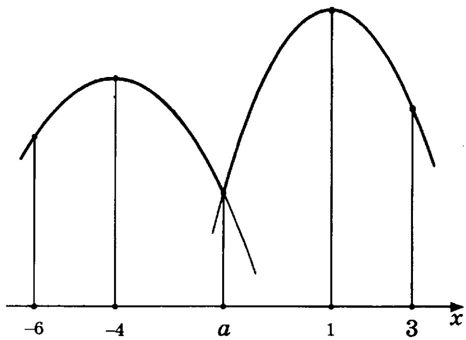


Рис. 42

Объединяя все разобранные случаи, находим ответ: $a \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x+4)$ имеет ровно три различных корня?

Решение:. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = \left|x^2 - 5|x|\right|$ и $y = a(x+4)$. Первый график разбивается на четыре участка следующим образом:

$y = x^2 + 5x$, если $x \le -5$;
$y = -x^2 - 5x$, если $-5 \le x \le 0$;
$y = -x^2 + 5x$, если $0 \le x \le 5$;
$y = x^2 - 5x$, если $x \ge 5$.

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(-4,\ 0)$ (рисунок 43).

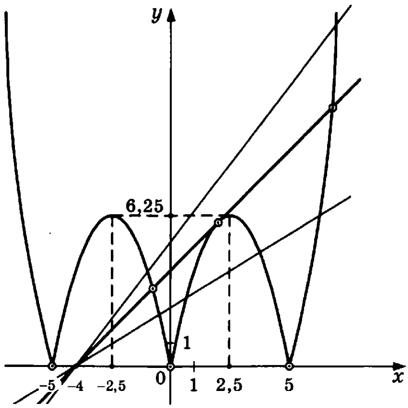


Рис. 43

Исходное уравнение имеет ровно три различных решения тогда и только тогда, когда эти два графика имеют ровно три общие точки. Как видно из рисунка, существуют две прямые, проходящие через точку $(-4,\ 0)$ и пересекающие график функции $y=\left|x^2-5|x|\right|$ ровно в трех точках. Одна из этих прямых есть ось Ox и соответствует значению $a = 0$. Другая прямая является касательной к графику функции $y=-x^2+5x$ в точке, принадлежащей интервалу $x\in(0{,}5)$. Найдем значение a, соответствующее этой прямой. При таком a уравнение

$$-x^2+5x=a(x+4)=0\Leftrightarrow x^2+(a-5)x+4a=0$$

должно иметь ровно одно решение. Дискриминант этого уравнения равен

$$D=(a-5)^2-16a=0\Leftrightarrow a^2-26a+25=0\Leftrightarrow a=1 \text{ или } a = 25.$$

Касательной, изображенной на рисунке, соответствует значение $a = 1$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: 0, 1.

Пример 5. Для каждого значения $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции

$$f(x)=x|x+2a|+a^2.$$

Решение: Если $x \geq -2a$, то $f(x)=x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$, поэтому ее график есть часть параболы, касающейся оси абсцисс в точке $x = -a$ с ветвями, направленными вверх.

Если же $x \leq -2a$, то $f(x)=-x^2-2ax+a^2=-(x+a)^2+2a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -a$, ветви которой направлены вниз. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(-2a,\ a^2)$ (рисунок 44).

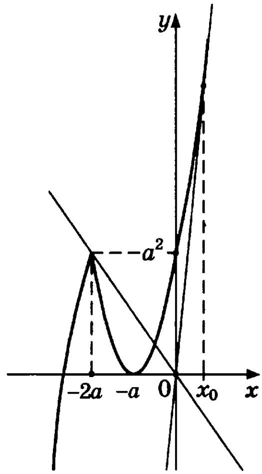


Рис. 44

Прямая $x = 0$ имеет с графиком функции $y=f(x)$ только одну общую точку. Из рисунка видно, что прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с графиком этой функции в одном из следующих трех случаев:

а) Прямая проходит через точку $(-2a,\ a^2)$. Она имеет уравнение $y=-\frac{1}{2}ax$.

б) Прямая совпадает с осью абсцисс и имеет уравнение $y = 0$.

в) Прямая касается ветви графика в точке с абсциссой $x_0 > 0$ и пересекает вторую часть графика. Найдем значение k, соответствующее этой прямой. При таком k уравнение

$$kx=(x+a)^2 \Leftrightarrow x^2+(2a-k)x+a^2=0$$

должно иметь ровно одно решение. Дискриминант этого уравнения равен

$$D=(2a-k)^2-4a^2=0 \Leftrightarrow -4ak+k^2=0 \Leftrightarrow k=0 \text{ или } k=4a.$$

Касательной, изображенной на рисунке, соответствует значение $k = 4a$.

Объединяя все рассмотренные случаи, находим ответ: $y = 0$, $y=-\frac{1}{2}ax$, $y = 4ax$.

Ответ: $y = 0$, $y=-\frac{1}{2}ax$, $y = 4ax$.

Пример 6. Найти p и q, при которых неравенство $\left|x^2+px+q\right|>2$ не имеет решений на отрезке [1, 5].

Решение: Сформулируем условие задачи следующим образом: «Найти p и q, при которых функция $f(x)=x^2+px+q$ на отрезке $x\in[1,5]$ принимает значения, лежащие в промежутке $f(x)\in[-2,2]$».

Для этого необходимо выполнение следующих условий (рисунок 45):

$$\begin{cases}-2\le f(1)\le 2,\\ -2\le f(3)\le 2,\\ -2\le f(5)\le 2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le 1+p+q\le 2,\\ -2\le 9+3p+q\le 2,\\ -2\le 25+5p+q\le 2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\le 26+6p+2q\le 4,\\ -4\le 18+6p+2q\le 4.\end{cases}$$

Здесь мы сложили первую строку с третьей, а вторую строку умножили на 2. Из первой строки полученной системы следует, что $6p+2q\le-22$, а из второй — что $6p+2q\ge-22$. Значит, $6p+2q=-22$ и $q=-11-3p$. Вернемся к исходной системе:

$$\begin{cases}q=-11-3p,\\ -2\le 1+p+q\le 2,\\ -2\le 9+3p+q\le 2,\\ -2\le 25+5p+q\le 2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-11-3p,\\ -2\le -10-2p\le 2,\\ -2\le 14+2p\le 2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-11-3p,\\ -6\le p\le -4,\\ -8\le p\le -6.\end{cases}$$

Следовательно, $p=-6$ и $q=7$.

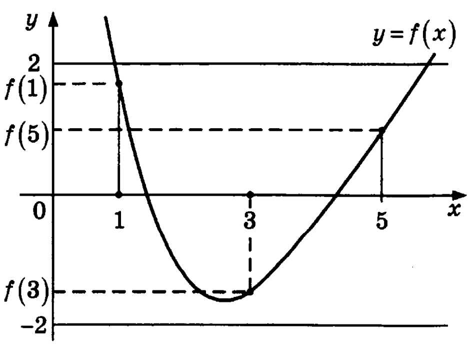


Рис. 45

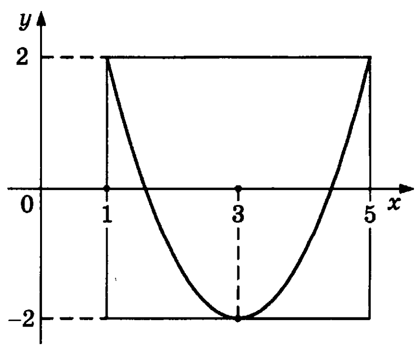


Рис. 46

Для проверки достаточности построим график функции $f(x)=x^2-6x+7$ на отрезке $x\in[1,5]$, что и сделано на рисунке 46. Из этого графика видно, что условие задачи выполняется.

Ответ: $p = -6$, $q = 7$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=2ax+\left|x^2-8x+7\right|$$

больше 1.

3. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|x^2-2x+a\right|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1,2]$.

4. Найти значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$ на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Указать это значение.

5. Найти значения c и d, при которых наибольшее значение функции

$$y(x)=\left|4\cdot\frac{3^x+3^{-x}-2}{3^x+3^{-x}+2}+2(c+2d)\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+2c+d\right|$$

на отрезке $[-1,1]$ является наименьшим.

6. Функция $y(x)=x^2+2(c-d)x+3c-d$ такова, что $y(1)\cdot y(-1)\leq 0$ и $|c-d|\geq 1$. Найти числа c и d, при которых длина промежутка, представляющего собой множество значений функции $f(x)=|y(x)|$ на отрезке $[-1,1]$, наименьшая; указать это множество значений.

7. Найти наименьшее значение выражения

$$(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2,$$

если x, y, $z\in[-1,1]$.

§ 6. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФУНКЦИИ. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если существует такое число M, что для любого x из области определения этой функции выполнено неравенство $f(x)\le M$ ($f(x)\ge M$). Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу. Аналогично определяется ограниченность функции на каком-либо промежутке. Сформулируем полезное утверждение, помогающее в некоторых случаях находить область значений функции.

Теорема 1. Пусть a и b — любые неотрицательные числа. Тогда среднее геометрическое этих чисел не превосходит их среднего арифметического, а именно $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$. При этом равенство $\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$ достигается в том и только в том случае, когда $a=b$.

В этом параграфе будут разобраны задачи, в решении которых используется свойство ограниченности функций, а также задачи, в которых необходимо найти область значений какой-либо функции.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Для всех вещественных значений a решить уравнение $(a+2)^2\log_3\left(2x-x^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0$.

Решение: Перепишем данное уравнение в виде

$$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

На области определения справедливы неравенства: $(a+2)^2\ge 0$ и $\log_3\left(1-(x-1)^2\right)\le 0$, второе неравенство следует из неравенства $1-(x-1)^2\le 1$. С другой стороны, $(3a-1)^2\ge 0$ и $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le 0$, поскольку $1-\frac{x^2}{2}\le 1$. Это значит, что

$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)\le 0$ и $(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le 0$. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе:

$$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-(x-1)^2>0, \\ 1-\frac{x^2}{2}>0, \\ (a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)=0, \\ (3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+2=0, \\ \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0, \\ 0<x<\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} 3a-1=0, \\ \log_3\left(1-(x-1)^2\right)=0, \\ 0<x<\sqrt{2}, \end{cases} \end{array}\right.$$

так как легко проверить, что числа $a+2$ и $3a-1$, а также выражения $\log_3\left(1-(x-1)^2\right)$ и $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ одновременно в нуль не обращаются. Таким образом, если $a=-2$, то $x=0$, что не входит в область определения неравенства. Если $a=\frac{1}{3}$, то $x=1$ — является решением задачи.

Ответ: Если $a=\frac{1}{3}$, то $x=1$; если $a\neq\frac{1}{3}$, то нет решений.

Пример 2. При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)=a-\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение: Пусть $y=2^{2x-x^2}$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$2\cos^2\frac{y}{2}=a-\sqrt{3}\sin y \Leftrightarrow 1+\cos y=a-\sqrt{3}\sin y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos y+\sin\frac{\pi}{3}\sin y=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(y-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a-1}{2}.$$

Найдем область значений функции $y = y(x) = 2^{2x-x^2}$. Так как $2x - x^2 = 1-(x-1)^2 \le 1$, то $y(x) \in (0, 2]$. Значит, выражение $y - \frac{\pi}{3}$ принимает все значения, лежащие в промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}, 2-\frac{\pi}{3}\right]$. Как видно из рисунка 47,

выражение $\cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$ принимает в этом случае значения из промежутка $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Следовательно, исходное уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2} < \frac{a-1}{2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (2, 3].$$

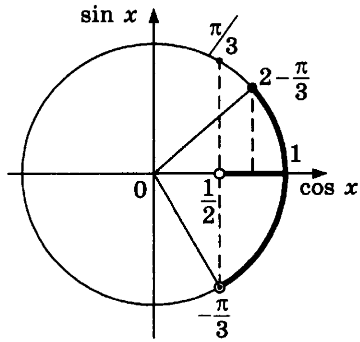


Рис. 47

Ответ: $(2, 3]$.

Пример 3. Найти все значения x из промежутка $[-3, 1]$, для которых неравенство

$$x\left(\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}\left(3m^2 + 12m + 11\right)\right) > 0$$

выполняется при любых целых m.

Решение: Найдем область значений функции

$$y(t) = \operatorname{arctg}\left(3t^2 + 12t + 11\right),$$

где t — любое действительное число. Ясно, что

$$3t^2 + 12t + 11 = 3(t+2)^2 - 1 \ge -1.$$

Поэтому $\operatorname{arctg}\left(3t^2 + 12t + 11\right) \ge -\frac{\pi}{4}$. С другой стороны, поскольку выражение $3t^2 + 12t + 11$ принимает сколь угодно большие значения, функция $y(t)$ принимает значения, сколь угодно близкие к $\pi/2$. Следовательно, искомой областью значения является промежуток $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим три случая.

а) Если $x > 0$, то неравенство примет следующий вид:

$$\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}\left(3m^2 + 12m + 11\right) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg}\left(3m^2 + 12m + 11\right) < \frac{\pi(x+1)}{4}.$$

При достаточно больших целых m выражение $\operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)$ принимает значения, сколь угодно близкие к $\pi/2$. Значит, чтобы последнее неравенство выполнялось при любых целых m, необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{\pi(x+1)}{4} \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \geq 1$. Так как согласно условию задачи $x \in [-3, 1]$, решением в первом случае будет служить $x = 1$.

б) Если $x = 0$, исходное неравенство примет вид $0 > 0$ и не будет верным ни при каком m.

в) Пусть $x < 0$. Имеем:

$$\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) > \frac{\pi(x+1)}{4}.$$

Так как свое наименьшее значение $-\pi/4$ функция $y(t) = \left(3t^2 + 12t + 11\right)$ принимает при целом значении переменной t ($t = -1$), то последнее неравенство будет выполнено при всех целых m тогда и только тогда, когда $\frac{\pi(x+1)}{4} < -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x < -2$. Так как при этом $x \in [-3, 1]$, то решением в данном случае будут служить $x \in [-3, -2)$.

Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $[-3, -2) \cup \{1\}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leq 10.$$

Решение:. Пусть $t = \log_2 x$, тогда данное неравенство примет следующий вид: $5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \leq 10.$

Ясно, что полученное неравенство выполнено при всех $t < 0$. Для $t > 0$ имеем:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^{t} \cdot \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^{t} \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}+t}} \geq 2\sqrt{5^{2}} = 10.$$

Здесь мы два раза использовали неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. Из проведенных оценок следует, что $t = 1$ — единственное положительное решение неравенства. Возвращаясь к переменной x, получаем, что $0 < x < 1$ или $x = 2$.

Ответ: $(0,1)\cup\{2\}$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 64 \cdot 25^{-\sqrt{y}} + (8-40a) \cdot 5^{-\sqrt{y}} - 5a \leq 0, \\ 40 \cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80 \cdot 2^{x} + 5a + a \cdot 2^{-x} \end{cases}$$

имеет решение.

Решение: Положим $t = 5^{-\sqrt{y}} \in (0, 1]$. Тогда первое неравенство системы принимает вид

$$64t^{2} + (8-40a)t - 5a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 64\left(t+\frac{1}{8}\right)\left(t-\frac{5a}{8}\right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq \frac{5a}{8}.$$

Следовательно, для существования y необходимо и достаточно выполнения условия $a > 0$, при этом $t \in \left(0, \min\left\{1, \frac{5a}{8}\right\}\right]$. Рассмотрим теперь второе уравнение системы. Переменная $z = 2^{x}$ принимает все положительные значения и $a > 0$. Поэтому к правой части этого уравнения можно применить неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. Имеем:

$$80z + 5a + \frac{a}{z} \geq 5a + 2\sqrt{80z \cdot \frac{a}{z}} = 5a + 8\sqrt{5a}.$$

Следовательно, x существует при $t \geq \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}}$, а исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le\min\left\{1,\frac{5a}{8}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le 1,\\ \frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le\frac{5a}{8};\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad a\in\left[\frac{4}{5},\frac{72-16\sqrt{14}}{5}\right].$$

Ответ: $\left[\frac{4}{5},\frac{72-16\sqrt{14}}{5}\right]$.

Пример 6. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$x^2+4x+6-4a(x-a)-\cos(x+2)=8a+\cos(x-4a+2).$$

Решение: Пусть, для удобства, $x+2=t$, тогда $x=t-2$. Имеем:

$$t^2+2-4a(t-2-a)-\cos t=8a+\cos(t-4a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2-4at+4a^2+2=\cos t+\cos(t-4a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-2a)^2+2=2\cos(t-2a)\cos 2a.$$

Так как левая часть полученного уравнения всегда больше либо равна 2, а правая часть меньше либо равна 2, то необходимые условия существования решения есть $\cos 2a=\pm 1$, то есть $a=\frac{\pi n}{2}$; $n\in Z$ и $t-2a=0$. Пусть $a=\pi n$; $n\in Z$. Имеем:

$$\begin{cases}t=2a,\\ \cos 2a=1,\\ \cos(t-2a)=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pi n,\\ t=2\pi n;\ n\in Z.\end{cases}$$

Если же $a=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $n\in Z$, получаем, что

$$\begin{cases}t=2a,\\ \cos 2a=-1,\\ \cos(t-2a)=-1,\end{cases}$$

— нет решений. Таким образом, при $a=\pi n$; $n\in Z$ решением являются $t=2\pi n$, то есть $x=2\pi n-2$; при остальных a решений нет.

Ответ: *Если* $a=\pi n$, *то* $x=2\pi n-2$; $n\in Z$.

Пример 7. При всех значениях параметра c решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{9}{\sqrt{x+c}} + \dfrac{16}{\sqrt{y-c}} \le 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

Решение: Запишем первое неравенство системы следующим образом:

$$\frac{9}{\sqrt{x+c}} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} \le 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\sqrt{x+c}} + \sqrt{x+c} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} + 4\sqrt{y-c} \le 22.$$

Применим дважды к левой части неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое положительных чисел. Имеем:

$$\frac{9}{\sqrt{x+c}} + \sqrt{x+c} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} + 4\sqrt{y-c} \ge$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{x+c}} \cdot \sqrt{x+c}} + 2\sqrt{\frac{16}{\sqrt{y-c}} \cdot 4\sqrt{y-c}} = 22.$$

Значит, левая часть исходного неравенства равна 22, а это возможно при выполнении условий:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{\sqrt{x+c}} = \sqrt{x+c}, \\ \dfrac{16}{\sqrt{y-c}} = 4\sqrt{y-c}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+c=9, \\ y-c=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-c, \\ y=4+c. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь второе уравнение исходной системы:

$$2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1 \Leftrightarrow 2^{-2-c} \cdot \log_2(-c) = 1 \Leftrightarrow \log_2(-c) = 2^{2+c}.$$

Функция $f(c) = \log_2(-c)$ убывает при $c \in (-\infty, 0)$, а функция $g(c) = 2^{2+c}$ возрастает на всей числовой прямой. Поэтому корень уравнения $f(c) = g(c)$ угадывается: $c = -2$. Таким образом, задача имеет решение только при $c = -2$, при этом $x = 11$ и $y = 2$.

Ответ: Если $c = -2$, то $x = 11$ и $y = 2$; если $c \ne -2$, то нет решений.

Пример 8. Найти все пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению $(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy$.

Решение: Ясно, что пара (0, 0) является решением данного уравнения. Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел x, y отлично от нуля. Имеем:

$$(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy \quad \Leftrightarrow \quad x+y-3=\frac{2xy}{x^2+y^2}\in[-1,1]$$

при всех значениях x и y. Так как $x + y - 3$ — целое число, то возможны три варианта.

а) Если $x + y - 3 = -1$, то $x = -y$, — нет решений.

б) Если $x + y - 3 = 0$, то либо $x = 0$, $y = 3$, либо $x = 3$, $y = 0$.

в) Если $x + y - 3 = 1$, то $x = y$, следовательно, $x = 2$ и $y = 2$.

Таким образом, решением данного уравнения будут служить следующие пары чисел: $(x,y)=\{(2,2);(3,0);(0,3);(0,0)\}$.

Ответ: $\{(2,2);(3,0);(0,3);(0,0)\}$.

Пример 9. Найти все a, при которых область значений функции $y=\dfrac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$ содержит отрезок $[0,1]$.

Решение: Пусть $t = \sin x$, $t\in[-1,1]$. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти a, для которых функция $f(t)=\dfrac{4t+a}{4a-2t}$ при изменении t от -1 до 1 принимает все значения от 0 до 1». Ясно, что при $a = 0$ условие задачи не выполняется. Пусть $a > 0$. Преобразуем функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t)=\frac{4t+a}{4a-2t}=-2+\frac{9a}{4a-2t}; \qquad f(0)=\frac{1}{4}.$$

Возможны два случая. Если $a\le\frac{1}{2}$, то график функции $f(t)$ изображен на рисунке 48.

Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $f(-1)\le 0$. Имеем:

$$f(-1)\le 0\Leftrightarrow\frac{a-4}{4a+2}\le 0\Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{2},4\right].$$

Получаем, что все $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ являются решением задачи.

Пусть теперь $a > \frac{1}{2}$. В этом случае график функции $f(t)$ изображен на рисунке 49.

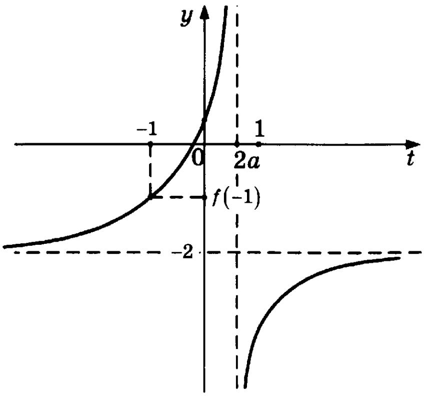


Рис. 48

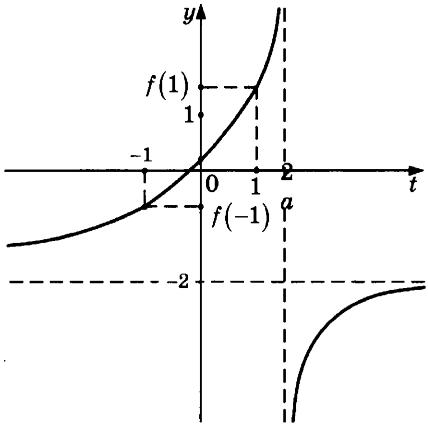


Рис. 49

Здесь для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы были верны неравенства $f(-1) \le 0$ и $f(1) \ge 1$. Имеем:

$$\begin{cases} f(-1) \le 0, \\ f(1) \ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-4}{4a+2} \le 0, \\ \dfrac{a+4}{4a-2} \ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-4}{2a+1} \le 0, \\ \dfrac{a-2}{2a-1} \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{2}, 2\right].$$

Все такие a являются решением задачи. Таким образом, положительные решения есть $a \in (0, 2]$.

Отрицательными решениями будут служить $a \in (-2, 0]$. Это следует из следующей симметрии.

Пусть $g(t, a) = \dfrac{4t+a}{4a-2t}$. Тогда $g(-t, -a) = g(t, a)$ и отрезок $t \in [-1, 1]$ симметричен относительно точки $t = 0$.

Ответ к задаче выписывается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $[-2, 0) \cup (0, 2]$.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}-2=\ a^3-3a^2+a+\sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-x^2}+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi x}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi x}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(x-1)^2}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}\right)-2=$$

$$=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(x-1)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}.$$

Заметим, что если $x = 1$ является решением данного уравнения, то отсюда следует, что $a^3-3a^2+a=0$, то есть $a=0, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Кроме того, при этих значениях a других решений, кроме $x = 1$, уравнение не имеет. Действительно, пусть $a^3-3a^2+a=0$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$2^{1-(x-1)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=\sqrt{2}.$$

Так как $2^{1-(x-1)^2}\le 2^1=2$, а $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$, то левая часть этого уравнения не превосходит $\sqrt{2}$. Следовательно, равенство возможно, только если выполнены условия:

$$\begin{cases} 2^{1-(x-1)^2}=2, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1; \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=1.$$

Это означает, что $a = 0, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Других значений a, удовлетворяющих условию задачи, нет. В самом деле, если число $x_0 \neq 1$ является решением исходного уравнения, то решением этого уравнения также будет служить число $2 - x_0 \neq x_0$. Проверим это:

$$2^{1-(2-x_0-1)^2} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi(2-x_0)}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(1-x_0)^2} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi x_0}{4}\right) - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(x_0-1)^2} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}.$$

То есть в этом случае либо будет четное число решений (так как $x = 1$ уже не является решением), либо их не будет совсем.

Ответ: 0, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область значений функции

$$f(x) = \log_{16x-12-4x^2} \frac{|x+1| + |x-5|}{3}.$$

2. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (\log_3 x + 2\sqrt{5}\log_x 3 - 6)}{(3\cos\sqrt{x-9} - 5) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

3. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $\frac{x - (2^a + 2^{4-a})}{x - (\cos a - 1)} < 0$ выполнено при всех x, принадлежащих промежутку $(8, 10]$.

4. Найти все k, при которых функция

$$y(x) = k(2\sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, больших 3.

5. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\dfrac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

6. Найти все пары чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3\cdot 4^{2y-1} \le 2, \\ x+3y \ge 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

7. При каких a уравнение

$$(\sqrt{x^2-3ax+8} + \sqrt{x^2-3ax+6})^x +$$

$$+(\sqrt{x^2-3ax+8} - \sqrt{x^2-3ax+6})^x = 2(\sqrt{2})^x$$

имеет единственное решение?

8. Для каждого a решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}, \\ x \le 1. \end{cases}$$

9. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \le 4(a^2+a), \\ \log_2^2 xy \ge 8(a^2+a). \end{cases}$$

10. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2+2px+3p^2+3p+3 \le 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11. Найти наибольшее значение величины a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1} \le \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

12. Найти все значения p, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{\operatorname{tg}(\pi y)+\operatorname{ctg}(\pi y)} = \sin(px)+\cos(px), \\ 8y^2 + \left|\log_2\left(\dfrac{1}{p^2} - 8\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\right| = 1 \end{cases}$$

имеет решение.

13. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\left(\frac{18\pi}{a}\right)$$

имеет ровно два корня.

14. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \sin^2 \pi x + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x+1} - 1$$

на промежутке $(0;+\infty)$ и указать, при каких x оно достигается.

§ 7. ДРУГИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

В данном параграфе мы рассмотрим задачи, при решении которых используются свойства четности, монотонности и непрерывности функций. Дадим некоторые определения.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого числа x из области определения этой функции число $(-x)$ также принадлежит ее области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого числа x из области определения этой функции число $(-x)$ также принадлежит ее области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График любой четной функции симметричен относительно оси Oy, а график любой нечетной функции симметричен относительно начала координат точки O.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве A, которое содержится в области определения данной функции, если для любых двух чисел $x_1, x_2 \in A$ таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве A, которое содержится в области определения данной функции, если для любых двух чисел $x_1, x_2 \in A$ таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

В качестве множества A обычно рассматривается отрезок, интервал, полуинтервал, луч числовой прямой, а также вся числовая прямая. Полезно знать следующее свойство возрастающей (убывающей) функции.

Теорема 1. Каждое свое значение на множестве A возрастающая (убывающая) на этом множестве функция принимает ровно по одному разу.

Это позволяет в некоторых случаях ограничиться угадыванием корня уравнения. Не давая строгого определения непрерывной функции, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на этом отрезке все промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$ значения. В частности, если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра a функция $f(x) = (a - x) \cdot 5^{x+7+4a} - (a + x) \cdot 5^{a^2-x-5}$ является нечетной?

Решение: Заметим сначала, что функция $f(x)$ определена при всех действительных x. Необходимое условие, чтобы функция $f(x)$ была нечетной, есть $f(0) = 0$. Действительно, если функция $f(x)$ — нечетная, то для любого x из области определения должно выполняться равенство $f(-x) = -f(x)$. Значит, $f(-0) = -f(0)$, откуда $f(0) = -f(0)$ и $f(0) = 0$. Имеем далее:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 5^{7+4a} = a \cdot 5^{a^2-5} \Leftrightarrow a = 0,\ a = 6 \text{ или } a = -2.$$

Если $a = 0$, то функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = -x \cdot 5^{x+7} - x \cdot 5^{-x-5}$$

и не является нечетной. Действительно,

$$f(-1) = 5^6 + 5^{-4} \neq -f(1) = 5^8 + 5^{-6}.$$

Если $a = 6$, то функция $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = (6-x) \cdot 5^{31+x} - (6+x) \cdot 5^{31-x}$$

и является нечетной. В самом деле, для любого $x \in R$

$$f(-x) = (6+x) \cdot 5^{31-x} - (6-x) \cdot 5^{31+x} = -f(x).$$

И наконец, если $a = -2$, то

$$f(x) = (-2-x) \cdot 5^{x-1} - (-2+x) \cdot 5^{-x-1}$$

— нечетная функция. Это следует из того, что для любого действительного числа x верно равенство

$$f(-x) = (-2+x) \cdot 5^{-x-1} - (-2-x) \cdot 5^{x-1} = -f(x).$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 6$ и $a = -2$.

Ответ: 6, −2.

Пример 2. Найти все a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение: Пусть $f(x) = x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2$. Заметим, что функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной, то есть $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in R$. Это означает, что если число x_0 является решением данного уравнения, то решением будет служить также и число $(-x_0)$. Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы $x = 0$ было бы одним из решений уравнения (иначе решений будет четное число или не будет совсем). Имеем:

$$-2a\sin(\cos 0) + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ или } a = 2\sin 1.$$

Проверим достаточность. Очевидно, что при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Пусть теперь $a = 2\sin 1$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$x^2 - 4\sin 1 \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4\sin 1(\sin 1 - \sin(\cos x)) = 0.$$

Так как $\cos x$ изменяется в пределах от -1 до 1, а функция $f(t)=\sin t$ возрастает на промежутке $t\in[-1,1]$, то наибольшее значение выражения $\sin(\cos x)$ равно $\sin 1$. Это означает, что $\sin 1-\sin(\cos x)\geq 0$ при любом $x\in R$. Поскольку x^2 тоже принимает только неотрицательные значения, то полученное уравнение равносильно следующей системе:

$$x^2+4\sin 1(\sin 1-\sin(\cos x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ \sin 1-\sin(\cos x)=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Таким образом, $a = 2\sin 1$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 0, $2\sin 1$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если (x_0, y_0) — решение данной системы, то и $(-x_0, y_0)$ — также решение системы. Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы одним из решений служила пара чисел $(0, y_0)$, где y_0 — любое число. При этом система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 7=3y_0+3a, \\ y_0^2=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{3}, \\ y_0=1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a=\dfrac{10}{3}, \\ y_0=-1. \end{cases}$$

Проверим достаточность. Пусть сначала $a=\dfrac{4}{3}$. Тогда исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2, \\ x^2+y^2=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}-3y=5(x^2-|x|), \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Так как выполнены неравенства $3\cdot 2^{|x|}\geq 3\cdot 2^0=3$ и $y\leq 1$ (следует из второго условия системы), левая часть этого уравнения всегда больше либо равна 0. С другой стороны, из условия $|x| \le 1$, которое также следует из второго уравнения системы, вытекает, что

$$x^2 - |x| = |x|(|x| - 1) \le 0.$$

Значит, равенство возможно только в том случае, когда

$$3 \cdot 2^{|x|} - 3y = 5(x^2 - |x|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} - 3y = 0, \\ 5(x^2 - |x|) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 2, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что только пара (0, 1) будет решением второго уравнения системы. Значит, $a = \dfrac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a = \dfrac{10}{3}$, то исходная система перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 + 6 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Существуют, по крайней мере, три пары чисел (x, y), являющиеся решением этой системы — это (0, −1), (1, 0) и (−1, 0). Значит, $a = \dfrac{10}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4/3.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 2 \ge 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 1 \ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 2 \ge 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x+2)^2 - (y-1) + 3a + 1 \ge 0, \\ a(y-1)^2 - (x+2) + 3a + 1 \ge 0. \end{cases}$$

Пусть $x + 2 = u$, $y - 1 = v$. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} au^2 - v + 3a + 1 \ge 0, \\ av^2 - u + 3a + 1 \ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение». Заметим, что если пара (u_0, v_0) является решением данной системы, то решением будет служить также пара (v_0, u_0). Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы одно из решений имело вид (u_0, u_0). В этом случае система приобретает следующий вид:

$$au^2 - u + 3a + 1 \ge 0.$$

Полученное неравенство будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда выполены два условия:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 1 - 4a(3a+1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 12a^2 + 4a - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Проверим достаточность. При $a = -\dfrac{1}{2}$ система примет следующий вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}u^2 - v - \dfrac{1}{2} \ge 0, \\ -\dfrac{1}{2}v^2 - u - \dfrac{1}{2} \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2v + 1 \le 0, \\ v^2 + 2u + 1 \le 0. \end{cases}$$

Сложим две строчки полученной системы. Имеем:

$$u^2 + 2v + 1 + v^2 + 2u + 1 \le 0 \Leftrightarrow (u+1)^2 + (v+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow u = v = -1.$$

Проверкой убеждаемся, что пара $u = -1$, $v = -1$ является решением системы. Таким образом, $a = -\dfrac{1}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $-1/2$.

Пример 5. Найти все значения a, при которых уравнение $2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) + a^2 = \dfrac{5}{4}$ имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если число x_0 является решением данного уравнения, то решением также будет и число $1/x_0$. Действительно,

$$\frac{2\frac{1}{x_0}}{1+\frac{1}{x_0^2}}=\frac{2x_0}{1+x_0^2} \text{ и } \cos\left(\frac{\frac{1}{x_0^2}-1}{\frac{1}{x_0}}\right)=\cos\left(\frac{1-x_0^2}{x_0}\right)=\cos\left(\frac{x_0^2-1}{x_0}\right).$$

Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы $x = 1$ или $x = -1$ было бы одним из решений этого уравнения. Пусть $x = 1$. Имеем:

$$2+a\cos 0+a^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+a+\frac{3}{4}=0$$

— нет решений. Если же $x = -1$ получаем, что

$$\frac{1}{2}+a\cos 0+a^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+a-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \text{ или } a=-\frac{3}{2}.$$

Проверим достаточность. Пусть сначала $a=\frac{1}{2}$. Имеем:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{1+x^2}}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-1=0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=2^{\frac{2x}{1+x^2}}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-1.$$

Покажем, что уравнение $f(x)=0$ имеет решение на отрезке $[x_1,x_2]$, где $x_1,x_2<-1$. В качестве x_1 возьмем меньший корень уравнения $\frac{x^2-1}{x}=-2\pi$, а в качестве x_2 — меньший корень уравнения $\frac{x^2-1}{x}=-\frac{3\pi}{2}$ (легко проверить, что оба выбранных числа меньше -1). Тогда $f(x_1)=2^{\frac{2x_1}{1+x_1^2}}-\frac{1}{2}>0$, так как

$$2^{\frac{2x_1}{1+x_1^2}}-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow\frac{2x_1}{1+x_1^2}>-1\Leftrightarrow(x_1+1)^2>0.$$

С другой стороны, $f(x_2)=2^{\frac{2x_2}{1+x_2^2}}-1<0$, поскольку

$$2^{\frac{2x_2}{1+x_2^2}}-1<0 \Leftrightarrow \frac{2x_2}{1+x_2^2}<0 \Leftrightarrow x_2<0.$$

Таким образом, значения непрерывной функции $f(x)$ на концах отрезка $[x_1,x_2]$ имеют разные знаки, следовательно, существует точка $c\in(x_1,x_2)$ такая, что $f(c)=0$. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет, по крайней мере, два различных решения, то есть $a=\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a=-\frac{3}{2}$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+\frac{9}{4}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{1+x^2}}=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-1.$$

Так как при любом $x\in R$ выполнено неравенство $\frac{2x}{1+x^2}\geq-1$, то левая часть уравнения $2^{\frac{2x}{1+x^2}}\geq\frac{1}{2}$. С другой стороны, правая часть $\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-1\leq\frac{1}{2}$, поскольку $\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\leq1$. Значит, равенство возможно только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{1+x^2}}=\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-1=\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2}=-1, \\ \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=1; \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Следовательно, $a=-\frac{3}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $-3/2$.

Пример 6. Найти наименьшее и наибольшее значение a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$ имеет хотя бы одно решение.

Решение: При любом a функция $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве $x \ge b = \max\{a,-1\}$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций и поэтому возрастает. Она непрерывна и принимает сколь угодно большие значения. Следовательно, уравнение $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$ будет иметь решение в том и только в том случае, когда наименьшее значение функции $f(x)$, т.е. $f(b)$, не превосходит 2. Рассмотрим два случая. Если $a \ge -1$, имеем:

$$f(b)=f(a)=\sqrt{a^3+1}\le 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \le \sqrt[3]{3},$$

с учетом $a \ge -1$ получаем $a \in [-1, \sqrt[3]{3}]$. Если же $a < -1$, то в этом случае

$$f(b)=f(-1)=\sqrt{-1-a}\le 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \ge -5.$$

С учетом $a < -1$ находим, что $a \in [-5,-1)$. Таким образом, при $a \in [-5, \sqrt[3]{3}]$ данное уравнение имеет решение, наименьшее из этих a равно $a_{\min}=-5$, наибольшее равно $a_{\max}=\sqrt[3]{3}$.

Ответ: -5, $\sqrt[3]{3}$.

Пример 7. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$ имеет хотя бы одно решение.

Решение: Рассмотрим функцию

$$f(x)=9|x-1|-4x+|3x-|x+a||$$

и обратим внимание, что задача сводится к исследованию уравнения $f(x)=0$. Функция $f(x)$ убывает при $x \le 1$ и возрастает при $x \ge 1$. Действительно, на промежутке $x \in (-\infty, 1]$ при любом раскрытии модулей коэффициент при x будет равен $k=-9-4\pm 3\pm 1$ и будет меньше нуля, а на промежутке $x \in [1+\infty)$ будет равен $k=9-4\pm 3\pm 1$ и будет больше нуля. Следовательно, необходимым и достаточным условием существования хотя бы одного решения уравнения $f(x)=0$ является условие $f(1)\le 0$. Имеем:

$$-4+|3-|1+a||\le 0 \Leftrightarrow |3-|1+a||\le 4 \Leftrightarrow -4\le 3-|1+a|\le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\le|1+a|\le 7 \Leftrightarrow -7\le 1+a\le 7 \Leftrightarrow -8\le a\le 6.$$

Ответ: $[-8,6]$.

Пример 8. Найти значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$3^{1-x^2-2ax-2a}=\log_3\frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}$$

принадлежат отрезку $[-3,0]$.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3^{1-x^2-2ax-2a}=\log_3\frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{(a-1)^2-(x+a)^2}=\log_3\left(\frac{|x+a|}{2|a-1|}+\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{(a-1)^2(1-\frac{(x+a)^2}{(a-1)^2})}=\log_3\left(\frac{|x+a|}{2|a-1|}+\frac{5}{2}\right).$$

Пусть $\dfrac{|x+a|}{|a-1|}=t\ge 0$. Имеем:

$$3^{(a-1)^2(1-t^2)}=\log_3\frac{t+5}{2}.$$

При $t\ge 0$ левая часть полученного уравнения есть убывающая, а правая — возрастающая по t функции. Поэтому корень этого уравнения угадывается: $t=1$. Имеем далее:

$$\frac{|x+a|}{|a-1|}=1\Leftrightarrow\begin{cases}|x+a|=|a-1|\\ a\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+a=a-1\\ x+a=1-a\end{array}\right.\\ a\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1-2a\end{array}\right.\\ a\ne 1.\end{cases}$$

Поэтому для того, чтобы все решения данного уравнения принадлежали отрезку $[-3,0]$, необходимо и достаточно выполнение условий $-3\le 1-2a\le 0$, $a\ne 1$. Отсюда и получается ответ.

Ответ: $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

Пример 9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\ge 0$$

имеет ровно одно решение.

Решение: Пусть $y=\sqrt{x^2+ax+5}$, $y\ge 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$\log_{\frac{1}{a}}(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)+\log_a 3\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\log_5(y+1)}{\log_5 a}\cdot\log_5(y^2+1)+\frac{\log_5 3}{\log_5 a}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)-\log_5 3}{\log_5 a}\le 0.$$

Заметим, что функция $y=y(x)$ принимает все значения из промежутка $[y_0,+\infty)$, причем либо $y_0=0$, либо $y_0=y(x_0)$, где x_0 — абсцисса вершины параболы $f(x)=x^2+ax+5$. Поэтому при $a\in(0,1)$ неравенство примет вид

$$\log_5(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)\ge\log_5 3$$

и будет иметь бесконечно много решений. Пусть теперь $a>1$. В этом случае имеем:

$$g(y)=\log_5(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)\le\log_5 3.$$

Функция $g(y)$ определена при $y\ge 0$ и возрастает на этом промежутке как произведение неотрицательных возрастающих функций. Поэтому корень уравнения угадывается: $y=2$, а неравенство имеет решением промежуток $y\in[y_0,2]$. Следовательно, решение будет единственным только в том случае, когда $y_0=2$.

Найдем соответствующее значение a. Вершина параболы $f(x)=x^2+ax+5$ имеет абсциссу $x_0=-\frac{a}{2}$. Имеем:

$$2=y_0=y(x_0)=y\left(-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+5}\Leftrightarrow 5-\frac{a^2}{4}=4\Leftrightarrow a=\pm 2.$$

Условию $a>1$ удовлетворяет $a=2$.

Ответ: 2.

Пример 10. Указать все значения a, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет решение.

Решение: Пусть $t = \sin x$, $t\in[-1,1]$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид: $\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t$. Докажем следующее вспомогательное утверждение. Если $f(t)$ — возрастающая на области определения функция, то уравнения $f(f(t))=t$ и $f(t)=t$ эквивалентны. Действительно, если $f(t)=t$, то $f(f(t))=f(t)=t$. Пусть теперь $f(f(t))=t$ и $f(t)>t$. В силу возрастания функции $f(t)$ имеем $f(f(t))>f(t)>t$ — противоречие. Аналогично, если $f(f(t))=t$ и $f(t)<t$, то $f(f(t))<f(t)<t$, что также противоречит условию. Значит, если $f(f(t))=t$, то $f(t)=t$. Заметим, что для убывающей функции данное утверждение может быть неверным.

Применим доказанное утверждение к возрастающей на промежутке $t\in[-a,1]$ функции $f(t)=\sqrt{a+t}$ (считаем, что $-a \le 1$, то есть $a \ge -1$). Имеем:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t \Leftrightarrow \sqrt{a+t}=t \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 1, \\ t^2-t-a=0. \end{cases}$$

Полученное квадратное уравнение при $a<-\frac{1}{4}$ не имеет решений, а при $a\ge-\frac{1}{4}$ имеет корни $t_1=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $t_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Если $a>0$, то $1+4a>1$ и $t_1=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$, а $t_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>1$, поэтому система решений не имеет. Если же $-\frac{1}{4}\le a\le 0$, то $\frac{1}{2}\le t_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\le 1$, следовательно, система, а значит, и исходное уравнение будет иметь решение.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4},0\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)-9a^3=0$$

имеет единственное решение?

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Решить неравенство $\sqrt{4-x}-2\le x|x-3|+4x$.

4. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}(x+4+\sqrt{x^2+8x+17})=$$

$$=a^2-a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right)-2$$

имеет единственное решение, и определить это решение.

5. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0, \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

7. При каком значении параметра a система неравенств

$$\begin{cases} y\ge x^2+2a, \\ x\ge y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

8. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}\cdot y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=\sqrt{a+3}\cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

9. Найти все значения параметра a, при которых сис

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-5=a-2y+y^2,\\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0,\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. Решить уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0.$$

11. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$

имеет нечетное число решений.

12. При каких значениях a функция

$$y(x)=\log_{2a+1}(\sqrt{a^2+4x^2}-2x)-2$$

является нечетной?

13. При каких значениях a график функции

$$y=(x+a)(|x+1-a|+|x-3|)-2x+4a$$

имеет центр симметрии?

14. Сколько корней может иметь уравнение

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+4}=\sqrt{3x+10}\ ?$$

15. При каких значениях параметра a функция

$$f(x)=(a+x)\cdot 3^{x-2+a^2}-(x-a)\cdot 3^{8-x-3a}$$

является четной?.

§ 8. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Задачи данного параграфа решаются с помощью перебора всех логически возможных случаев. Как правило, такие задачи подразумевают развернутый ответ, в котором множество всех допустимых значений параметра разбивается на группы. Каждой такой группе соответствует определенная запись для множества значений переменной, которые являются решением при любом значении параметра из этой группы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2}\le 0$$

выполняется для всех x из промежутка $1\le x\le 3$.

Решение: Используя тот факт, что корнем числителя является $x = 2a + 4$, а корень знаменателя есть $x = 2 - 3a$, рассмотрим три случая.

а) Если $2a+4<2-3a$, то есть $a<-\frac{2}{5}$, то решением неравенства будет промежуток $x\in[2a+4,2-3a)$. Тогда условие задачи равносильно следующей системе неравенств (рисунок 50):

$$\begin{cases} a<-\frac{2}{5}, \\ 2a+4\le 1, \\ 2-3a>3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\frac{2}{5}, \\ a\le -\frac{3}{2}, \\ a<-\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \quad a\le -\frac{3}{2}.$$

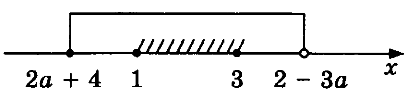


Рис. 50

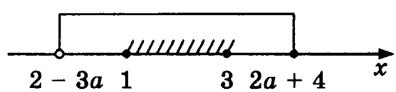


Рис. 51

б) Если $2a+4=2-3a$, то есть $a=-\frac{2}{5}$, то неравенство решений не имеет.

в) Если $2a+4>2-3a$, то есть $a>-\frac{2}{5}$, то решением неравенства будет промежуток $x\in(2-3a,\ 2a+4]$. В этом случае условие задачи примет следующий вид (рисунок 51):

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\ge\dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2+10xy-5y^2\le -2 \end{cases}$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все a из промежутков $a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Пример 2. При всех a решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.

Решение: Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$|x+3|-a|x-1|=4\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+6xy+9y^2\le\frac{2a-2}{a+1}-2\Leftrightarrow(x+3y)^2\le-\frac{4}{a+1}.$$

Рассмотрим первую систему. Если $a=1$, то эта система решений не имеет, если $a\ne1$, то уравнение имеет решение $x=\frac{a+7}{a-1}$. Выясним, при каких a данное x будет удовлетворять первому неравенству системы:

$$\frac{a+7}{a-1}\le-3\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a+1}{a-1}\le0\quad\Leftrightarrow\quad a\in[-1,1).$$

Значит, при этих значениях a первая система будет иметь решение $x=\frac{a+7}{a-1}$, а при остальных значениях a система решений иметь не будет.

Во второй системе при $a=-1$ решением уравнения будет служить любое число x, поэтому при данном значении a решением системы будут все x из интервала $(-3,1]$. при $a\ne-1$

уравнение будет иметь единственное решение $x = 1$, которое является также решением этой системы.

В третьей системе при $a = 1$ решением уравнения будет любое x, поэтому при данном a решением системы будут все $x > 1$. При $a \neq 1$ уравнение будет иметь единственное решение $x = 1$, которое не является решением этой системы, поэтому система решений иметь не будет.

Рассмотрим, какие решения имеет исходная совокупность при различных значениях a. При $a = 1$ первая система совокупности решений не имеет, вторая система имеет решение $x = 1$, третья — $x > 1$. Поэтому совокупность будет иметь решением $x \in [1,+\infty)$. При $a = -1$ первая система имеет решение $x = -3$, вторая — $x \in (-3, 1]$, третья система совокупности решений не имеет. Значит, решением совокупности будет служить отрезок $x \in [-3, 1]$. При $|a| > 1$ первая и третья система решений не имеют, значит, решением совокупности будет служить решение второй системы $x = 1$. При $|a| < 1$ первая система имеет решение $x = \frac{a+7}{a-1}$, вторая — $x = 1$, третья система решений не имеет. Значит, решение совокупности будет состоять из двух чисел: $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$.

Ответ: Если $a = 1$, то $x \in [1,+\infty)$; если $a = -1$, то $x \in [-3, 1]$; если $|a| > 1$, то $x = 1$; если $|a| < 1$, то $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$. При $|a| < 1$ имеются ровно два решения.

Пример 3. Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

Решение: Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{x+a} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x+a \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x+a \geq x^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -a, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - a \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Дискриминант квадратного неравенства есть $D = 1 + 4a$. Рассмотрим три случая.

а) Если $a<-\frac{1}{4}$, то ни первая, ни вторая система совокупности решений не имеют.

б) Если $-\frac{1}{4}\le a\le 0$, то первая система совокупности решений не имеет. Рассмотрим теперь вторую систему. Квадратное неравенство этой системы будет иметь решением промежуток $x\in\left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. При данных a левый конец промежутка неотрицателен, значит, решение системы есть $x\in\left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Найдем те a, при которых выполнено условие задачи:

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}=2|a|\Leftrightarrow\sqrt{1+4a}=2|a|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4a=4a^2\Leftrightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Выбранному промежутку принадлежит $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

в) Если $a>0$, то первая система совокупности имеет решением промежуток $x\in[-a,0)$. Рассмотрим вторую систему. Квадратное неравенство этой системы будет иметь решением промежуток $x\in\left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. При данных a левый конец промежутка отрицателен, значит, решение системы есть $x\in\left[0,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$, а решение совокупности есть $x\in\left[-a,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Найдем те a, при которых выполнено условие задачи:

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}+a=2|a|\overset{(\text{т.к.}\,|a|=a)}{\Leftrightarrow}\sqrt{1+4a}=2a-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-1\ge 0,\\ 1+4a=(2a-1)^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\frac{1}{2},\\ a^2-2a=0;\end{cases}\Leftrightarrow a=2.$$

Полученное значение a принадлежит выбранному промежутку. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 2$ и $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

О т в е т: 2, $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4. При каких значениях a все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 4$?

Решение: Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge a, \\ 2(x-a)+a-4+x=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ 2(a-x)+a-4+x=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge a, \\ x = \dfrac{a+4}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x = 3a-4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Значение $x = \frac{a+4}{3}$ является одним из решений исходного уравнения, если выполняется условие $\frac{a+4}{3} \ge a \Leftrightarrow a \le 2$. Аналогично, $x = 3a - 4$ — решение, если $3a-4 < a \Leftrightarrow a < 2$. Таким образом, при $a = 2$ уравнение имеет единственное решение $x = \frac{a+4}{3}$, при $a < 2$ — два решения: $x = \frac{a+4}{3}$ и $x = 3a - 4$.

Условие задачи выполнено в следующих случаях:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2, \\ 0 \le \dfrac{a+4}{3} \le 4, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 2, \\ 0 \le \dfrac{a+4}{3} \le 4, \\ 0 \le 3a-4 \le 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ \begin{cases} a < 2, \\ -4 \le a \le 8, \\ \dfrac{4}{3} \le a \le \dfrac{8}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ \dfrac{4}{3} \le a < 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left[\frac{4}{3}, 2\right].$$

О т в е т: $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$.

Пример 5. При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0$.

Решение: Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$2\sqrt{3ax+a^2}<x+2a \Leftrightarrow \begin{cases} 3ax+a^2\geq 0, \\ x+2a\geq 0, \\ 12ax+4a^2<(x+2a)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(3x+a)\geq 0, \\ x\geq -2a, \\ x^2-8ax>0. \end{cases}$$

Возможны три случая.

а) Если $a>0$, то система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 3x+a\geq 0, \\ x\geq -2a, \\ x^2-8ax>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{a}{3}, \\ x\geq -2a, \\ x(x-8a)>0. \end{cases}$$

Решением системы в этом случае являются $x\in\left[-\dfrac{a}{3},0\right)\cup$ $\cup(8a,+\infty)$ (рисунок 52).

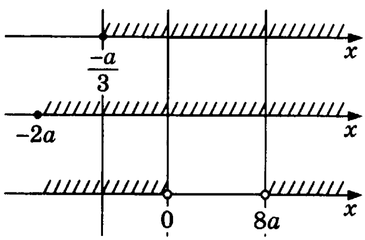


Рис. 52

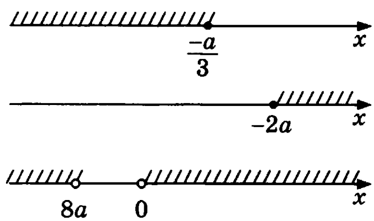


Рис. 53

б) Если $a=0$, подстановкой в исходное неравенство легко получаем, что $x>0$.

в) Если $a<0$, то система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 3x+a\leq 0, \\ x\geq -2a, \\ x^2-8ax>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\dfrac{a}{3}, \\ x\geq -2a, \\ x(x-8a)>0. \end{cases}$$

Как видно из рисунка 53, данная система решений не имеет.

Ответ: Если $a<0$, то нет решений; если $a=0$, то $x\in(0,+\infty)$; если $a>0$, то $x\in\left[-\dfrac{a}{3},0\right)\cup(8a,+\infty)$.

Пример 6. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $2\log_{2+a^2}(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ при любом действительном a.

Решение: Если число x_0 удовлетворяет данному уравнению при всех значениях a, то оно удовлетворяет ему и при $a = 0$. При этом уравнение примет следующий вид:

$$2\log_2(4-\sqrt{7+2x}) = \log_2(4-3x).$$

Пусть $y=\sqrt{7+2x}$, $y \geq 0$. Тогда $x=\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}$.

Имеем:

$$2\log_2(4-y) = \log_2\left(4-3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4-y>0, \\ (4-y)^2 = 4-3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}\right); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ 16-8y+y^2 = -\frac{3y^2}{2}+\frac{29}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ 5y^2-16y+3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Если $y = 3$, то $x = 1$, и уравнение, данное в условии задачи, запишется следующим образом:

$$2\log_{2+a^2}1 = \log_{2+a^2}1.$$

Ясно, что полученное равенство верно при любом a, и поэтому $x = 1$ удовлетворяет условию задачи. Если $y=\frac{1}{5}$, то $x=-\frac{87}{25}$. В этом случае имеем:

$$\log_{2+a^2}\frac{361}{25} = \log_{2+a^2\cdot(-\frac{87}{25})^2}\frac{361}{25}.$$

Это равенство не является верным, например, при $a = 1$. Поэтому $x=-\frac{87}{25}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 1.

Пример 7. Найти все значения a, при каждом из которых любое решение системы

$$\begin{cases} y - 2a\log_2 x = 1, \\ y + a^2\log_2 x = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $y < 1 + x$.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом: вычтем из второго уравнения первое, при этом первое уравнение оставив без изменения. Имеем:

$$\begin{cases} a^2\log_2 x + 2a\log_2 x = 0, \\ y - 2a\log_2 x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)\log_2 x = 0, \\ y - 2a\log_2 x = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая:

а) Если $a = 0$, то решением системы служит пара чисел $(x, 1)$, где $x > 0$ — любое число. Ясно, что для каждой такой пары выполняется условие $y < 1 + x$, т.е. $a = 0$ является решением задачи.

б) Если $a = -2$, то второе уравнение системы принимает вид

$$y + 4\log_2 x = 1.$$

Пара чисел $x = \frac{1}{2}$, $y = 5$, будучи решением этого уравнения, не удовлетворяет условию $y < 1 + x$, поэтому $a = -2$ не является решением задачи.

в) Если $a \neq 0$ и $a \neq -2$, то система имеет единственное решение $x = 1$ и $y = 1$, которое удовлетворяет условию $y < 1 + x$, поэтому все такие a являются решением задачи.

Объединив все разобранные случаи, получаем, что решением задачи является любое $a \neq -2$.

Ответ: $a \neq -2$.

Пример 8. Для каждого целого значения параметра m решить уравнение $\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1$.

Решение: Необходимо рассмотреть следующие два случая. Если m — четное число (тогда $m^2 + 1$ будет нечетным), то данное уравнение преобразуется следующим образом:

$$\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m^2+1)\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x) = m^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x) = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{4}+x^2 = 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+m^2=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет решение только тогда, когда у него неотрицательный дискриминант. Имеем:

$$\frac{D}{4} = 36-4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 3 \Rightarrow m=0 \text{ или } m=\pm 2,$$

так как m — целое четное число. Если $m = 0$, то исходное уравнение имеет вид

$$\log_{x^2}(3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Если же $m = \pm 2$, то в этом случае получаем

$$\log_{1+x^2}(3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 3x, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Пусть теперь m — нечетное число ($m^2 + 1$ — четное). Тогда исходное уравнение принимает следующий вид:

$$\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m^2+1)\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}|3x| = m^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{m^2}{4}+x^2}|3x| = 1 \Rightarrow 4x^2-12|x|+m^2 = 0.$$

Так же, как и в первом случае, находим возможные значения m — это $m = \pm 1$ и $m = \pm 3$. Пусть $m = \pm 1$, имеем:

$$\log_{\frac{1}{4}+x^2}|3x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}+x^2 = 3|x|, \\ x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{(3 \pm 2\sqrt{2})}{2}.$$

И наконец, если $m=\pm 3$, проводим следующие преобразования:

$$\log_{\frac{9}{4}+x^2}|3x|=1 \Leftrightarrow \frac{9}{4}+x^2=3|x| \Leftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}.$$

Ответ выписывается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: Если $m = 0$, то $x = 3$; если $m=\pm 1$, то $x = \pm\frac{(3\pm 2\sqrt{2})}{2}$; если $m=\pm 2$, то $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; если $m=\pm 3$, то $x=\pm\frac{3}{2}$.

Пример 9. При каких значениях параметра a уравнение $(1+\sin 4ax)\cdot\sqrt{5\pi x-x^2}=0$ имеет ровно 5 различных корней?

Решение: Ясно, что $x=0$ и $x=5\pi$ являются решениями уравнения. Значит, условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти a, при которых уравнение $\sin 4ax = -1$ имеет ровно три корня на интервале $x\in(0,5\pi)$ ». Так как $a = 0$ не является решением задачи, имеем:

$$\sin 4ax=-1 \Leftrightarrow 4ax=-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8a}+\frac{\pi n}{2a}.$$

Если $a > 0$, то наименьший положительный корень уравнения (соответствующий $n = 1$) есть $x_1=-\frac{\pi}{8a}+\frac{\pi}{2a}=\frac{3\pi}{8a}$.

Пусть x_k — корень уравнения, соответствующий $n = k$. Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $x_3<5\pi$, а $x_4\geq 5\pi$ (рисунок 54).

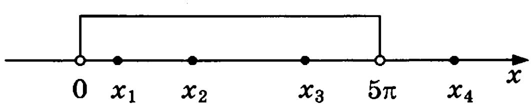


Рис. 54

Это означает, что

$$\begin{cases} x_3<5\pi, \\ x_4\geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{8a}+\frac{3\pi}{2a}<5\pi, \\ -\frac{\pi}{8a}+\frac{4\pi}{2a}\geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11\pi}{8a}<5\pi, \\ \frac{15\pi}{8a}\geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(\frac{11}{40},\frac{15}{40}\right].$$

Пусть теперь $a < 0$. Тогда наименьший положительный корень серии $x = -\frac{\pi}{8a} + \frac{\pi n}{2a}$; $n \in Z$ есть $x_0 = -\frac{\pi}{8a}$. В этом случае необходимо и достаточно выполнения условий $x_{-2} < 5\pi$ и $x_{-3} \geq 5\pi$ (рисунок 55).

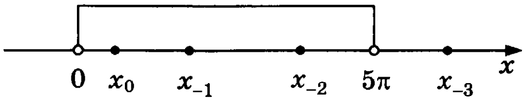


Рис. 55

Имеем:

$$\begin{cases} x_{-2} < 5\pi, \\ x_{-3} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{8a} - \frac{2\pi}{2a} < 5\pi, \\ -\frac{\pi}{8a} - \frac{3\pi}{2a} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{8a} < 5\pi, \\ -\frac{13\pi}{8a} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{13}{40}, -\frac{9}{40}\right).$$

Ответ получаем как объединение двух разобранных случаев.

Ответ: $\left[-\frac{13}{40}, -\frac{9}{40}\right) \cup \left(\frac{11}{40}, \frac{15}{40}\right]$.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет решение.

Решение: Умножив первое неравенство системы на (-2) и сложив его со вторым, получим:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - 4xy + 14y^2 \leq \frac{2a-2}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6xy + 9y^2 \leq \frac{2a-2}{a+1} - 2 \Leftrightarrow (x+3y)^2 \leq -\frac{4}{a+1}.$$

Значит, если $a > -1$, то последнее неравенство, а следовательно, и исходная система, не будет иметь решений. Покажем, что при $a < -1$ существует решение системы. Будем искать это решение в виде $x = -3y$. Имеем:

$$\begin{cases} x=-3y, \\ x^2+2xy-7y^2 \ge \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \le -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y, \\ 4y^2 \le \dfrac{a-1}{a+1}, \\ 4y^2 \ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y, \\ 1 \le 4y^2 \le 1-\dfrac{2}{a+1}. \end{cases}$$

Поскольку при всех $a<-1$ выполнено неравенство $1<1-\dfrac{2}{a+1}$, подойдет, например, $y=\dfrac{1}{2}$ (тогда $x=-\dfrac{3}{2}$). Таким образом, ответом к задаче будет служить промежуток $a\in(-\infty,-1)$.

Ответ: $(-\infty,-1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0.$$

2. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0.$$

3. При всех значениях a решить уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-5a}{x}\right)+4[\log_4(x-5a)]\log_2 x-8\log_4^2 x=0.$$

4. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$3a\cos 6ax+4(3a^2-1)\sin 3ax+5a=0.$$

5. Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\log_{a^2-2}(a-1)<0.$$

6. Для каждого значения параметра a из промежутка $(-3,\ 0)$ найти число различных решений уравнения

$$(2x^2-5ax+2a^2)\sqrt{x-\frac{2}{a}}=0.$$

7. Найти все положительные значения a, при которых неравенство

$$\frac{a+2x}{ax-4} \geq \frac{5}{x}$$

выполнено при всех $x > 10$.

8. Для каждого значения параметра a решить неравенство $|x+2a| \leq \frac{1}{x}$.

9. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} - 3$, $g(x) = \sqrt{x} - a$, где a — параметр. Решить относительно x неравенство $f(g(x)) \leq 0$.

10. Для каждого значения a решить неравенство

$$\sqrt{a^2-x^2} \geq a+1.$$

11. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $x^2+a \leq 0$ удовлетворяет неравенству

$$(x+2a)\sqrt{3-x} \leq 0.$$

12. Найти все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3(3^x+4a-12)}{5a-20} \geq \frac{4-2a}{3^{x-1}-a+2}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

13. Для всех значений параметра a, принадлежащих отрезку $[-1, 0]$, решить неравенство

$$\log_{x+a}(x^2-(a+1)x+a) \geq 1.$$

14. Найти все a, при которых уравнение

$$(x^2-(a+1)x+3(a-2)) \cdot \log_{a-x}(2a-x-1) = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1, 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

15. При каждом значении a решить уравнение

$$\log_3\left(\frac{x^2}{x-1} - a + 1\right) = \log_3\frac{x^2}{x-1} - \log_3(a-1).$$

§9. ИЛЛЮСТРАЦИИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Часто бывает, что задачу с параметром проще решать с применением графической иллюстрации. В данном параграфе продемонстрированы некоторые способы применения таких иллюстраций и обобщены различные методы решения подобных задач.

Пример 1. При каких значениях c уравнение

$$\sqrt{16-x^2}=-c-x$$

имеет единственное решение?

Решение: Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=\sqrt{16-x^2}$ и $y=-c-x$. Так как

$$y=\sqrt{16-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y\geq 0, \\ x^2+y^2=16, \end{cases}$$

то первый график представляет собой верхнюю полуокружность с центром в точке (0, 0) и радиусом 4. Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом −1, пересекающую ось Ox в точке $(-c,\ 0)$ (рисунок 56).

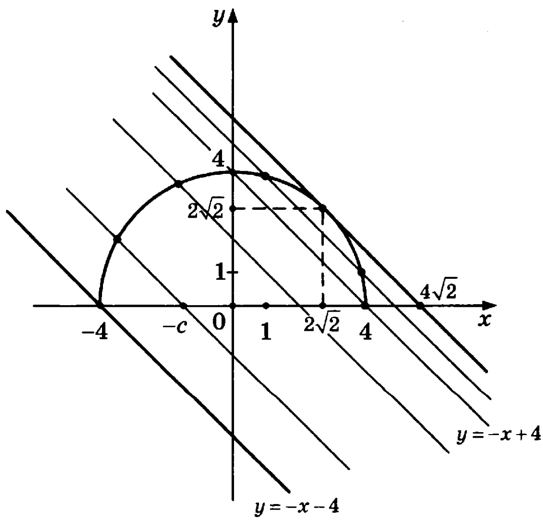


Рис. 56

Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти два графика пересекаются ровно в одной точке. Как видно из рисунка, это происходит в одном из следующих двух случаев:

а) прямая $y=-c-x$ касается полуокружности в точке $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$, что соответствует значению параметра $c=-4\sqrt{2}$;

б) прямая $y=-c-x$ лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=-x-4$ и $y=-x+4$ (включая первую и исключая последнюю), что соответствует $c\in(-4,4]$.

Во всех остальных случаях прямая $y=-c-x$ либо пересекает полуокружность $y=\sqrt{16-x^2}$ ровно в двух точках, либо не имеет с ней общих точек. Объединяя все полученные значения, находим ответ: $c\in\{-4\sqrt{2}\}\cup(-4,4]$.

Ответ: $\{-4\sqrt{2}\}\cup(-4,4]$.

Пример 2. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружности, задаваемые на координатной плоскости Oxy уравнениями системы, касаются внешним или внутренним образом (рисунок 57).

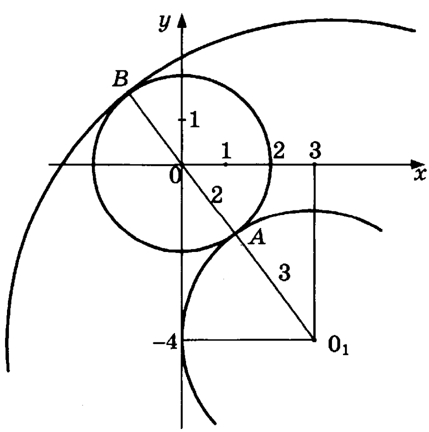


Рис. 57

Первая окружность имеет центр в точке (0, 0) и радиус 2, вторая — центр в точке (3, −4) и радиус $\sqrt{a}$. Расстояние между центрами окружностей равно 5, следовательно, в первом случае радиус второй окружности должен быть равен 3, а во втором — равен 7. Поэтому либо $a = 9$, либо $a = 49$.

Ответ: 9, 49.

Пример 3. Найти все значения a, при которых уравнение $|2x+6|+|2x-8|= ax+12$ имеет единственное решение.

Решение: Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y =|2x+6|+|2x-8|$ и $y = ax + 12$. Первый график разбивается на три участка следующим образом:

$$y=-2x-6-2x+8=-4x+2, \text{ если } x \le -3;$$

$$y=2x+6-2x+8=14, \text{ если } -3 \le x \le 4;$$

$$y=2x+6+2x-8=4x-2, \text{ если } x \ge 4.$$

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0, 12) (рисунок 58).

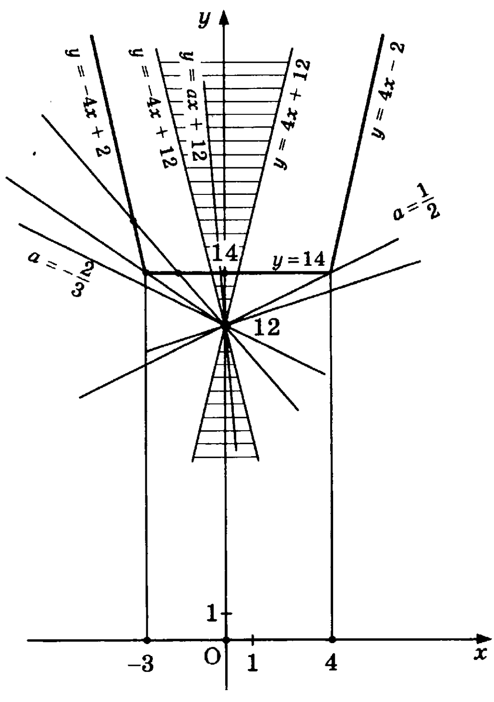


Рис. 58

Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти два графика пересекаются ровно в одной точке. Из рисунка видно, что это происходит в одном из следующих трех случаев:

а) прямая $y = ax + 12$ лежит в остром угле, образованном прямыми $y=-4x+12$ и $y=4x+12$, что соответствует значениям $a \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$;

б) прямая $y = ax + 12$ проходит через точку $(-3,\ 14)$, что соответствует $a = -\dfrac{2}{3}$;

в) прямая $y = ax+12$ проходит через точку $(4,\ 14)$, что соответствует $a = \dfrac{1}{2}$.

Из рисунка также видно, что любая другая прямая, проходящая через точку $(0,\ 12)$, либо пересекает график функции $y=|2x+6|+|2x-8|$ ровно в двух точках, либо не имеет с этим графиком общих точек. Объединяя все полученные значения a, находим ответ: $a \in (-\infty, -4] \cup \left\{-\dfrac{2}{3}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup [4, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, -4] \cup \left\{-\dfrac{2}{3}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup [4, +\infty)$.

Пример 4. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

Решение: Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$3 - \sqrt{1 - (x-3)^2} = a - \sqrt{1 - (x-a)^2}.$$

Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = 3 - \sqrt{1-(x-3)^2}$ и $y = a - \sqrt{1-(x-a)^2}$. Так как

$$y = 3 - \sqrt{1-(x-3)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-(x-3)^2} = 3 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3, \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1, \end{cases}$$

то первый график представляет собой нижнюю полуокружность с центром в точке $(3,\ 3)$ и радиусом 1. Аналогично,

$$y = a - \sqrt{1-(x-a)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \le a, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1, \end{cases}$$

поэтому второй график представляет собой нижнюю полуокружность с центром в точке (a, a) и радиусом 1 (рисунок 59).

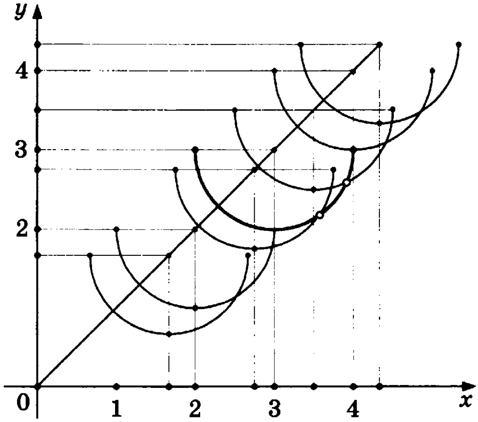


Рис. 59

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда полуокружности, соответствующие двум рассмотренным графикам, пересекаются ровно в одной точке. Как видно из рисунка, если $a < 2$ или $a > 4$, эти полуокружности не пересекаются, если $2 \le a \le 4$, $a \ne 3$, то они пересекаются в одной точке, если $a = 3$ — совпадают. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $a \in [2,3) \cup (3,4]$.

Ответ: $[2,3) \cup (3,4]$.

Пример 5. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \le -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \le 11 \end{cases}$$

найти такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} y + 3x \le -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \le 11; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le -3x - 3, \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 \le 16. \end{cases}$$

Изобразим решения полученной системы на рисунке 60. Рассмотрим теперь выражение

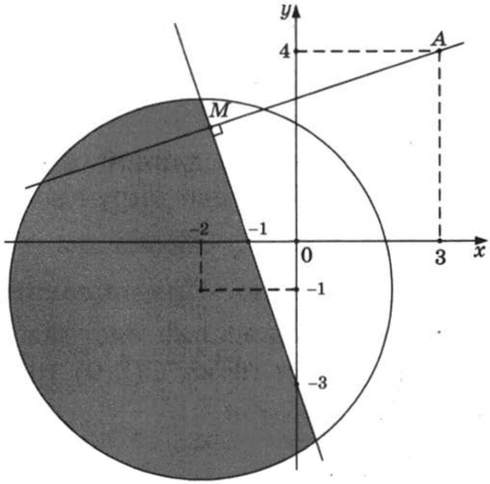


Рис. 60

$$f(x,y)=x^2+y^2-6x-8y+25=(x-3)^2+(y-4)^2$$

и заметим, что $f(x,y)$ есть расстояние от точки $A(3,4)$ до точки $M(x,y)$ на координатной плоскости. Таким образом, условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Среди точек $M(x,y)$ множества решений исходной системы, изображенного на рисунке 60, выбрать точку, ближайшую к точке $A(3,4)$ ».

Опустим перпендикуляр из точки $A(3,4)$ на прямую $y=-3x-3$. Уравнение этого перпендикуляра будет иметь вид $y=\frac{1}{3}x+3$, а его основанием будет служить точка $M_0\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$. Так как $\left(-\frac{9}{5}+2\right)^2+\left(\frac{12}{5}+1\right)^2=\frac{290}{25}<16$, то точка M_0 принадлежит кругу $(x+2)^2+(y+1)^2\le 16$, следовательно, содержится в множестве решений исходной системы. Таким образом, ответом к задаче будет служить пара чисел $(x,y)=\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Пример 6. Найти все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=4,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Первое уравнение данной системы задает на координатной плоскости Oxy две окружности радиуса 2 с центрами $C_1(5,4)$ и $C_2(-5,4)$. Обозначим эти окружности через ω_1 и ω_2 соответственно. При положительном значении параметра a второе уравнение системы задает окружность радиуса a с центром в точке $C(2,0)$ (рисунок 61).

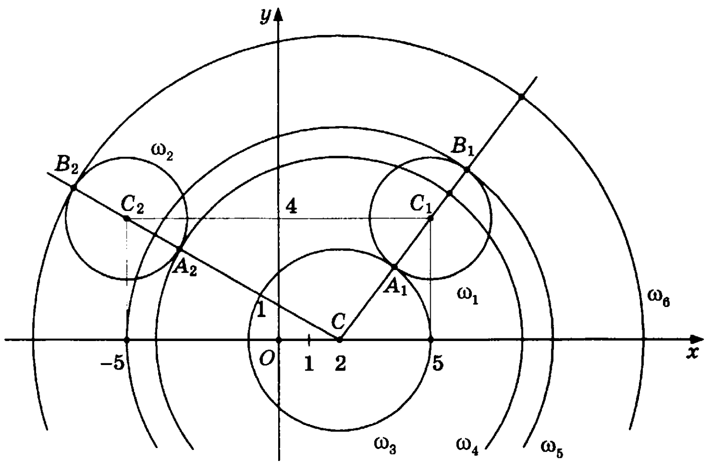


Рис. 61

Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы последняя окружность касалась одной из окружностей ω_1 и ω_2. Обозначим такие окружности, а их всего четыре, через ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 (в порядке возрастания их радиусов) и найдем эти радиусы.

Так как $CC_1=5$, то радиусы окружностей, имеющих центр в точке C и касающихся окружности ω_1, равны 3 и 7. Аналогично, $CC_2=\sqrt{65}$, поэтому радиусы окружностей, имеющих центр в точке C и касающихся окружности ω_2, равны $\sqrt{65}\pm2$. Так как $3<\sqrt{65}-2<7<\sqrt{65}+2$, то окружность ω_3

имеет радиус 3, окружность ω_4 — радиус $\sqrt{65}-2$, окружность ω_5 — радиус 7 и окружность ω_6 — радиус $\sqrt{65}+2$.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность с центром в точке (2, 0) имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2. Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют только окружности ω_3 и ω_6. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3, $\sqrt{65}+2$.

Пример 7. Найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-7)^2+(|y|-7)^2=1,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Первое уравнение данной системы при условии $xy > 0$ задает на координатной плоскости две единичные окружности с центрами (7, 7) и (−7, −7), а второе — прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0, 1) (рисунок 62).

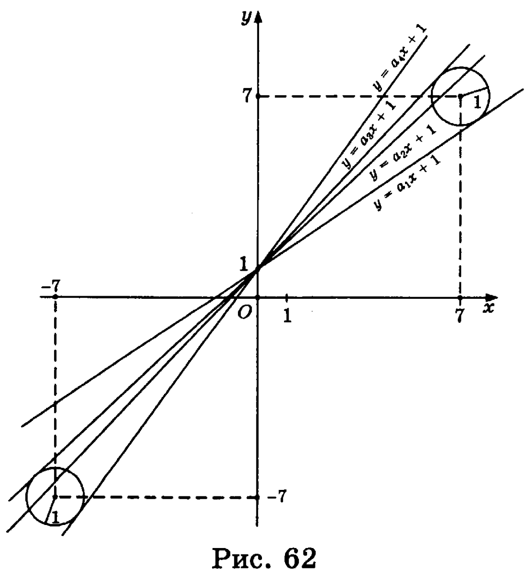


Рис. 62

Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы данная прямая касалась одной из окружностей. Таких касательных всего четыре. Обозначим их угловые коэффициенты через a_1, a_2, a_3 и a_4 (в порядке возрастания) и найдем их.

Прямая $y = ax + 1$ касается окружности единичного радиуса с центром в точке $(-7, -7)$ тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+7)^2 + (y+7)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Подстановкой данная система сводится к уравнению

$$(x+7)^2 + (ax+1+7)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+1)x^2 + 2(8a+7)x + 112 = 0.$$

Из равенства нулю дискриминанта этого уравнения получаем, что

$$(8a+7)^2 - 112(a^2+1) = 0 \Leftrightarrow 48a^2 - 112a + 63 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{14 \pm \sqrt{7}}{12}.$$

Аналогично прямая $y = ax + 1$ касается окружности единичного радиуса с центром в точке $(7, 7)$ тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-7)^2 + (y-7)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Эта система сводится к уравнению

$$(x-7)^2 + (ax+1-7)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+1)x^2 - 2(6a+7)x + 84 = 0,$$

дискриминант которого равен

$$(6a+7)^2 - 84(a^2+1) = 48a^2 - 84a + 35 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{21 \pm \sqrt{21}}{24}.$$

Так как $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24} < \dfrac{14-\sqrt{7}}{12} < \dfrac{21+\sqrt{21}}{24} < \dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, то $a_1 = \dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$, $a_2 = \dfrac{14-\sqrt{7}}{12}$, $a_3 = \dfrac{21+\sqrt{21}}{24}$ и $a_4 = \dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y = ax + 1$ имеет с объединением двух рассмотренных окружностей ровно одну общую точку. Из рисунка видно, что таких прямых всего две — это прямые с угловыми коэффициентами a_1 и a_4. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a=\frac{21-\sqrt{21}}{24}$ и $a=\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Ответ: $\frac{21-\sqrt{21}}{24}$, $\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Пример 8. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2, \\ y+2|x-5|=6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение: Рассмотрим сначала первое уравнение системы. Проведем на координатной плоскости Oxy прямые $x=a$, $x=a+1$, $y=a$, $y=a+1$ (рисунок 63).

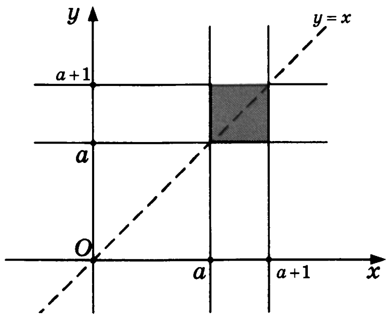


Рис. 63

Величина $|x-a|+|a+1-x|=|x-a|+|x-(a+1)|$ есть сумма расстояний от точки с координатами (x,y) до прямых $x=a$ и $x=a+1$, а величина $|y-a|+|a+1-y|=|y-a|+|y-(a+1)|$ — сумма расстояний от точки с координатами (x,y) до прямых $y=a$ и $y=a+1$. Таким образом, сумма всех четырех модулей есть сумма расстояний от точки с координатами (x,y) до четырех проведенных прямых. Ясно, что эта сумма равна 2 тогда и только тогда, когда точка (x,y) находится внутри или на границе квадрата, образованного этими прямыми. Это и есть множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Преобразуем теперь второе уравнение следующим образом:

$$y+2|x-5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 5,\\ y+2(5-x)=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 5,\\ y+2(x-5)=6;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 5,\\ y=2x-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 5,\\ y=16-2x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Изобразим полученное множество точек (рисунок 64).

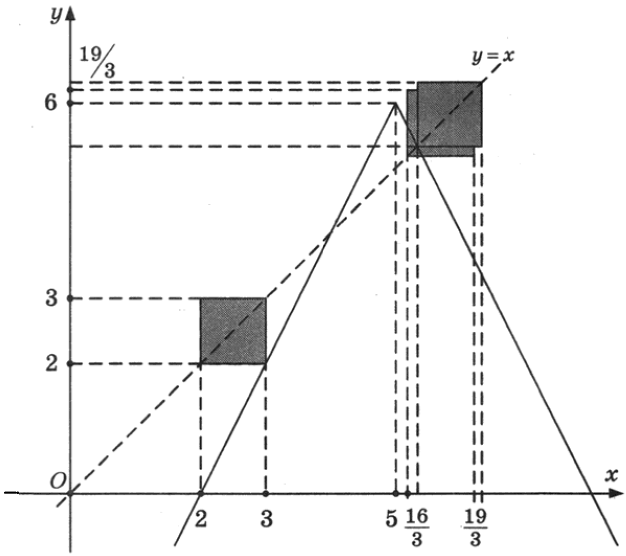


Рис. 64

Квадрат $x\in[a,a+1]$, $y\in[a,a+1]$ пересекается с этим множеством ровно в одной точке только в двух случаях, как показано на рисунке. Один из этих случаев соответствует значению $a = 2$, другой — $a=\dfrac{16}{3}$.

Ответ: 2, $\dfrac{16}{3}$.

Пример 9. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(3\sqrt{x\,|\,x\,|}+|\,y\,|-3)(|\,x\,|+3\,|\,y\,|-9)=0,\\ (x-a)^2+y^2=25\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение: Изобразим на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению. Имеем:

$$3\sqrt{x|x|}+|y|-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ 3x+|y|-3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ |y|=3-3x. \end{cases}$$

Так как область определения $x\ge 0$ должна быть выполнена и для второго множителя, далее получаем:

$$|x|+3|y|-9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x+3|y|-9=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ |y|=3-\frac{x}{3}. \end{cases}$$

Изобразим полученное множество точек на рисунке 65.

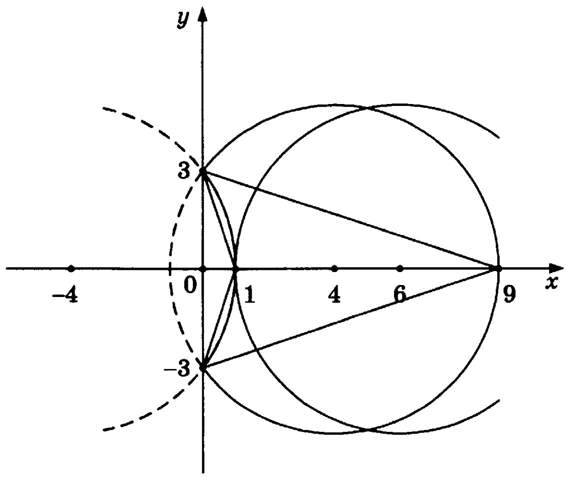


Рис. 65

Второе уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром $(a, 0)$ и радиусом 5 (или часть этой окружности, для которой выполнено неравенство $x \ge 0$). Из рисунка видно, что исходная система имеет ровно три различных решения только в трех случаях. Первый случай соответствует значению $a = -4$, второй — $a = 4$, третий — $a = 6$.

Ответ: –4, 4, 6.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2y - a)(x - a) = 2, \\ 4(x - a)^2 + (2y - a)^2 = 12a^2 + 20a; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{a}{2}\right)(x - a) = 1, \\ (x - a)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 3a^2 + 5a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'y' = 1, \\ x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a, \end{cases}$$

где $x' = x - a$, $y' = y - \frac{a}{2}$. Последняя (а значит, и исходная) система имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда окружность $x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a$ касается гиперболы $x'y' = 1$ в точках (1, 1) и (−1, −1) (рисунок 66).

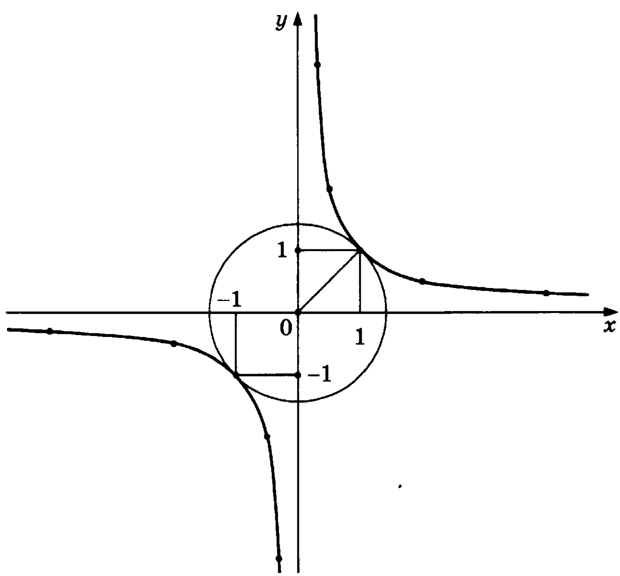


Рис. 66

Радиус такой окружности равен $\sqrt{2}$, откуда $3a^2+5a=2$, т.е. $a=-2$ или $a=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$, -2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2<4, \\ y=2ax^2. \end{cases}$$

2. Найти все значения параметра k, при каждом из которых хотя бы для одного числа b уравнение

$$|x^2-8x+15|-kx=|x^2-1|-b$$

имеет: а) более 5 корней; б) ровно 5 корней.

3. При каких значениях параметра a существует такое положительное число b, что все решения (x, y) системы неравенств

$$\begin{cases} 2y-x\le 1, \\ y+2x\le 2, \\ y+ax\ge -1 \end{cases}$$

удовлетворяют соотношению $x^2+y^2\le b$?

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0,+\infty)$ имеет более двух корней.

6. Найти все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \le a^2$ следует неравенство

$$(|x|+4)(|y|+4) \le 49.$$

7. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{2}{x+1} = a|x-3|$ на промежутке $[0,+\infty)$ имеет более двух корней.

8. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-7-8x-x^2} = 2a+3$ имеет единственный корень.

9. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет решением ровно одну пару $(x,\ y)$ действительных чисел?

10. Найти все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b уравнение $|x-2| + b|2x+1| = a$ имеет хотя бы одно решение.

11. Найти все значения параметра b, для которых при любом значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

12. Найти наименьшее b, при котором существует a такое, что уравнение $\sqrt{2x - x^2} + |2x - a| = b$ имеет четыре решения.

13. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?

14. Найти все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - p) \cdot (|x| + |y| + |x+y| - 2p) = 0, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{p^2} \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

§ 10. МЕТОД «*Oxa*»

В отличие от задач предыдущего параграфа, теперь мы будем проводить исследование на координатной плоскости Oxa, то есть по оси абсцисс откладывать значение переменной x, а по оси ординат — значение параметра a. Тогда на горизонтальных «срезах» можно увидеть решения, соответствующие данному значению a. Часто такой метод оказывается эффективнее стандартных методов решения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(a-x^2)(a+x-2)\le 0$$

не содержит ни одной точки из отрезка $x\in[-1,1]$.

Решение: Изобразим на координатной плоскости Oxa решения данного неравенства. Для этого нарисуем параболу $a = x^2$ и прямую $a = 2 - x$, которые пересекаются в точках $(-2, 4)$ и $(1, 1)$. Так как

$$\left(a-x^2\right)\left(a+x-2\right)\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge x^2,\\ a\le 2-x,\end{cases}\\ \begin{cases}a\le x^2,\\ a\ge 2-x,\end{cases}\end{array}\right.$$

то решение неравенства представляет собой множество точек, лежащих внутри параболы под прямой и вне параболы над прямой, включая сами эти линии (рисунок 67).

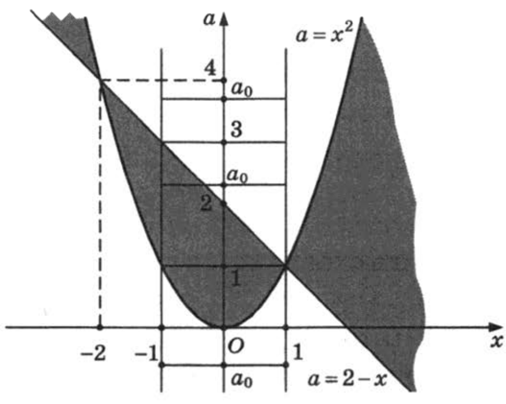


Рис. 67

Прямые $x = -1$ и $x = 1$ пересекают параболу $a = x^2$ в точках $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ соответственно, а прямую $a = 2 - x$ в точке $(-1, 3)$ и той же точке $(1, 1)$. Условие задачи выполнено в том и только в том случае, когда отрезок прямой $a = a_0$, заключенный между прямыми $x = -1$ и $x = 1$, не пересекает изображенное нами множество. Как видно из рисунка, это происходит только при $a_0 \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Таким образом, все такие значения a будут служить ответом к задаче.

Ответ: $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^2 + (1-3a)x + 2a^2 \le 2$$

удовлетворяет неравенству $ax(x-5+a) \ge 0$.

Решение: **(другое решение примера 5 § 4).** Первое неравенство из условия задачи равносильно неравенству

$$x^2 + (1-3a)x + 2a^2 \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2a+2)(x-a-1) \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2a+2 \ge 0, \\ x-a-1 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2a+2 \le 0, \\ x-a-1 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le \dfrac{x+2}{2}, \\ a \ge x-1, \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge \dfrac{x+2}{2}, \\ a \le x-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

На координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a = \dfrac{x+2}{2}$ и $a = x - 1$. Решение неравенства $ax(x-5+a) \ge 0$ при условии $ax \ge 0$ (первая и третья четверти) представляет собой множество точек, лежащих над прямой $a = 5 - x$, то есть таких, что $a \ge 5 - x$, а при условии $ax \le 0$ (вторая и четвертая четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le 5 - x$ (рисунок 68).

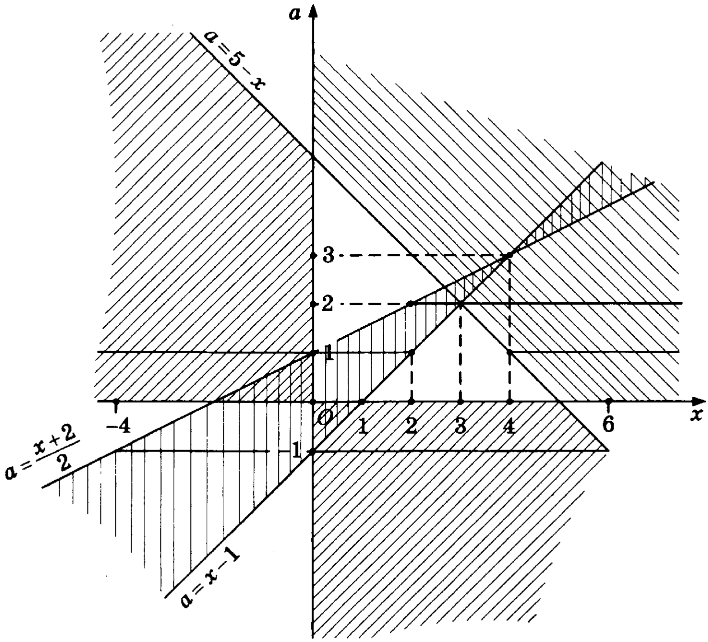


Рис. 68

Из рисунка видно, что существуют ровно четыре значения a, при которых выполнено условие задачи. При $a = 3$ решением первого неравенства является точка $x = 4$, которая также содержится и в решении второго неравенства. При $a = 2$ решением первого неравенства служит отрезок $x \in [2,3]$, который имеет одну общую точку $x = 3$ с решением второго неравенства. При $a = 1$ отрезок $x \in [0,2]$, являющийся решением первого неравенства, пересекается с объединением лучей $x \in (-\infty,0] \cup [4,+\infty)$, которое является решением второго неравенства, в единственной точке $x = 0$. И наконец, если $a = -1$, то решением первого неравенства служит отрезок $x \in [-4,0]$, решением второго неравенства — отрезок $[0,6]$, и эти отрезки имеют одну общую точку $x = 0$.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = \pm 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Ответ: ± 1, 2, 3.

Пример 3. Найти все значения a, при каждом из которых любое решение неравенства $x^2 - (4a+4)x + 3a^2 + 12a \le 0$ удовлетворяет неравенству $x(x+a+1) \ge 0$.

Решение: **(другое решение примера 8 § 4).** Первое неравенство из условия задачи равносильно неравенству

$$x^2-(4a+4)x+3a^2+12a\le 0 \;\Leftrightarrow\; (x-3a)(x-a-4)\le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3a\ge 0,\\ x-a-4\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3a\le 0,\\ x-a-4\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le \dfrac{x}{3},\\ a\ge x-4,\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge \dfrac{x}{3},\\ a\le x-4.\end{cases}\end{array}\right.$$

На координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a=\dfrac{1}{3}x$ и $a = x - 4$. Решение неравенства $x(x+a+1)\ge 0$ представляет собой при условии $x\ge 0$ (первая и четвертая четверти) множество точек, лежащих над прямой $a=-x-1$, то есть таких, что $a\ge -x-1$, а при условии $x \le 0$ (вторая и третья четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le -x - 1$ (рисунок 69).

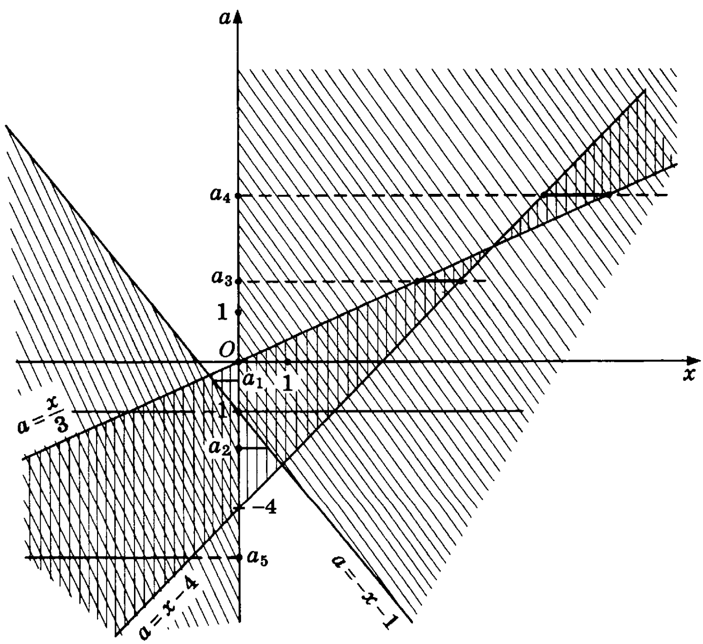


Рис. 69

Из рисунка видно, что при $a = -1$ решением второго неравенства является вся числовая прямая, то есть условие задачи выполняется. Если $a \in (-4,-1) \cup (-1,0)$, то существуют решения первого неравенства, которые не являются решениями второго. На рисунке показаны такие решения, соответствующие значениям $a = a_1$ и $a = a_2$. Следовательно, все такие a не удовлетворяют условию задачи. При $a \in (-\infty,-4] \cup [0,+\infty)$ любое решение первого неравенства является также и решением второго. На рисунке показаны такие решения, соответствующие значениям $a = a_3$, $a = a_4$ и $a = a_5$. Значит, все такие a удовлетворяют условию задачи. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in (-\infty,-4] \cup \{-1\} \cup [0,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-4] \cup \{-1\} \cup [0,+\infty)$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4. \end{cases}$$

Решение: Первое неравенство системы равносильно неравенству

$$x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+a)(x+4a+2)<0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+a>0, \\ x+4a+2<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+a<0, \\ x+4a+2>0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>-x, \\ a<-\dfrac{x+2}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} a<-x, \\ a>-\dfrac{x+2}{4}. \end{cases} \end{array} \right.$$

На координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой объединение двух острых вертикальных углов, ограниченных прямыми $a = -x$ и $a=-\dfrac{x+2}{4}$. Множество решений второго неравенства системы есть окружность с центром в начале координат и радиусом 2 (рисунок 70).

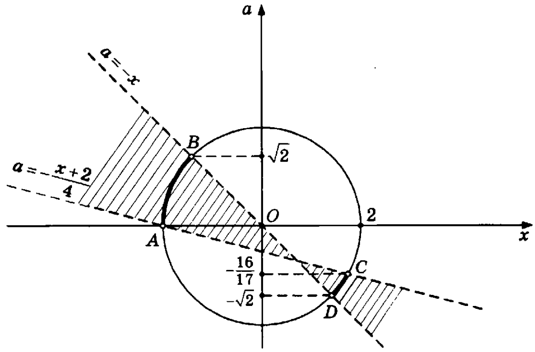


Рис. 70

Таким образом, множество решений системы представляет собой две дуги окружности, обозначенные на рисунке AB и CD (исключая концы этих дуг). Дуге AB соответствуют значения $a \in (0, \sqrt{2})$. Найдем координату a точки C. Имеем:

$$\begin{cases} x+4a+2=0, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4a-2, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Rightarrow (-4a-2)^2+a^2=4 \Leftrightarrow a(17a+16)=0.$$

Точке C соответствует значение $a=-\dfrac{16}{17}$. Значит, дуге CD соответствуют значения $a \in \left(-\sqrt{2}, -\dfrac{16}{17}\right)$. Ответом к задаче будут служить два указанных промежутка.

Ответ: $\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{16}{17}\right) \cup (0, \sqrt{2})$.

Пример 5. Найти все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства $\sqrt{(a-x^2)(a+x^2)}+a \ge x$ есть ровно два различных целых числа.

Решение: Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\sqrt{(a-x^2)(a+x^2)}+a \ge x \Leftrightarrow \sqrt{(a-x^2)(a+x^2)} \ge x-a \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a \ge 0, \\ (a-x^2)(a+x^2) \ge (x-a)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a \le 0, \\ (a-x^2)(a+x^2) \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le x, \\ x(x^3+x-2a) \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge x, \\ (a-x^2)(a+x^2) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство $x(x^3+x-2a)\le 0$ равносильно совокупности

$$x(x^3+x-2a)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^3+x-2a\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ x^3+x-2a\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ a\ge \dfrac{x^3+x}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ a\le \dfrac{x^3+x}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Неравенство $(a-x^2)(a+x^2)\ge 0$ равносильно совокупности

$$(a-x^2)(a+x^2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x^2\ge 0,\\ a+x^2\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a-x^2\le 0,\\ a+x^2\le 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge x^2,\\ a\ge -x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}a\le x^2,\\ a\le -x^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Изобразим на координатной плоскости Oxa полученное множество точек (рисунок 71).

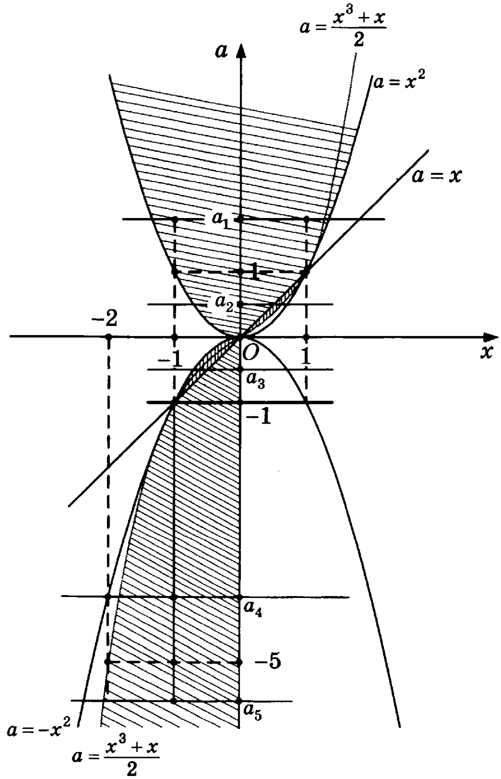


Рис. 71

Заметим при этом, что при всех $x > 0$ выполнено неравенство $\frac{x^3+x}{2} \ge x^2$, причем равенство достигается в точке $x = 1$; а при всех $x < 0$ выполнено неравенство $\frac{x^3+x}{2} \le -x^2$, причем равенство достигается в точке $x = -1$.

Из рисунка видно, что при $a = 1$ имеется три целочисленных решения ($x = 0, \pm 1$), при $a > 1$ таких решений не менее трех ($a = a_1$), при $a \in (-1, 1)$ целочисленное решение ровно одно ($x = 0$, $a = a_2$ или $a = a_3$), при $a = -1$ два целых числа удовлетворяют условию задачи ($x = -1, 0$), при $a \in (-5, -1)$ таких чисел также два ($a = a_4$) и, наконец, при $a \le -5$ целочисленных решений как минимум три ($a = a_5$). Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in (-5, -1]$.

Ответ: $(-5, -1]$.

Пример 6. Пусть x_1 — наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a - 1,$$

а x_2 — наибольший отрицательный корень уравнения

$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x = a.$$

Найти все значения a, при которых $x_1 \ge x_2$.

Решение: Первое уравнение преобразуется как

$$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{2a-1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2a-1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{1 + 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3})}{2},$$

а второе — как $a = 2\cos 2x$. Изобразим данные множества точек на плоскости Oxa (рисунок 72).

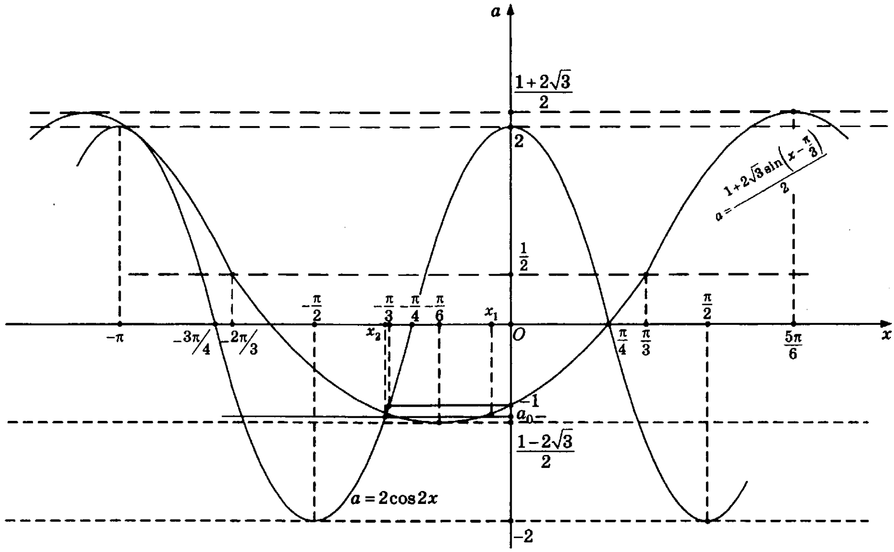


Рис. 72

Заметим, что оба корня x_1 и x_2 существуют при $a \in \left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, 2\right]$.

Из рисунка видно, что неравенство $x_1 > x_2$ выполняется при $a \in \left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, -1\right)$. Здесь $a = \frac{1-2\sqrt{3}}{2}$ — значение в точке минимума функции $a = \frac{1+2\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{3})}{2}$, которое достигается при $x = -\frac{\pi}{6}$, а $a = -1$ — координата точки пересечения графика этой функции с осью ординат. Неравенство $x_1 > x_2$ продемонстрировано на рисунке для $a = a_0$. Равенство $x_1 = x_2$ достигается при $a = 2$, при этом $x_1 = x_2 = -\pi$, и при $a = -1$ и $x_1 = x_2 = -\frac{\pi}{3}$. При всех остальных a из указанного промежутка выполнено неравенство $x_1 < x_2$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in \left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, -1\right] \cup \{2\}$.

Ответ: $\left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, -1\right] \cup \{2\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения, которые может принимать сумма $x + a$, если пара чисел (x, a) является решением неравенства $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+2|x-a|\ge a^2$ справедливо для всех действительных x.

3. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+4x+6a|x+2|+9a^2\le 0$ имеет не более одного решения.

4. При всех a решить систему неравенств

$$\begin{cases} |2x+2a|>|x|+a, \\ ax<0. \end{cases}$$

5. Найти все значения a, для которых неравенство $\log_{x-a}x^2<2$ выполняется хотя бы для одного числа x такого, что $|x|<0{,}01$.

6. Найти все отрицательные числа a, при которых существует единственное действительное число x, удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{ctg}\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)=1$$

и

$$(4x-16a+23)(-2a-33-6x)>0.$$

Глава VII
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y будем называть уравнение вида

$$mx + ny = k,$$

где m, n, k, x, $y \in Z$. Будем считать, что m и n — взаимно простые числа. Если это не так, то всегда можно сократить обе части уравнения на наибольший общий делитель (НОД) чисел m и n (если при этом в правой части получится нецелое число, то такое уравнение не будет иметь решений). Далее метод решения зависит от того, насколько большие модули чисел m и n. Если хотя бы один из коэффициентов (пусть m) невелик по модулю, перепишем уравнение в виде

$$mx = k - ny.$$

Левая часть полученного уравнения делится нацело на m. Значит, должна делиться нацело на m и правая часть этого уравнения. Рассматривая всевозможные остатки l от деления y на m; $l = 0, 1, \ldots, m - 1$, получим, что при одном значении l из указанного промежутка будет делиться на m и правая часть (докажите это). Поскольку число m невелико по модулю, то и перебор вариантов будет тоже невелик.

Пример 1. Решить уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3x = 4y + 1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая.

1. Если $y = 3t$; $t \in Z$, то $4y + 1 = 12t + 1$ не делится на 3.

2. Если $y = 3t + 1$, то $4y + 1 = 4(3t + 1) + 1 = 12t + 5$ не делится на 3.

3. Если $y = 3t + 2$, то $4y + 1 = 4(3t + 2) + 1 = 12t + 9$ делится на 3, поэтому $3x = 12t + 9$, т.е. $x = 4t + 3$.

Ответ: $\{(4t + 3,\ 3t + 2)\}$; $t \in Z$.

Описанный способ удобно применять и в том случае, если числа m и n не малы, но зато разлагаются на простые множители.

Пример 2. Решить уравнение $36x - 25y = 1$ в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $25y = 36x - 1$. Число слева делится на 5, следовательно, должно делиться на 5 и число справа. Рассмотрим всевозможные остатки от деления x на 5.

1. Если $x = 5t$; $t \in Z$, то $36x - 1 = 180t - 1$ не делится на 5.

2. Если $x = 5t + 1$, то $36x - 1 = 36(5t + 1) - 1 = 180t + 35$ делится на 5.

В рассмотрении других остатков нет необходимости, так как при других остатках правая часть делиться на 5 не будет. Итак, $25y = 180t + 35$ или $5y = 36t + 7$.

Далее будем рассуждать аналогично. Число слева делится на 5, следовательно, делится на 5 и число справа.

1. Если $t = 5u$; $u \in Z$, то $36t + 7 = 180u + 7$ не делится на 5.

2. Если $t = 5u + 1$, то $36t + 7 = 36(5u + 1) + 7 = 180u + 43$ не делится на 5.

3. Если $t = 5u + 2$, то $36t + 7 = 36(5u + 2) + 7 = 180u + 79$ не делится на 5.

4. Если $t = 5u + 3$, то $36t + 7 = 36(5u + 3) + 7 = 180u + 115$ делится на 5.

В рассмотрении других остатков нет необходимости. Итак, $5y = 180u + 115$ или $y = 36u + 23$. Осталось выразить x через u: $x = 5t + 1 = 5(5u + 3) + 1 = 25u + 16$.

Ответ: $\{(25u + 16,\ 36u + 23)\}$; $u \in Z$.

Метод рассмотрения остатков становится неэффективным, если числа $|m|$ и $|n|$ являются большими простыми числами. В этом случае применяется алгоритм, основанный на последовательном уменьшении по модулю коэффициентов при неизвестных.

1. Выбор наименьшего по модулю коэффициента (пусть $|m| < |n|$).

2. Проведение процедуры уменьшения коэффициентов. Это делается с помощью деления с остатком.

Пусть $n = l|m| + q$, где $0 < q \le |m| - 1$, тогда

$$mx + ny = k \Leftrightarrow mx + (l|m| + q)y = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mx + l|m|y = k - qy.$$

Левая часть последнего уравнения делится на m. Значит, должна делиться на m и правая часть: $k - qy = mt$, где $t \in Z$, t — новое неизвестное.

3. Повторение процедуры уменьшения коэффициентов. Новое уравнение отличается от старого только тем, что его коэффициенты по модулю меньше коэффициентов старого. За конечное число шагов добьемся того, что коэффициент при одном из новых неизвестных будет равен 1.

4. Возврат от новых переменных к исходным.

Пример 3. Решить уравнение $79y - 23x = 1$ в целых числах.

Решение. Проведем деление с остатком: $79 = 23 \cdot 3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$23x = 79y - 1 = (23 \cdot 3 + 10)y - 1 = 69y + 10y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23x - 69y = 10y - 1.$$

Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому должна делиться на 23 и правая часть:

$$10y - 1 = 23t \text{ или } 10y = 23t + 1;\ t \in Z$$

— новое неизвестное.

Полученное новое уравнение по типу точно такое же, как исходное. Однако коэффициенты при неизвестных в нем уменьшились по модулю. Повторим процедуру уменьшения коэффициентов еще раз:

$$10y = 23t + 1 = (10 \cdot 2 + 3)t + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10y - 20t = 3t + 1 \Rightarrow 3t + 1 = 10u,\ u \in Z$$

— новое неизвестное. Проведем процедуру уменьшения коэффициентов в последний раз:

$$3t + 1 = 10u = (3 \cdot 3 + 1)\, u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t - 9u = u - 1 \Rightarrow u - 1 = 3v,\ v \in Z.$$

Осталось выразить x и y через v. Поскольку $u = 3v + 1$, то

1. $3t = 10u - 1 = 10(3v + 1) - 1 = 30v + 9 \Rightarrow t = 10v + 3$.

2. $10y = 23t + 1 = 23(10v + 3) + 1 = 230v + 70 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 23v + 7$.

3. $23x = 79y - 1 = 79(23v + 7) - 1 = 79 \cdot 23v + 552 \Rightarrow x = 79v + 24$.

Ответ: $\{(79v + 24,\ 23v + 7)\};\ v \in Z$.

Диофантовы уравнения первого порядка возникают и в некоторых прикладных задачах. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 4. Найти все целые l, при которых дробь $\dfrac{5l+6}{8l+7}$ сократима.

Решение. Пусть $k \neq \pm 1$ — общий делитель числителя и знаменателя. Тогда

$$\begin{cases} 5l+6 = km, \\ 8l+7 = kn; \quad k, m, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40l+48 = 8km, \\ 40l+35 = 5kn. \end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе и получим $13 = k(8m - 5n)$, откуда $k = \pm 13$. Для нахождения l решим в целых числах уравнение $5l + 6 = 13m$. Напомним, что это уравнение можно решить двумя способами: перебором всевозможных остатков и процедурой уменьшения коэффициентов. Решив уравнение, получим $l = 13s + 4$, где $s \in Z$.

Ответ: $l = 13s + 4;\ s \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $\dfrac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x}=1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x-\cos 6x}{\cos 6x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 4x-\cos 6x=0\\ \cos 6x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 4x-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-6x\right)=0\\ \cos 6x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0\\ \cos 6x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-\dfrac{\pi}{4}=\pi n\\ \dfrac{\pi}{4}-x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.\\ 6x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \quad n,k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{5}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{array}\right.\\ x\neq\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{6}.\end{cases}$$

Решим два уравнения в целых числах. Рассмотрим сначала первое уравнение:

$$\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6} \quad\Leftrightarrow\quad 5k=6n-1.$$

Перебирая все возможные остатки при делении n на 5, находим, что решением последнего уравнения являются $n = 5l + 1$; $l \in Z$. Значит, решением задачи будут служить $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, где $n \in Z$, $n \neq 5l + 1$; $l \in Z$. Теперь рассмотрим второе уравнение:

$$-\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow 6n=2+k.$$

Ясно, что любое целое n является решением этого уравнения. Таким образом, ни одно значение x из серии $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$; $n \in Z$, $n \neq 5l + 1$; $l \in Z$.

Пример 6. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

Решение. Пусть x — данное целое число. Имеем:

$$x = 7k = 4n + 3;\ k, n \in Z, \Rightarrow n = \frac{7k-3}{4}.$$

Перебирая все возможные остатки при делении k на 4, находим, что решением последнего уравнения являются $k = 4m + 1$; $m \in Z$. Таким образом, $x = 7k = 7(4m + 1) = 28m + 7$ и дает остаток 7 при делении на 28.

Ответ: 7.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $19x - 21y = 2$ в целых числах.

2. Найти все целые неотрицательные m и n, удовлетворяющие уравнению $19m + 84n = 1984$.

3. Решить уравнение $20x - 19y = 3$ в целых числах и найти сумму трех наименьших положительных x, являющихся корнями данного уравнения.

4. Найти наименьшее натуральное число, которое обладает следующими свойствами: при делении его на 2 в остатке получается 1, при делении на 19 остаток равен 3, а на 7 оно делится без остатка.

5. Найти наименьшее натуральное число x такое, что остаток от деления x на 8 на 5 больше остатка от деления x на 5 и в 2 раза больше остатка от деления x на 7.

6. На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $\dfrac{89}{3m+7n}$ является натуральным числом?

7. Найти остаток от деления целого числа n на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 4, а остаток от деления на 18 равен 7.

8. Решить уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) - \sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) = -1$.

9. Решить уравнение $2 + \cos x = \sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x$.

§ 2. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Диофантовым уравнением второго порядка с двумя неизвестными x, y будем называть уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F,$$

где $A, B, C, D, E, F, x, y \in Z$ и хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля. Общая теория решения таких уравнений достаточно сложна, поэтому приведем лишь основные методы.

Одним из таких методов является *разложение на множители*. Он состоит в том, что левая часть данного уравнения каким-либо образом раскладывается на множители (чаще всего путем нахождения дискриминанта), и задача сводится к перебору конечного числа вариантов.

Пример 1. Найти все пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 5xy - 2x^2 = 5 \Leftrightarrow (3y - x)(y + 2x) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - x = 5 \\ y + 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - x = -5 \\ y + 2x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - x = 1 \\ y + 2x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - x = -1 \\ y + 2x = -5. \end{cases}$$

Первые две системы не имеют решений в целых числах, третья и четвертая имеют решением пары $(x, y) = (2, 1)$ и $(x, y) = (-2, -1)$ соответственно.

Ответ: $\{(2, 1); (-2, -1)\}$.

Пример 2. Найти все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12m + 12n = mn \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mn - 12m - 12n + 144 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m - 12)(n - 12) = 144.$$

Так как m и n — натуральные числа разной четности, возможны следующие варианты:

$$\begin{cases} m-12=1 \\ n-12=144 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=3 \\ n-12=48 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=9 \\ n-12=16 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} m-12=144 \\ n-12=1 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=48 \\ n-12=3 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=16 \\ n-12=9. \end{cases}$$

Здесь учитываем, что числа $m - 12$ и $n - 12$ будут также разной четности, кроме того, оба этих числа должны быть положительны, иначе $(m - 12)(n - 12) < 12^2$. Таким образом, решением задачи будут служить пары $\{(13, 156); (15; 60); (21; 28); (156, 13); (60; 15); (28; 21)\}$.

Ответ: $\{(13, 156); (15; 60); (21; 28); (156, 13); (60; 15); (28; 21)\}$.

Пример 3. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 20z + 12y + x\sqrt{3} - 34 = 0, \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно x. Это уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда его дискриминант больше либо равен нулю. Имеем:

$$D = 3(\cos \pi y + \cos \pi z)^2 - 12 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos \pi y + \cos \pi z \geq 2 \\ \cos \pi y + \cos \pi z \leq -2. \end{array}\right.$$

В первом случае $\cos\pi y = \cos\pi z = 1$, т.е. $y = 2k$, $z = 2n$; k, $n \in Z$, при этом $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Первое уравнение системы в этом случае примет вид

$$4n^2 + 10n - 4k^2 + 6k = 7$$

и не будет иметь решений, так как в левой части этого уравнения всегда будет получаться четное число.

Во втором случае $\cos\pi y = \cos\pi z = -1$, откуда следует, что $y = 2k + 1$, $z = 2n + 1$; $k, n \in Z$, при этом $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Первое уравнение системы в этом случае преобразуется к виду

$$2n^2 + 7n - 2k^2 + k = 0.$$

Дискриминант этого уравнения (которое мы рассматриваем как квадратное относительно n) равен

$$D = 49 + 16k^2 - 8k = (4k - 1)^2 + 48 = m^2;\ m \in Z,$$

иначе число n не может быть целым. Последнее уравнение принимает вид:

$$(m + 4k - 1)(m - 4k + 1) = 48.$$

Разность первого и второго чисел, стоящих в скобках, равна $8k - 2$, т.е. дает остаток 6 при делении на 8. В соответствии с этим получаем четыре варианта:

$$\begin{cases} m+4k-1=24 \\ m-4k+1=2, \end{cases} \vee \begin{cases} m+4k-1=-2 \\ m-4k+1=-24, \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} m+4k-1=6 \\ m-4k+1=8, \end{cases} \vee \begin{cases} m+4k-1=-8 \\ m-4k+1=-6. \end{cases}$$

В первых двух случаях получаем $k = 3$, $n = -5$, откуда $y = 7$, $z = -9$; в третьем и четвертом случаях находим, что $k = n = 0$ и $y = z = 1$.

Ответ: $\{(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 7,\ -9);\ (-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 1,\ 1)\}$.

Если в уравнении отсутствует член, содержащий x^2 или y^2, т.е. A либо C равно нулю, но при этом $B \neq 0$, то такое уравнение решается методом выделения целой части. Пусть, например, $A = 0$. Выразим x через y:

$$Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(By + D) = F - Ey - Cy^2,$$

откуда $x = \frac{F - Ey - Cy^2}{By + D}$. Далее делим многочлен $F - Ey - Cy^2$ на многочлен $By + D$ с остатком, т.е. представляем данную дробь в виде

$$\frac{F - Ey - Cy^2}{By + D} = Py + Q + \frac{R}{By + D},$$

где P, Q, R — рациональные числа. Подобрав, при необходимости, целое число T и домножив на него обе части уравнения

$$x = Py + Q + \frac{R}{By + D},$$

получим уравнение

$$Tx = P'y + Q' + \frac{R'}{By + D},$$

где P', Q' и R' уже являются целыми числами. Дальнейшее решение сводится к перебору всех делителей числа R' (если $R' = 0$, то уравнение становится линейным).

Пример 4. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 10.$$

Решение. Выразим в данном уравнении y через x:

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 10 \Leftrightarrow y(3 - x) = 10 + 2x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2x - 10}{x - 3} = x + 1 - \frac{7}{x - 3}.$$

Из полученного равенства видно, что дробь $\frac{7}{x-3}$ должна быть целым числом. Это возможно, когда $x - 3$ принимает значения ± 7 и ± 1. Разбирая четыре случая, находим все пары (x, y), удовлетворяющие данному уравнению: $(x, y) = \{(10, 10); (-4, -2); (4, -2); (2, 10)\}$.

Ответ: $\{(10, 10); (-4, -2); (4, -2); (2, 10)\}$.

Пример 5. Найти все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) - \right) = 1,$$

являющиеся целыми числами.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2\pi k,\quad k\in Z\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-\sqrt{9x^2+160x+800}=16k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-16k\ge 0\\ 9x^2+160x+800=(3x-16k)^2.\end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$9x^2+160x+800=(3x-16k)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+160x+800=9x^2-96xk+256k^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 160x+96xk=256k^2-800\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+3xk=8k^2-25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(5+3k)=8k^2-25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8k^2-25}{5+3k}=\frac{8}{3}k-\frac{40}{9}-\frac{25}{9(5+3k)}\ ^{(*)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x=24k-40-\frac{25}{5+3k}.$$

При этом равенство (*) получается путем деления в столбик многочлена $8k^2-25$ на многочлен $5+3k$.

Далее, так как числа $9x$ и $24k-40$ — целые, также целым должно быть число $\frac{25}{5+3k}$, а это значит, что 25 делится нацело на $5+3k$, т.е. $5+3k=\pm1, \pm5, \pm25$. Поскольку k — целое число, имеем $k=0$, $k=-2$ или $k=-10$. Если $k=0$, то $x=-5$, что не удовлетворяет условию $3x-16k\ge 0$. Если $k=-2$, то $x=-7$, что удовлетворяет условию $3x-16k\ge 0$. Если $k=-10$, то $x=-31$ удовлетворяет условию $3x-16k\ge 0$. Следовательно, решением задачи будут служить $x=-7$ и $x=-31$.

Ответ: $x=-7$, $x=-31$.

Пример 6. Какие из значений: 8, 43, 2010 может принимать N, если известно, что уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ имеет единственное решение в натуральных числах x и y?

Решение. Пусть N — некоторое натуральное число. Считая x и y натуральными числами, преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{N} \Leftrightarrow \frac{y-x}{xy}=\frac{1}{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ny-Nx=xy \Leftrightarrow \quad x(N+y)=Ny \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{Ny}{N+y}=\frac{Ny+N^2-N^2}{N+y}=N-\frac{N^2}{N+y}.$$

Из полученного равенства следует, что число $\frac{N^2}{N+y}$ должно быть целым. Если N — простое число, то число N^2 имеет единственный делитель, больший N (равный N^2). Поэтому данное уравнение имеет в натуральных числах единственное решение: $y = N^2 - N$, $x = N - 1$. Если же N — составное, существуют, по крайней мере, два числа, большие N и являющиеся делителями N^2. Например, если $N = p \cdot q$, где p и q — натуральные числа такие, что $1 < p$, $q < N$, то p^2q и p^2q^2 больше N и являются делителями N^2. Значит, в этом случае данное уравнение будет иметь, по крайней мере, два различных решения. Таким образом, из трех предложенных чисел только $N = 43$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $N = 43$.

Пример 7. Решить уравнение

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$$

в целых числах.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно y. Имеем

$$y^2(3x + 1)^2 - y(3x + 1)(3x + 5) + 2x^2 + 7x + 6 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (3x + 1)^2((3x + 5)^2 - 4(2x^2 + 7x + 6)) =$$
$$= (3x + 1)^2(x + 1)^2.$$

Так как при всех целых значениях переменной x число $3x + 1$ отлично от нуля, корни квадратного уравнения равны

$$y = \frac{(3x+1)(3x+5) \pm (3x+1)(x+1)}{2(3x+1)^2} = \frac{3x+5 \pm (x+1)}{2(3x+1)}.$$

В первом случае получаем уравнение

$$y = \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3(3x+1)} \Leftrightarrow 3y = 2 + \frac{7}{3x+1}.$$

Перебирая для числа $3x + 1$ все возможные делители числа 7, находим, что решением этого уравнения являются пары $(x, y) = \{(0, 3); (2, 1)\}$. Во втором случае уравнение принимает вид

$$y = \frac{x+2}{3x+1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3(3x+1)} \Leftrightarrow 3y = 1 + \frac{5}{3x+1}.$$

Здесь 5 делится нацело на $3x+1$, и решением этого уравнения будут служить пары чисел $(x, y) = \{(0, 2); (-2, 0)\}$. Таким образом, ответ к задаче будет состоять из четырех пар чисел $(x, y) = \{(0, 3); (2, 1); (0, 2); (-2, 0)\}$.

Ответ: $\{(0, 3); (2, 1); (0, 2); (-2, 0)\}$.

Если диофантово уравнение второго порядка каким-либо образом (например, выделением полных квадратов) приводится к виду $Ax^2 + Cy^2 = F$, где A, C и F — целые, отличные от нуля, числа, то метод решения зависит от знаков коэффициентов при переменных. Если A и C имеют один и тот же знак, то используются следующие оценки (пусть A, C, $F > 0$):

$$Ax^2 + Cy^2 = F \Rightarrow x^2 \le \frac{F}{A} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{F}{A}} \le x \le \sqrt{\frac{F}{A}}.$$

Далее задача сводится к перебору конечного числа вариантов. Если же A и C имеют разные знаки, то в общем виде решение уравнения достаточно сложно, но в некоторых случаях можно, например, перебором остатков доказать, что уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 8. Найти целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x^2. Имеем:

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14x^4 - x^2(3y^2 + 125) - 5y^4 + 82y^2 + 51 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (3y^2 + 125)^2 + 56(5y^4 - 82y^2 - 51) =$$

$$= 289y^4 - 3842y^2 + 12769 = (17y^2 - 113)^2.$$

Корни уравнения равны

$$x^2 = \frac{3y^2 + 125 + 17y^2 - 113}{28} = \frac{5y^2 + 3}{7}$$

или

$$x^2 = \frac{3y^2 + 125 - 17y^2 + 113}{28} = \frac{-y^2 + 17}{2}.$$

Таким образом, левая часть исходного уравнения раскладывается на множители следующим образом:

$$(7x^2 - 5y^2 - 3)(2x^2 + y^2 - 17) = 0,$$

и задача сводится к решению двух уравнений в целых числах.

Докажем сначала, что уравнение $7x^2 = 5y^2 + 3$ не имеет целочисленных решений. Для этого посмотрим, какие остатки могут давать при делении на 3 левая и правая части этого уравнения. Так как любой полный квадрат дает при делении на 3 остаток 0 или остаток 1, число $7x^2$ также дает при делении на 3 остатки 0 и 1. Остатки от деления на 3 числа $5y^2 + 3$ могут быть равны 0 или 2. Таким образом, равенство может иметь место только в том случае, когда x и y кратны 3. Но в этом случае числа x^2 и $5y^2$ делятся без остатка на 9, поэтому равенство также не может иметь место (поскольку 3 не делится на 9).

Рассмотрим теперь уравнение $2x^2 + y^2 = 17$. Из оценки $x^2 \leq 8{,}5$ сразу следует, что x по модулю не превосходит 2. Перебирая все возможные варианты, находим, что решением задачи будут служить пары чисел $(x, y) = \{(2, 3); (-2, 3); (-2, -3); (2, -3)\}$.

Ответ: $\{(2, 3); (-2, 3); (-2, -3); (2, -3)\}$.

Наконец, рассмотрим уравнение вида $Ax^2 + Dx + Ey = F$, где A, D, E, F — целые числа и A, и E отличны от нуля. Это уравнение решается перебором остатков при делении на E числа $F - Dx - Ax^2$. Но в отличие от уравнений первого порядка разрешимость данного уравнения может быть и при нескольких значениях остатка q. Кроме того, может оказаться, что такое уравнение и вовсе не имеет решений.

Пример 9. Решить в целых числах уравнение

$$3x^2 + 2x + 3y = 2.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$3y = 2 - 2x - 3x^2.$$

Левая часть полученного уравнения делится на 3, значит, должна делиться на 3 и его правая часть. Рассмотрим три случая.

1. Если $x = 3k$; $k \in Z$, то $2 - 2x - 3x^2 = 2 - 6k - 27k^2$ не делится на 3.

2. Если $x = 3k + 1$, то $2 - 2x - 3x^2 = 2 - 2(3k + 1) - 3(3k + 1)^2 = -27k^2 - 24k - 3$ делится на 3.

3. Если $x = 3k + 2$, то $2 - 2x - 3x^2 = 2 - 2(3k + 2) - 3(3k + 2)^2 = -27k^2 - 42k - 14$ не делится на 3.

Итак, $x = 3k + 1$, откуда $y = -9k^2 - 8k - 1$, где $k \in Z$.

Ответ: $\{(3k + 1, -9k^2 - 8k - 1)\}$; $k \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 = 2y^2 + 3xy + 7.$$

2. Найти все целые числа m и n, для которых выполнены условия: $2nm + n = 14$ и $mn \geq 9$.

3. Найти все пары целых неотрицательных чисел (m, n), которые являются решениями уравнения

$$2m^2 + 3m = 2nm + n + 41.$$

4. Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

5. Решить уравнение в целых числах

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$$

6. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$3x = 5y^2 + 4y - 1,$$

и доказать, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

7. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 15x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 3\sqrt{5}x - 2y + 10z - 4 = 0, \\ 5x^2 - 2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z + 1 = 0. \end{cases}$$

8. Доказать, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 3$ не имеет решений в целых числах.

9. Существуют ли пятерки последовательных целых чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа?

10. Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяют уравнению $x^2 = 4y^2 + 2025$?

11. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 = 2(xy - y^2 - y).$$

12. Решить в целых числах уравнение $xy = 2x + 2y$.

13. Решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

где p — заданное простое число.

14. Найти все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(3x + \sqrt{9x^2 + 224x + 1416}\right) - \right) = 1,$$

являющиеся целыми числами.

15. Найти такое натуральное двузначное число, что сумма квадрата числа его десятков и ушестеренного квадрата числа единиц равна умноженной на пять сумме произведения цифр этого числа и единицы.

16. Решить уравнение

$$15y^2x^2 - 8yx^2 + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0$$

в целых числах.

§ 3. ДРУГИЕ УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Все описанные в предыдущей главе методы применимы для решения не только диофантовых уравнений второго порядка с двумя неизвестными, но и других уравнений в целых числах. К таким уравнениям относятся уравнения второго порядка с тремя и более переменными, уравнения более высокого, чем второго, порядка, уравнения, содержащие показательные и логарифмические функции, а также некоторые другие уравнения. Выбор нужного метода при решении подобного уравнения порой является определяющим условием для успешного решения задачи. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x(y - 5z) + y^2 - 10yz + 25z^2) + 4y^2 - 12yz + 9z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 5z)^2 + (2y - 3z)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3n \\ z = 2n \\ x = 7n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x = 7n$, $y = 3n$, $z = 2n$; $n \in Z$.

Пример 2. Найти все пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

Решение. Ясно, что пара (0, 0) является решением данного уравнения. Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел x, y отлично от нуля. Имеем

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+y-3=\frac{2xy}{x^2+y^2}\in[-1,1]$$

при всех значениях x и y. Так как $x + y - 3$ — целое число, то возможны три варианта.

1. Если $x + y - 3 = -1$, то $x = -y$, нет решений.

2. Если $x + y - 3 = 0$, то либо $x = 0$, $y = 3$, либо $x = 3$, $y = 0$.

3. Если $x + y - 3 = 1$, то $x = y$, следовательно, $x = 2$ и $y = 2$.

Таким образом, решением данного уравнения будут служить следующие пары чисел: $(x, y) = \{(2, 2); (3, 0); (0, 3); (0, 0)\}$.

Ответ: $\{(2, 2); (3, 0); (0, 3); (0, 0)\}$.

Пример 3. Найти все тройки простых чисел (p, q, r), которые удовлетворяют равенству $p^q + q^p = r$.

Решение. Заметим сначала, что если тройка удовлетворяет условию задачи, то и для тройки (q, p, r) данное равенство также выполняется. Предположим, что оба числа p и q нечетны. Тогда $p^q + q^p = r$ четно. Однако r простое, значит, $r = 2$. Легко видеть, что равенство $p^q + q^p = 2$ при натуральных p, q выполняется лишь при $p = q = 1$, однако число 1 не является простым.

Итак, хотя бы одно из чисел p и q четно (и, значит, равно 2). Если $p = q = 2$, то $p^q + q^p = 2^2 + 2^2 = 8$ не является простым числом. Пусть $p = 2 \neq q$. Заметим, что при $q = 3$, $2^3 + 3^2 = 17$ — простое число, т.е. тройка (2, 3, 17) удовлетворяет условию задачи.

Пусть $q > 3$. Так как q простое нечетное, то при делении на 6 оно может давать остаток 1 или 5, тогда q^2 при делении на 6 дает остаток 1. Рассмотрим остатки от деления на 6 степеней двойки. Они периодически повторяются: 2, 4, 2, 4, ... Если q дает при делении на 6 остаток 1 или 5, то 2^q дает остаток 2. Следовательно, $2^q + q^2 = r$ дает остаток 3 при делении на 6 и поэтому делится на 3. Это может быть только при $r = 3$. Однако ясно, что никакое $q > 3$ не удовлетворяет равенству $2^q + q^2 = 3$. Таким образом, решением задачи будут служить тройки (2, 3, 17) и (3, 2, 17).

Ответ: $\{(2, 3, 17); (3, 2, 17)\}$.

Пример 4. Найти все x, при которых оба числа, $\dfrac{5x^2+10x+4}{7x^2+6x+1}$ и $\dfrac{x}{1+x}$, являются целыми.

Решение. Пусть $y=\dfrac{x}{1+x}$ — целое число. Тогда

$$x=\frac{y}{1-y}$$

и

$$k=\frac{5x^2+10x+4}{7x^2+6x+1}=\frac{-y^2+2y+4}{2y^2+4y+1}=-\frac{1}{2}+\frac{4y+\frac{9}{2}}{2y^2+4y+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k+1=\frac{8y+9}{2y^2+4y+1},$$

где k — целое число. Решим последнее уравнение в целых числах. При $y \geq 4$ или $y \leq -6$ дробь $\dfrac{8y+9}{2y^2+4y+1}$ лежит в интервале $(-1, 1)$ и не является целым числом. Перебирая остальные y, находим, что решением уравнения являются $y = -5$, $y = -2$, $y = -1$ и $y = 0$, т.е. ответом к задаче будут служить $x = -\dfrac{5}{6}$, $x = -\dfrac{2}{3}$, $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = 0$.

Ответ: $x = -\dfrac{5}{6}$, $x = -\dfrac{2}{3}$, $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = 0$.

Пример 5. Найти все целые значения переменной n, при каждом из которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1} = 11-8\sqrt{1-8n}.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1}=11-8\sqrt{1-8n} \Leftrightarrow 8\sqrt{1-8n}=$$

$$=\frac{-5n^2+7n-2}{n+1}=-5n+12-\frac{14}{n+1}.$$

Так как число $8\sqrt{1-8n}$, стоящее в левой части полученного уравнения, при целых n является либо целым, либо иррациональным, то и число, стоящее в правой части этого уравнения, должно быть целым (так как оно всегда рационально). Перебирая для числа $n + 1$ все делители числа 14, находим, что решением задачи является $n = -15$.

Ответ: $n = -15$.

Пример 6. Решить в натуральных числах уравнение

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

Решение. Так как правая часть исходного уравнения при натуральных z дает при делении на 4 остаток 1, то и левая часть этого уравнения должна давать такой же остаток при делении на 4, откуда следует, что x четно. Пусть $x = 2m$, где m — натуральное число. Аналогично рассмотрим остатки обеих частей уравнения при делении на 3. Левая часть при всех натуральных x и y дает остаток 1, а 5^z дает остаток 1 только при четных z, откуда следует, что $z = 2k$, где k — натуральное число. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде $3^{2m} + 2^{2y} = 5^{2k}$, или $5^{2k} - 2^{2y} = 3^{2m}$.

Разложим левую часть полученного уравнения по формуле разности квадратов. Имеем:

$$(5^k - 2^y)(5^k + 2^y) = 3^{2m}.$$

Так как разложение правой части на простые множители содержит только тройки, то каждая из скобок левой части должна быть неотрицательной степенью тройки. Поскольку разность чисел, стоящих в этих скобках, равна $2 \cdot 2^y$ и не делится на 3, то это возможно только в случае, когда $5^k - 2^y = 1$, а $5^k + 2^y = 3^{2m}$. Отсюда $5^k = 2^y + 1$, а $5^k + 2^y = 2^y + 1 + 2^y = 3^{2m}$, или $3^{2m} - 1 = 2^{y+1}$.

Еще раз применяя формулу разности квадратов, получаем $(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^{y+1}$.

Значит, оба сомножителя в левой части являются степенями двойки, отличающимися на 2. Следовательно, $3^m - 1 = 2$, а $3^m + 1 = 4$, откуда $m = 1$, а $2^{y+1} = 8$, т.е. $y = 2$. Тогда $x = 2$ и $3^2 + 4^2 = 5^z$, откуда $z = 2$. Таким образом, единственным решением данного уравнения являются $x = 2$, $y = 2$ и $z = 2$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить в целых числах уравнение

$$34x^2 + y^2 + 5z^2 - 10xy - 22xz + 2yz = 0.$$

2. Найти все x, при которых оба числа, $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\frac{1-x}{1+x}$, являются целыми.

3. Найти все целые значения параметра k, при которых графики функций

$$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-2k) \text{ и } y = \log_2(x - 2k^3 - 3k^2)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

4. Целые числа k, n и m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

5. Найти все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполнено следующее равенство:

$$3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3.$$

6. Найти все пары (m, n) натуральных чисел, для которых выполнено следующее равенство:

$$\log_m(n-7)+\log_n(5m-17)=1.$$

7. Для каких целых n выражение $\dfrac{n^3+\dfrac{n^2}{5}-n+115}{5n^2-4n-1}$ принимает целочисленные значения?

8. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

9. Найти все тройки натуральных чисел $k \le m \le n$, сумма обратных величин которых равна единице.

10. Найти все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющих равенству

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{30}{13}.$$

11. Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для каждой из которых выполняется соотношение

$$5x^2+y^2+3z^2-2yz=30.$$

12. Найти все целые значения переменной n, при каждом из которых справедливо равенство

$$\frac{2n^2+n+1}{n+3}=4\sqrt{3n+10}-6.$$

13. Решить уравнение $x(y+1)^2=243y$ в натуральных числах.

14. Найти все решения в целых числах уравнения

$$1+2^k+2^{2k+1}=n^2.$$

15. Найти наименьшее и наибольшее натуральные значения параметра n, при которых уравнение

$$(x^2+y^2)^{2010}=x^n\cdot y^n$$

имеет натуральные решения.

§ 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

В завершение тем предыдущих глав рассмотрим несколько текстовых задач, при решении которых возникают уравнения в целых числах. В таких задачах необходимым условием их решения является правильная формализация задачи, т.е. введение нужных переменных и составление уравнения (или системы уравнений), содержащего эти переменные.

Пример 1. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/час, а второй — 42 км/час. Сколько раз за 8 часов движения автобусы встретятся в пункте B, если известно, что первый стартует из пункта A, а второй — из пункта B?

Решение. Первый автобус проезжает путь между A и B за $\dfrac{2}{51}$ часа, второй — за $\dfrac{1}{21}$ часа. Если оба автобуса встретились в пункте B, то за одинаковое время первый проехал этот путь нечетное число раз, второй — четное число раз. Имеем:

$$\frac{2}{51}\cdot(2n+1)=\frac{1}{21}\cdot 2k\le 8;\ n,\ k\in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14n+7=17k, \\ k\le 84. \end{cases}$$

Из последнего уравнения видно, что k нечетно и кратно 7. Таких чисел в интервале от 1 до 84 шесть, это 7, 21, 35, 49, 63 и 77. Каждому такому k соответствует целое значение n. Таким образом, за 8 часов движения автобусы встретятся в пункте B шесть раз.

Ответ: 6 раз.

Пример 2. Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще три пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет?

Решение. Пусть $S \le 500$ — количество монет, из которых состоит клад, k, m и n — число монет, которые достались бы каждому пирату при первом, втором и третьем делении соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S = 13k + 8, \\ S = 11m + 3, \\ S = 8n + 5. \end{cases}$$

Решим эту систему в целых числах. Рассмотрим сначала уравнение $11m + 3 = 8n + 5$. Имеем:

$$11m + 3 = 8n + 5 \Leftrightarrow 8n = 11m - 2.$$

Перебирая все возможные остатки от деления m на 8, находим, что решением последнего уравнения являются $m = 8l + 6$; $l \in Z$. Следовательно,

$$S = 11m + 3 = 11(8l + 6) + 3 = 88l + 69.$$

Рассмотрим теперь уравнение $13k + 8 = 88l + 69$ или $13k = 88l + 61$. Применим к этому уравнению алгоритм последовательного уменьшения модулей коэффициентов при неизвестных. Имеем:

1. $13k = 88l + 61 = (13 \cdot 6 + 10)l + 61 \Leftrightarrow 13k - 78l = 10l + 61 \Rightarrow 13p = 10l + 61$, $p \in Z$.

2. $13p = 10l + 61 \Leftrightarrow 10l - 10p = 3p - 61 \Rightarrow 10q = 3p - 61$, $q \in Z$.

3. $10q = 3p - 61 \Leftrightarrow 3p - 9q = q + 61 \Rightarrow 3r = q + 61$, $r \in Z \Leftrightarrow q = 3r - 61$.

Вернемся теперь к исходным переменным:

1. $3p = 10q + 61 = 30r - 549 \Leftrightarrow p = 10r - 183$.

2. $10l = 13p - 61 = 130r - 2440 \Leftrightarrow l = 13r - 244$.

3. $S = 88l + 69 = 1144r - 21403$.

Так как S — натуральное число, не превосходящее 500, то единственный возможный вариант $S = 333$ при $r = 19$.

Замечание. Данную конкретную задачу можно решить проще, а именно, перебирая последовательно $l = 1, 2, \ldots$, нужно выяснить, при каком l число $88l + 69$ при делении на 13 дает остаток 8.

Ответ: 333 монеты.

Пример 3. Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

Решение. Пусть $x > 5$ деталей делает мастер за 1 час, тогда ученик за один час делает $x - 2$ детали. Пусть также мастер выполняет заказ за t часов, где t — целое число. Согласно условиям задачи имеем уравнение

$$xt = 2(x-2)(t-1) \Leftrightarrow t = \frac{2x-4}{x-4} = 2 + \frac{4}{x-4}.$$

Дробь $\frac{4}{x-4}$ должна быть целым числом. При $x > 5$ это возможно, когда $x = 6$ или $x = 8$. В первом случае получаем, что $t = 4$, во втором — $t = 3$. В обоих случаях заказ состоит из $xt = 24$ деталей.

Ответ: Из 24 деталей.

Пример 4. Ваня и Петя ходили за грибами. Ваня нашёл 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашёл. Ваня взял себе все белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберёзовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равна доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

Решение. Обозначим число найденных Ваней подосиновиков за x, а белых грибов за y. Согласно условиям задачи имеем следующее уравнение:

$$\frac{y}{35}=\frac{x}{34-y};\ x,y\in N \iff x=\frac{y(34-y)}{35}.$$

Так как $35 = 5 \cdot 7$, а 5 и 7 — взаимно простые числа, то одно из чисел y и $34 - y$ должно делиться на 5, а другое — на 7. Перебирая все возможные варианты, получаем, что либо $y = 20$ и $34 - y = 14$, либо $y = 14$ и $34 - y = 20$. В обоих случаях находим, что $x = 8$. Таким образом, Ваня нашел 8 подосиновиков.

Ответ: 8 подосиновиков.

Пример 5. Любая из трех барж разной грузоподъемности может при полной загрузке в каждом рейсе перевезти некоторый груз, причем баржа наименьшей грузоподъемности — за 15 рейсов. Две другие баржи перевозят весь груз за 3 совместных рейса. Сколько рейсов необходимо барже наибольшей грузоподъемности для перевозки всего груза, если недогрузка барж запрещается?

Решение. Пусть x и y — количество рейсов, за которое перевозят весь груз баржи средней и наибольшей грузоподъемности (x, $y \in N$; $15 > x > y$), а объем (или масса) всего груза равен единице. Тогда $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ — грузоподъемности этих двух барж. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \quad\iff\quad y=\frac{3x}{x-3}=3+\frac{9}{x-3}.$$

Из последнего равенства следует, что число $x - 3$ должно быть делителем числа 9. Перебирая все возможные варианты, находим, что решением уравнения будут служить пары $(x, y) = \{(12, 4); (6, 6); (4, 12)\}$, а решением задачи — пара $x = 12$, $y = 4$. Таким образом, баржа наибольшей грузоподъемности сможет перевезти весь груз за 4 рейса.

Ответ: 4 рейса.

Пример 6. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях первого корпуса. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились во втором корпусе, то их можно было провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимальное возможное число абитуриентов, которые могли бы быть проэкзаменованы при этих условиях.

Решение. Пусть x и y — количество аудиторий в первом и во втором корпусе соответственно. Согласно условиям задачи получаем уравнение $3x^2 = 2y^3$, которое необходимо решить в натуральных числах. Заметим сначала, что y должно делиться на 3, поэтому $y = 3k$; $k \in N$. Уравнение в этом случае принимает вид $x^2 = 18k^3$. Выясним, при каких k число $18k^3$ является полным квадратом. Ясно, что это произойдёт тогда и только тогда, когда число $18k$ также будет полным квадратом. Имеем: $18k = n^2$; $n \in N$, откуда следует, что n^2 делится нацело на 18, т.е. $n = 6m$; $m \in N$. Тогда $k = 2m^2$, $x = 12m^3$ и $y = 6m^2$. Общее число абитуриентов в этом случае равно $3x^2 = 2y^3 = 432m^6$. Таким образом, минимальное возможное число абитуриентов, которые могли бы быть проэкзаменованы при данных условиях, равно 432.

Ответ: 432 абитуриента.

Пример 7. Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трехзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число и затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трехзначное число.

Решение. Пусть x — заданное трёхзначное число, а y — заданное натуральное число. Согласно условию задачи имеем следующее уравнение:

$$\frac{\log_2 x - y}{y} \cdot \frac{\log_3 x - y}{y} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3 x = y(\log_2 x + \log_3 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 3} = y\left(\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = y(\log_x 3 + \log_x 2) = y \cdot \log_x 6,$$

откуда $\log_6 x = y$ и $x = 6^y$. Заметим теперь, что $6^2 = 36$ — двузначное число, $6^3 = 216$ — трёхзначное число, а $6^4 = 1296$ — четырёхзначное число. Таким образом, условию задачи удовлетворяют $x = 216$ и $y = 3$.

Ответ: 216.

Задачи для самостоятельного решения

1. Учительница принесла в класс счётные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по две палочки в каждый пакетик, то осталась одна лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счётных палочек?

2. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 3 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 50 км/ч, а второй — 44 км/ч. Сколько раз за 9 часов движения автобусы встретятся в пункте B, если известно, что первый стартует из пункта A, а второй — из пункта B?

3. Турфирма планирует экскурсионный маршрут для группы туристов с посещением городов A, B и C. Для проезда до города A по железной дороге были забронированы все места в 5 одинаковых вагонах и 1 место еще в одном вагоне. Для проезда из A в B по морю были арендованы все места в 7 одинаковых яхтах и 2 места еще в одной яхте. Для проезда из B в C были выкуплены все места в 11 одинаковых автобусах и 3 места еще в одном автобусе. Определить количество туристов в группе, если на обратный путь заказан чартерный авиарейс на самолёт, вмещающий не более 400 пассажиров.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 ч целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих одинакова?

5. Коля и Толя ходили за грибами. Толя нашёл 21 гриб, среди которых было несколько подберезовиков, а Коля грибов не нашёл. Толя взял себе все подосиновики, а остальные отдал Коле. Коля, обнаружив среди них червивый белый гриб, выкинул его. Сколько было найдено подберезовиков, если доля подосиновиков в найденных Толей грибах оказалась равна доле подберёзовиков в принесённых Колей домой грибах?

6. Любой из трёх грузовиков разной грузоподъемности при полной загрузке в каждой ездке может перевезти некоторый груз, причем грузовик с наименьшей грузоподъёмностью — за 10 ездок. Сколько совместных ездок необходимо двум другим грузовикам для перевозки всего груза, если недогрузка грузовиков запрещается?

7. Собранные на бахче арбузы уложили в одинаковые контейнеры, положив в каждый контейнер одинаковое число арбузов. Когда третью часть всех контейнеров погрузили в автомобили, то число погруженных контейнеров оказалось равно числу арбузов в одном контейнере. Пятая часть всех собранных арбузов была продана магазином в течение нескольких дней, причем каждый день продавалось одно и то же число арбузов, равное квадрату числа дней продажи. Какое минимальное количество арбузов могло быть собрано?

8. Саша и Олег решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 3, полученное число разделить на некоторое заданное натуральное число, а затем из частного вычесть единицу. Саша перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 5, а Олег посчитал правильно. Когда они сравнили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

§ 5. ОЦЕНКИ ПЕРЕМЕННЫХ. ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕБОРА

Один из самых распространенных приемов при решении задач в целых числах — это заключение целочисленной переменной в интервал с последующим перебором всех целых значений из этого интервала. Иногда для этого приходится складывать неравенства, полученные согласно условиям задачи (при этом знаки неравенств должны быть «повернуты» в одну сторону). Также возможен переход от двойного неравенства к одинарному путём исключения центральной части двойного неравенства. Надо понимать, что оба этих преобразования не являются равносильными, а осуществляют переход к следствию, т.е. при их применении возможно появление посторонних решений. В связи с вышесказанным после применения данных преобразований необходима проверка. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение. Обозначим через x число деталей в первом ящике, а через y — число деталей во втором. Тогда, согласно условию, имеет место система неравенств

$$\begin{cases} x + y > 29 \\ x - 2 > 3y \\ 0 < 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде $\begin{cases} x > 29 - y \\ x > 3y + 2 \\ x > \dfrac{2}{3}y \\ 20 + \dfrac{2}{3}y > x. \end{cases}$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$20 + \frac{2}{3}y > 29 - y, \quad 20 + \frac{2}{3}y > 3y + 2.$$

Первое из них можно переписать в виде $y > \frac{27}{5}$, а второе — в виде $y < \frac{54}{7}$. Так как y — натуральное число, то y равен либо 6, либо 7. Если y равен 6, то система неравенств перепишется в виде

$$\begin{cases} x > 23 \\ x > 20 \\ x > 4 \\ x < 24. \end{cases}$$

Ясно, что нет натуральных чисел x, удовлетворяющих ей. Значит, $y = 7$. Тогда исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} x > 22 \\ x > 23 \\ x > 4\frac{2}{3} \\ x < 24\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что существует единственное натуральное число $x = 24$, ей удовлетворяющее. Следовательно, в первом ящике 24 детали, а во втором — 7 деталей.

Ответ: 24 детали и 7 деталей.

Пример 2. Рабочий изготовил некоторое количество деталей двух видов: A и B, причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если он изготовит деталей A в 2 раза больше, то общее число деталей станет менее 32, а если деталей B в 2 раза больше, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий?

Решение. Обозначим через x и y количество изготовленных рабочим деталей вида A и B соответственно. Согласно условиям задачи имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x > y \\ 2x + y < 32 \\ x + 2y > 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ -2x - y > -32 \\ x + 2y > 28. \end{cases}$$

Умножив первое неравенство на 2 и сложив со вторым, получим $-3y > -32 \Leftrightarrow y < \dfrac{32}{3}$. Умножив третье неравенство на 2 и сложив со вторым, получим $3y > 24 \Leftrightarrow y > 8$. Так как y — целое число, то из полученных неравенств следует, что $y = 9$ или $y = 10$. Подставив $y = 9$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} x > 9 \\ 2x + 9 < 32 \\ x + 18 > 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < \dfrac{23}{2} \\ x > 10 \end{cases} \overset{\text{так как } x \in Z}{\Leftrightarrow} \quad x = 11.$$

Подставив $y = 10$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} x > 10 \\ 2x + 10 < 32 \\ x + 20 > 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < 11 \\ x > 8 \end{cases} \overset{\text{так как } x \in Z}{\Leftrightarrow} \quad x \in \varnothing.$$

Ответ: 11 деталей и 9 деталей.

Пример 3. Груз вначале погрузили в вагоны по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон оказался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько было груза?

Решение. Пусть x — количество вагонов вместимостью 80 тонн, а S — количество тонн груза. То, что один вагон оказался не полностью загружен, означает выполнение неравенств

$$80(x - 1) < S < 80x.$$

Аналогично, используя остальные условия задачи, получим систему:

$$\begin{cases} 80(x-1) < S < 80x \\ 60(x+7) < S < 60(x+8) \\ 50(x+13) = S \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 80(x-1) < 50(x+13) < 80x \\ 60(x+7) < 50(x+13) < 60(x+8) \\ 50(x+13) = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{73}{3} \\ x > \dfrac{65}{3} \\ x < 23 \\ x > 17 \\ 50(x+13) = S \end{cases}$$

Так как количество вагонов — целое число, то единственное возможное значение x, удовлетворяющее полученной системе неравенств, это $x = 22$. Значит, $S = 50(x + 13) = 1750$.

Ответ: 1750 тонн.

Пример 4. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако три человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тыс. руб. больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определить выделенную бригаде сумму денег, если 5%-й сбор за ее банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тыс. руб.

Решение. Пусть x тыс. руб. — выделенная сумма денег, n — первоначальное количество членов бригады. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{n} + 1,5 = \dfrac{x}{n-3} \\ 1,2 \le 0,05x \le 1,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n^2 - 3n}{2} \\ 24 \le x \le 32 \end{cases} \Rightarrow 48 < n^2 - 3n < 64.$$

Существует единственное натуральное число $n = 9$, удовлетворяющее последнему неравенству, при этом $x = 27$. Таким образом, выделенная бригаде сумма денег составляла 27 тыс. руб.

Ответ: 27 тыс. руб.

Пример 5. Линию, связывающую города A и B, обслуживают самолеты трех типов. Каждый из самолетов первого, второго и третьего типов может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

Решение. Пусть x, y и z — число самолетов первого, второго и третьего типов соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 230x + 110y + 40z = 760 \\ 27x + 12y + 5z = 88 \\ x + y + z \le 8. \end{cases}$$

Если разделим первое уравнение системы на 10 и вычтем его из второго уравнения, то получим, что $4x + y + z = 12$. Так как $y \ge 1$ и $z \ge 1$, то отсюда следует, что $4x \le 10$ и $x \le 2$ (так как x — целое число). С другой стороны, из полученного равенства и условия задачи вытекает, что $x + y + z = 12 - 3x \le$ ≤ 8, т.е. $3x \ge 4$ и $x \ge 2$. Значит, $x = 2$ и $y + z = 4$. Имеем далее:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + z = 4 \\ 27x + 12y + 5z = 88 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Таким образом, линию обслуживают по два самолета каждого типа.

Ответ: По два самолета каждого типа.

Часто бывает так, что перебирать приходится большое число вариантов, и такой перебор становится неразумным. В этом случае на помощь приходят дополнительные соображения. Иногда проблему решают свойства делимости (например, в силу каких-либо условий задачи рассматриваются не все целые числа в данном промежутке, а только те числа, которые делятся на 5). В некоторых задачах бывает полезным дополнительно воспользоваться неотрицательностью какой-либо переменной. Кроме этого существуют некоторые специальные приемы решения такого рода задач. В целом можно сказать, что наибольшую сложность при решении задач данного типа представляет разумная организация перебора. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \le k \le 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка каждого из них?

Решение. Пусть x и y — производительность первого и второго рабочего соответственно, а n — количество рабочих дней. Согласно условиям задачи имеем систему:

$$\begin{cases} 127 \le (y-x)n \le 132 \\ (2x-y)n = 77. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что число n должно быть делителем числа 77, т.е. n может принимать значения 1, 7, 11 или 77. Так как согласно условию задачи дней было несколько, n не может быть равным единице. Пусть $n = 7$. Имеем:

$$\begin{cases} 127 \le 7(y-x) \le 132 \\ 2x-y = 11. \end{cases}$$

Так как $(y - x)$ — целое число, то число $7(y - x)$ должно делиться на 7. Однако в промежутке [127, 132] нет ни одного такого числа. Поэтому $n = 7$ не удовлетворяет условию задачи. При $n = 11$ получим следующую систему:

$$\begin{cases} 127 \le 11(y-x) \le 132 \\ 2x-y = 7. \end{cases}$$

В промежутке [127, 132] существует единственное целое число, делящееся на 11, это число — 132. При этом данная система примет вид

$$\begin{cases} y-x = 12 \\ 2x-y = 7 \end{cases}$$

и имеет решением пару чисел $x = 19$ и $y = 31$. И, наконец, случай $n = 77$ разбирается аналогично случаю $n = 7$ и решений задачи не дает.

Ответ: 11 дней; 19 деталей и 31 деталь.

Пример 7. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии свою успеваемость, заключен в пределах от 2,9 до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

Решение. Пусть x — число учеников в классе. Ясно, что x будет минимальным, если минимально число учеников, повысивших во втором полугодии свою успеваемость. Пусть это будет один ученик. Число 1 от числа x составляет $\frac{1}{x} \cdot 100\%$. Согласно условию задачи имеем

$$2{,}9\% \le \frac{1}{x} \cdot 100\% \le 3{,}1\% \Leftrightarrow \frac{100}{3{,}1} \le x \le \frac{100}{2{,}9}.$$

Только два целых числа x удовлетворяют полученным неравенствам: это $x = 33$ и $x = 34$. Ясно, что меньшее среди них — это $x = 33$.

Ответ: 33 ученика.

Пример 8. Непустое множество X состоит из конечного числа n натуральных чисел. Четных чисел в X меньше двух третей от n, а нечетных — не больше 36% от n. Какое минимальное значение может принимать число n?

Решение. Пусть m — количество четных чисел в X. Согласно условиям задачи имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} m < \frac{2}{3}n \\ n - m \le \frac{9}{25}n \end{cases} \Leftrightarrow \frac{16}{25}n \le m < \frac{2}{3}n \Leftrightarrow \frac{48}{25}n \le 3m < 2n.$$

Так как неравные между собой целые числа $3m$ и $2n$ различаются по крайней мере на единицу, последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{48}{25}n \le 3m \le 2n - 1 \Rightarrow \frac{48}{25}n \le 2n - 1 \Leftrightarrow n \ge 12{,}5.$$

Если $n = 13$, то промежуток $\left[\frac{16}{25}n,\ \frac{2}{3}n\right)$ не содержит целых чисел, если же $n = 14$, то этот промежуток содержит целое число $m = 9$. Таким образом, общее количество чисел в X равно 14.

Ответ: $n = 14$.

Пример 9. На первом складе сахара было на 16 тонн больше, чем соли. За день с первого склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. На втором складе соли было на 4 тонны больше, чем сахара. За день со второго склада также вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{5}$ часть соли, причем сахара вывезли на 3 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на первом и втором складах, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

Решение. Обозначим через x количество соли на первом складе, тогда $x + 16$ — количество сахара на этом же складе. Пусть также y и $y + 4$ — соответственно количество сахара и соли на втором складе. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+16}{m} = 2 + \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{y}{m} = 3 + \dfrac{y+4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6m-48}{3-m} > 0 \\ y = \dfrac{19m}{5-m} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (3, 5),$$

следовательно, $m = 4$, так как m — целое число. Значит, $x = 24$, $y = 76$ и $y + 4 = 80$. Таким образом, на первом и втором складах было 24 и 80 тонн соли соответственно.

Ответ: 24 и 80 тонн; $m = 4$.

Пример 10. Две бригады однотипных тракторов задействованы на вспашке поля. Время вспашки поля только первой бригадой отличается от времени вспашки поля только второй бригадой не более чем на $\frac{1}{25}$ часть времени вспашки поля одним трактором. Если сначала восьмая часть первой бригады вспашет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады вспашет оставшуюся половину поля, тогда затраченное на вспашку поля время составит $\frac{2}{9}$ от времени вспашки поля одним трактором. Определить количество тракторов в каждой бригаде.

Решение. Пусть m и n — количество тракторов в первой и второй бригаде соответственно, x — производительность одного трактора, всю работу примем за единицу. Согласно условиям задачи получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{mx}-\dfrac{1}{nx}\right| \le \dfrac{1}{25x} \\ \dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{8}mx}+\dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{5}nx}=\dfrac{2}{9x}, \end{cases}$$

причем $\frac{m}{8}$ и $\frac{n}{5}$ — целые числа, т.е. m кратно 8, а n кратно 5. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right| \le \dfrac{1}{25} \\ \dfrac{4}{m}+\dfrac{5}{2n}=\dfrac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{1}{m}-\dfrac{4m-72}{45m}\right| \le \dfrac{1}{25} \\ n=\dfrac{45m}{4m-72} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{117-4m}{9m}\right| \le \dfrac{1}{5} \\ n=\dfrac{45m}{4m-72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{5} \le \dfrac{117-4m}{9m} \le \dfrac{1}{5} \\ n=\dfrac{45m}{4m-72} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in [21,\ 53],$$

так как m — целое число. Кроме того, m кратно 8, поэтому m = 24, 32, 40, 48. Если $m = 24$, то $n = 45$ кратно 5. Если $m = 32$ или $m = 40$, то n не является целым числом. И, наконец, если $m = 48$, то $n = 18$ не кратно 5. Таким образом, в первой бригаде было 24 трактора, а во второй — 45 тракторов.

Ответ: 24 трактора и 45 тракторов.

Пример 11. Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на 2 автомобиля больше, чем вторая. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n, догнала первую, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.

Решение. Пусть на первом этапе работы первая бригада собрала $k + 2$ автомобилей, а вторая бригада — k автомобилей. Тогда на втором этапе первая бригада собрала $n - 2$ автомобилей, а вторая — n автомобилей. Ясно, что на каждом этапе работы отношение числа собранных первой и второй бригадой автомобилей есть отношение производительностей труда этих бригад. Так как на втором этапе последнее отношение уменьшилось в 1,1 раза, имеем следующее уравнение:

$$\frac{k+2}{k} = 1{,}1 \cdot \frac{n-2}{n} \Leftrightarrow k = \frac{20n}{n-22} > 0,$$

поскольку k является натуральным числом. Ясно, что наименьшее возможное значение n равно 23 (при этом $k = 460$). Таким образом, на втором этапе работы вторая бригада собрала 23 автомобиля.

Ответ: $n = 23$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В первый день у Васи было денег на 30 рублей больше, чем у Пети. Вася внес на покупку книг $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя $\frac{1}{2}$ часть своих денег, при этом Петя внес на 20 рублей больше Васи. На второй день мальчики пошли в магазин за тетрадями. На этот раз у Васи было на 60 рублей больше, чем у Пети. На покупку тетрадей Вася снова внес $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя внес $\frac{1}{4}$ часть своих денег, при этом Вася внёс на 40 рублей больше Пети.

Сколько денег было у Пети в первый и второй день, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

2. Непустое множество Y состоит из конечного числа l действительных чисел, отличных от нуля. Положительных чисел в Y меньше трёх четвертей от l, а отрицательных — не больше 27% от l. Какое минимальное значение может принимать число l?

3. Группа школьников, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма всех полученных оценок равна 93, причём троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четвёрок. Число четвёрок делилось на 10, а число пятерок было чётным. Определить, сколько и каких оценок получили школьники.

4. Рассматриваются четыре натуральных числа. Сумма первого, удвоенного второго и утроенного третьего меньше четвёртого на 17; сумма второго, удвоенного первого и утроенного третьего меньше четвёртого на 28; сумма первого, второго и 5 раз взятого третьего равна четвёртому. Найти четвёртое число, если оно нечётное, а второе число не превосходит третьего.

5. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найти наибольшее возможное время t.

6. Найти все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

7. Из аэропорта одновременно вылетают два самолёта и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый — по окружности радиуса R, а второй — по окружности радиуса r. Предполагается, что самолёты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем через 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующих два события: первый самолёт облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее двух часов. Найти отношение $\frac{r}{R}$.

8. Вовочка написал домашнее сочинение и допустил орфографические и пунктуационные ошибки. Затем его сестра проверила сочинение и исправила часть ошибок. В новом тексте количество пунктуационных ошибок оказалось в пределах от 15,5 до 18% от числа пунктуационных ошибок в старом тексте. Количество орфографических ошибок уменьшилось втрое и составило 25% от числа пунктуационных ошибок в первоначальном тексте. Может ли в новом тексте содержаться ровно 6 ошибок? Какое наименьшее число ошибок могло содержаться в первоначальном тексте?

9. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причем каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

10. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в 3 раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в 2 раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

11. Для рытья котлована первоначально планировалось использовать звено экскаваторов одной модели, однако перед началом работы в звено было добавлено дополнительно 4 экскаватора той же модели. В результате котлован был вырыт на 3 часа ранее первоначально запланированного срока. Определить время, за которое котлован мог быть вырыт одним экскаватором, если в этом случае при расходе топлива 20 кг в час необходимое для работы экскаватора количество топлива находится в пределах от 1,2 до 1,71 тонны.

12. Автоматы двух типов красили детали, и все детали были покрашены за час. Определить число автоматов, если известно, что каждый из них мог бы покрасить все детали за целое число часов, общая сумма которых равна 55.

13. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

14. Две бригады маляров одинаковой квалификации задействованы на покраске фасада торгового центра. Время покраски фасада только первой бригадой отличается от времени покраски фасада только второй бригадой не более чем на $\frac{1}{8}$ часть времени покраски фасада одним маляром. Если сначала пятая часть первой бригады покрасит первую половину фасада, а затем третья часть второй бригады покрасит оставшуюся половину фасада, тогда затраченное на покраску фасада время составит $\frac{7}{20}$ от времени покраски фасада одним маляром. Определить численность бригад.

15. Около дома посажены липы и берёзы, причём общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берёз увеличить на 18, то берёз станет больше. Если увеличить вдвое количество берёз, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берёз было посажено?

16. Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготовляла только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой автоматической линии потребовалось бы не менее 2727 операций. Сколько операций требуется автоматической линии для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей?

17. При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключён в пределах от 92,5 до 93,5%. Определить минимально возможное число членов этой бригады.

18. В течение нескольких дней в города A и B завозили арбузы, причем ежедневные поставки арбузов в каждый город были постоянными и составляли целое число тонн. В итоге за все эти дни в город B было завезено на k тонн арбузов больше, чем в город A, где число k удовлетворяет неравенствам $155 \le k \le 160$. Если бы ежедневные поставки в город A были увеличены в 2 раза, то за то же число дней в A завезли бы на 91 тонну арбузов больше, чем в B. Сколько дней продолжался завоз арбузов? Каковы были ежедневные поставки в каждый город?

19. Химический завод имеет цеха трёх типов. В каждом цехе первого, второго и третьего типов работают соответственно 350, 80 и 30 рабочих, а также 91, 19 и 8 технологов. Всего в цехах завода работают 980 рабочих и 252 технолога. Найти число цехов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 15.

20. В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных тракторов и по одинаковому количеству колёсных тракторов, причём в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колёсных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число тракторов превысит 20. Определить количество бригад, работающих в поле, и число гусеничных и колёсных тракторов в каждой бригаде.

21. Группа самолетов, пятая часть из которых — бомбардировщики, вылетела с аэродрома. При этом не более 10 из них полетели на запад, а остальные — на восток. Оказалось, что число самолетов, полетевших на восток, больше 50%, но меньше 55% от общего количества. Сколько самолетов полетели на запад?

§ 6. НЕРАВЕНСТВА В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ. ГРАФИЧЕСКИЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Часто при решении уравнений, неравенств, систем, а также текстовых задач, связанных с целыми числами, удобно пользоваться графической иллюстрацией. Иногда удаётся достаточно несложно изобразить множество решений на координатной плоскости, и возникает необходимость выделить из этого множества точки с целочисленными координатами. Не всегда такую задачу можно решить «на глазок». В этом случае используются какие-либо дополнительные соображения. Можно, например, заключить данное множество в прямоугольник с последующим исключением лишних точек путем проверки. В любом случае применение графической иллюстрации при решении задачи требует сопутствующих вычислений и строгого обоснования. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$

Решение. Умножим первую строку данной системы на (-1) и сложим со второй строкой. Имеем:

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^3 + 3x^2 + 4y - 18x + 26 < 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 26x + 40 < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 4 \Rightarrow x = 3,$$

так как x — целое число. Подставляя $x = 3$ в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} y^3 - 4y > -1 \\ y^3 - 4y < 1 \end{cases} \Rightarrow\ y^3 - 4y = 0,$$

так как y — целое число. Следовательно, $y = 0$ или $y = \pm 2$, и ответом к задаче будут служить пары чисел $(x, y) = \{(3, 0); (3, 2); (3, -2)\}$.

Ответ: $\{(3, 0); (3, 2); (3, -2)\}$.

Пример 2. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < y + 1, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $t = x - 1$, тогда данная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} |t^2 - 1| < y + 1 \\ y + |t| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > |t^2 - 1| - 1 \\ y < 2 - |t|. \end{cases}$$

На координатной плоскости Oty полученная система определяет множество точек, изображенное на рис. 1 (граница не принадлежит данному множеству).

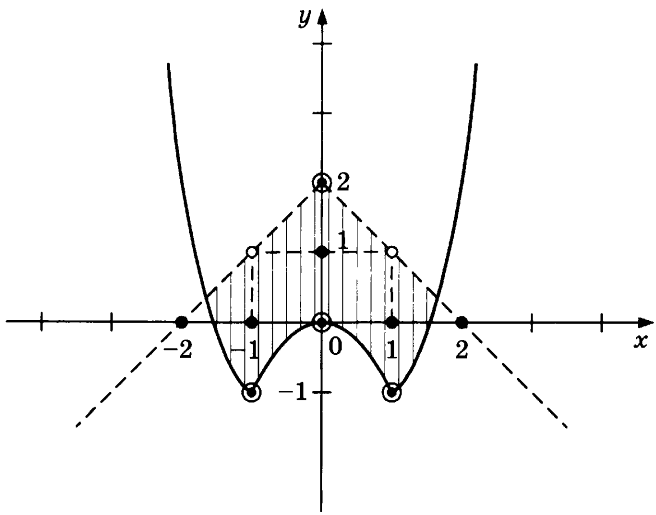


Рис. 1

Из этого рисунка видно, что в полученном множестве содержатся только три точки с целочисленными координатами — это $(t, y) = \{(-1, 0); (1, 0); (1, 1)\}$. Таким образом, ответом к задаче будут служить пары чисел $(x, y) = \{(0, 0); (2, 0); (1, 1)\}$.

Ответ: $\{(0, 0); (2, 0); (1, 1)\}$.

Пример 3. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \le -25, \\ x^2 - y \le 8, \\ 4x + y \le 1. \end{cases}$$

Решение. Складывая первое неравенство данной системы с третьим, получаем неравенство $5x \le -24$, откуда $x \le -\dfrac{24}{5}$. Если же сложить между собой второе и третье неравенства исходной системы, то получится неравенство $x^2 + 4x \le 9$, которое будет иметь своим решением промежуток $x \in \left[-2-\sqrt{13}, -2+\sqrt{13}\right]$. Следовательно, искомые значения переменной x должны принадлежать промежутку $x \in$ $\in \left[-2-\sqrt{13}, -\dfrac{24}{5}\right]$. А так как x — целое число, то $x = -5$. Подставляя $x = -5$ в данную систему, находим, что

$$\begin{cases} -5 - y \le -25 \\ 25 - y \le 8 \\ -20 + y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 20 \\ y \ge 17 \\ y \le 21 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 20 \\ y = 21, \end{array}\right.$$

так как y также является целым числом. Таким образом, ответом к задаче будут служить пары чисел $(x,\ y) = \{(-5,\ 20);$ $(-5,\ 21)\}$.

Ответ: $\{(-5,\ 20);\ (-5,\ 21)\}$.

Пример 4. Найти все тройки целых чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющих неравенству

$$\lg(2x + 3y - 6z + 3) + \lg(3x - 5y + 2z - 2) + \lg(2y + 4z - - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

Решение. Заметим сначала, что при любых значениях переменных x, y, z сумма трёх чисел, стоящих под знаком логарифмов, равна 3. Кроме того, каждое из этих чисел является целым и положительным. Следовательно, все три указанных числа равны 1, а левая часть неравенства при этом обращается в нуль. Имеем:

$$z^2 - 9z + 17 < 0;\ z \in Z \Leftrightarrow z = 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

При $z = 3$ для нахождения x и y получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 5y = -3, \end{cases}$$

которая не имеет решений в целых числах. При $z = 4$ имеем:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 22 \\ 3x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4. \end{cases}$$

Если $z = 5$, система принимает вид

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 5y = -7, \end{cases}$$

и не имеет целочисленных решений. И, наконец, если $z = 6$, находим, что

$$\begin{cases} 2x + 3y = 34 \\ 3x - 5y = -9. \end{cases}$$

Полученная система также не имеет решений в целых числах. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x = 5$, $y = 4$ и $z = 4$.

Ответ: $\{(5, 4, 4)\}$.

Пример 5. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \\ 4x + 2y > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y+5)^2 < \dfrac{3}{2} \\ y > \dfrac{3}{2} - 2x. \end{cases}$$

На координатной плоскости Oxy полученная система определяет множество точек, изображенное на рис. 2 (граница не принадлежит данному множеству).

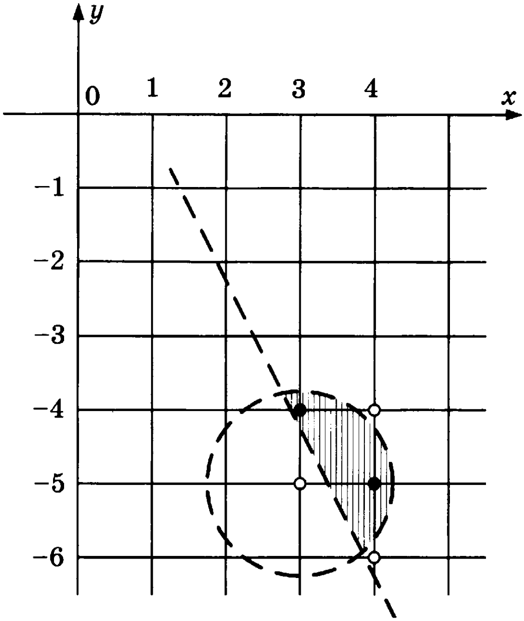


Рис. 2

Из рисунка видно, что этому множеству принадлежат только две точки с целочисленными координатами — это точки (3, −4) и (4, −5).

Ответ: $\{(3, -4); (4, -5)\}$.

Пример 6. Найти все пары целых чисел m, n, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171 \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-8)^2 + (n+11)^2 < 14 \\ (m-15)^2 + (n+7)^2 < 22. \end{cases}$$

На координатной плоскости Omn множество решений этой системы будет представлять собой пересечение двух кругов (исключая их границы), ограниченных окружностью с центром $O_1 = (8, -11)$ и радиусом $R_1 = \sqrt{14}$ и окружностью с центром $O_2 = (15, -7)$ и радиусом $R_2 = \sqrt{22}$ (рис. 3).

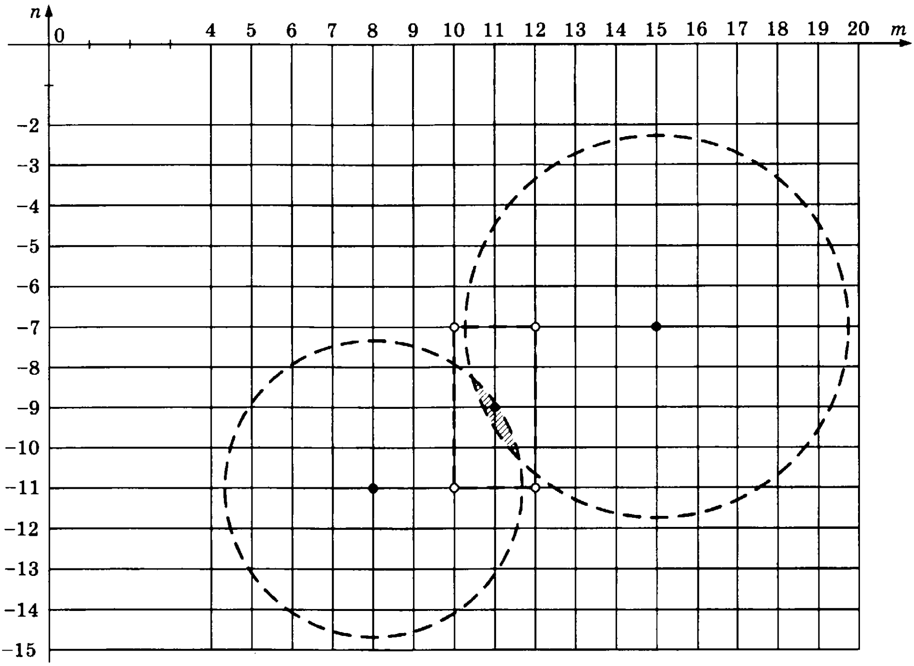


Рис. 3

Так как $R_1 < 4$, а $R_2 < 5$, то точка с координатами (12, −11) не принадлежит ни одному из этих кругов (поскольку расстояние от центра круга O_2 до точки с координатами (12, −11) равно 5). То же самое можно сказать и про точку с координатами (10, −7). Это означает, что искомое множество целиком содержится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $m = 10$, $m = 12$, $n = -7$, $n = -11$ (границы прямоугольника не включаются). Внутри этого прямоугольника имеются только три точки с целочисленными координатами — это точки (11, −8), (11, −9) и (11, −10). Проверкой убеждаемся, что решением задачи будет служить пара чисел (11, −9).

Ответ: {(11, −9)}.

Пример 7. Найти все такие пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

Решение. Для нахождения области определения данного уравнения рассмотрим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \geq 0 \\ 2y - x + 3 \geq 0 \\ 3 - x - y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y \geq \dfrac{x-3}{2} \\ y \leq 3 - x. \end{cases}$$

Изобразим множество решений этой системы на координатной плоскости Oxy (рис. 4).

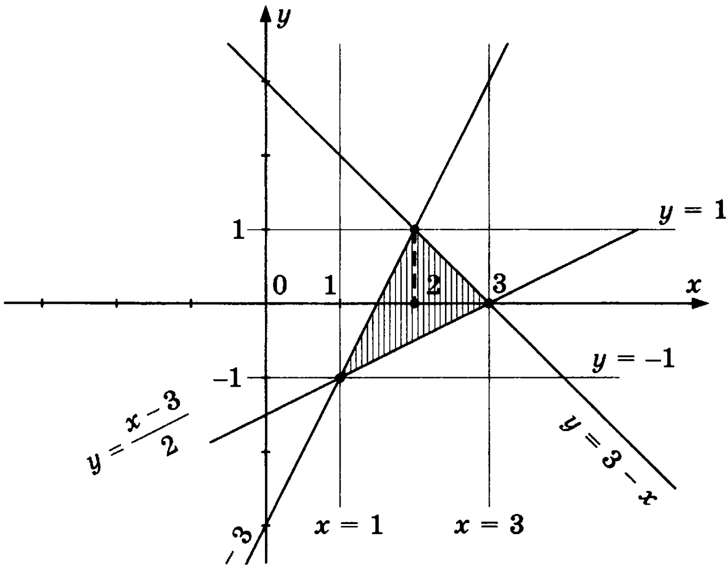


Рис. 4

Из рисунка видно, что это множество является треугольником и целиком содержится в квадрате, ограниченном прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 1$. При этом из граничных точек квадрата треугольнику принадлежат точки $(1, -1)$, $(2, 1)$ и $(3, 0)$. Так как x и y — целые числа, то в область определения исходного уравнения может войти также внутренняя точка квадрата, имеющая координаты $(2, 0)$. Проверкой убеждаемся, что из четырех рассмотренных пар чисел решением уравнения будет служить только пара $(x, y) = (2, 0)$.

Ответ: $\{(2, 0)\}$.

Пример 8. При каких значениях параметра $a \neq 0$ количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенству $|y| \leq \dfrac{a^2 - x^2}{a^3}$, минимально?

Решение. Заметим сначала, что при $a < 0$ данное неравенство будет иметь бесконечно много целочисленных решений. Действительно, решениями будут служить пары чисел (x, y), где $y = 0$ и $a^2 - x^2 \le 0$, т.е. $x \in (-\infty, a] \cup [-a, +\infty)$.

Пусть теперь $a > 0$. Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$-\frac{a^2 - x^2}{a^3} \le y \le \frac{a^2 - x^2}{a^3}.$$

Необходимо рассмотреть несколько случаев. При $a = 1$ полученное неравенство принимает вид $-1 + x^2 \le y \le 1 - x^2$ и имеет своим решением следующие пять пар целых чисел: $(x, y) = \{(0, 0); (-1, 0); (1, 0); (0, -1); (0, 1)\}$. При $a \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ множество решений этого неравенства изображено на рис. 5.

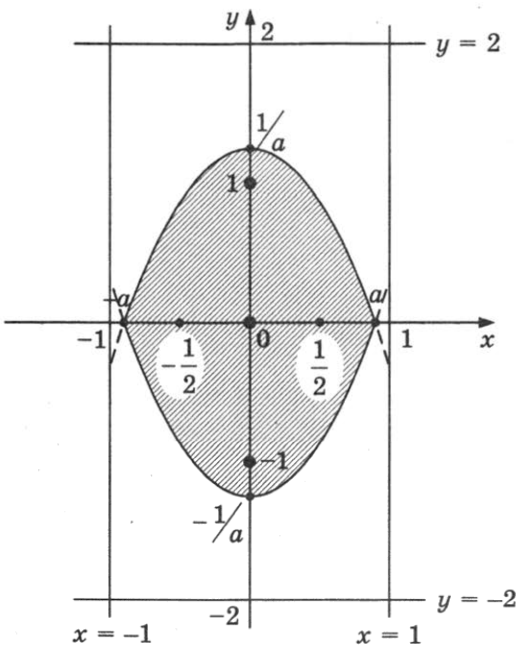


Рис. 5

Ясно, что это множество целиком содержится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$, $y = 2$ (границы прямоугольника не включаются), и имеет три пары целочисленных решений: $(x, y) = \{(0, 0); (0, -1); (0, 1)\}$.

Аналогично, если $a \in (1, 2)$, то решениями $x \in Z$, $y \in Z$ будут служить $(x, y) = \{(0, 0); (-1, 0); (1, 0)\}$ (рис. 6).

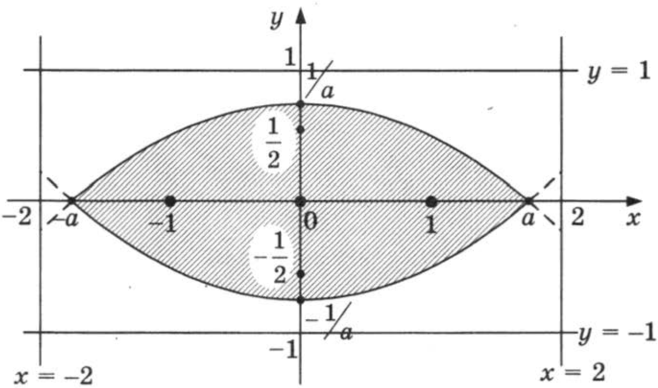


Рис. 6

При $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ и при $a \geq 2$ исходное неравенство будет иметь, по крайней мере, пять пар целочисленных решений (x, y); в первом случае это будут числа $x = 0$, $y = 0, \pm1, \pm2$, во втором — числа $y = 0$, $x = 0, \pm1, \pm2$ (рис. 7, 8).

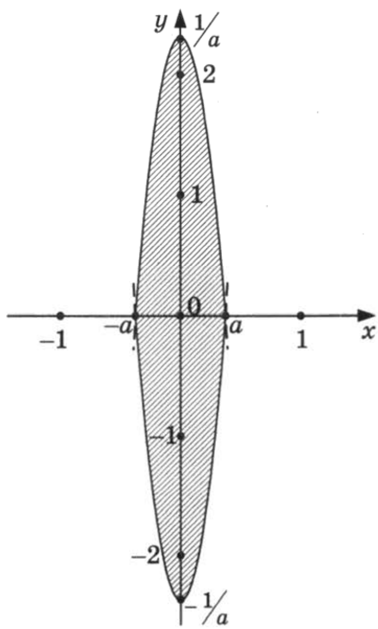


Рис. 7

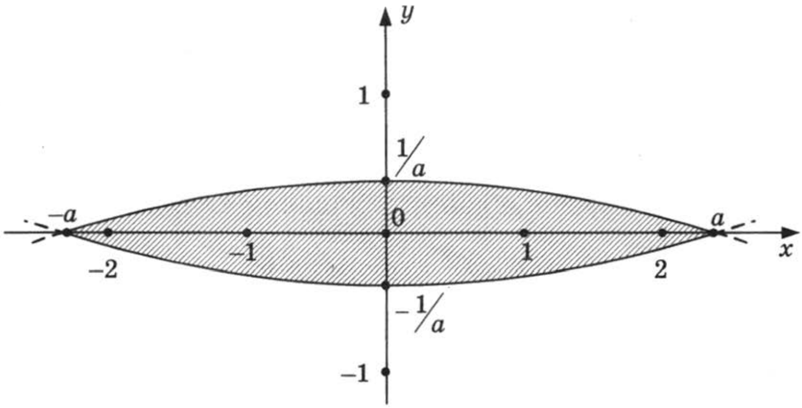


Рис. 8

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,\ 2)$.

О т в е т: $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,\ 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ 2x + 4y < 15. \end{cases}$$

2. Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > 271 + 12q + p^2. \end{cases}$$

3. Найти все такие пары целых чисел $(x,\ y)$, каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{5 - x - 2y} = 2\sqrt{2 - x + y}.$$

4. При каких значениях параметра $b \neq 0$ количество пар целых чисел $(y,\ z)$, удовлетворяющих неравенству $b^3y^2 + |z| \le b^2$, минимально?

5. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \left|x^2+2x\right| < y+1, \\ y+\left|x+1\right| < 2. \end{cases}$$

6. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2 < 5, \\ 4y \le x+11. \end{cases}$$

7. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3-3x^2-9y+24x-47 > 0, \\ y^3+x^2-9y-10x+23 < 0. \end{cases}$$

8. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y \le k^2+10k+20, \\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky \le 5-k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

9. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-y \le -50, \\ x^2-y \le 6, \\ 6x+y \le 2. \end{cases}$$

10. Найти все тройки целых чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}}+\frac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}} >$$

$$> \frac{2}{\sqrt{3x+2y-5z-4}}+x^2+7x+11.$$

§ 7. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ

Важную роль при решении задач на делимость играет основная теорема арифметики. Она утверждает, что каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа. Данная форма записи называется каноническим разложением числа n.

Отметим также некоторые признаки делимости, не имеющие широкого распространения.

1. Число делится на 2^k тогда и только тогда, когда число, составленное из последних k цифр его десятичной записи, идущих в том же порядке, делится на 2^k.

2. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9. Более того, любое натуральное число даёт при делении на 9 тот же остаток, что и сумма всех его цифр. Сказанное верно и для делимости на 3.

3. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, считая справа в десятичной записи данного числа, и суммы цифр, стоящих на чётных местах в десятичной записи данного числа, делится на 11.

Некоторые задачи на делимость решаются путем перебора всевозможных остатков при делении на какое-либо натуральное число так, как это делалось при решении некоторых диофантовых уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n + 5$ соответственно.

Решение. Разложим числа 5600 и 3024 на простые множители. Имеем:

$$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7; \ 3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Если число n делится на 5, то и число $n + 5$ также делится на 5. Но в этом случае число 3024 не может делиться на $n + 5$, так как в его разложении на простые множители пятерки отсутствуют. Следовательно, n не делится на 5. В этом случае n является делителем числа $2^5 \cdot 7 = 224$. Все возможные варианты запишем в виде таблицы:

n	1	2	4	7	8	14	16	28	32	56	112	224
$n + 5$	6	7	9	12	13	19	21	33	37	61	117	229

Из чисел второй строки делителями числа $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$ являются 6, 7, 9, 12 и 21. Соответствующие им значания n равны 1, 2, 4, 7 и 16. Их сумма равна 30.

Ответ: 30.

Пример 2. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Решение. Пусть $k \neq 1$ — общий делитель чисел $3n - m$ и $5n + 2m$. Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3n - m = kx \\ 5n + 2m = ky; \qquad x, y \in N. \end{cases}$$

Если домножим первое уравнение этой системы на 2 и сложим со вторым, то получим уравнение $11n = k(2x + y)$. Аналогично, умножив первое уравнение системы на 5, а второе на 3 и произведя вычитание, получим, что $11m = k(3y - 5x)$. Запишем полученные равенства в виде системы:

$$\begin{cases} 11n = k(2x + y) \\ 11m = k(3y - 5x). \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

Если k не делится на 11, то k является общим делителем чисел m и n, что противоречит условию задачи. Если k делится на 11, но $k \neq 11$, тогда число $\frac{k}{11}$ также будет являться общим делителем m и n, что невозможно. И, наконец, если $k = 11$, то в качестве примера можно взять $m = 1$ и $n = 4$. Тогда дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, равную $\frac{11}{22}$, можно сократить на 11. Таким образом, если данная в условии задачи дробь сократима, то ее можно сократить только на число 11.

Ответ: на 11.

Пример 3. Найти все натуральные n, при которых число $n^2 + 5n + 16$ делится нацело на 169.

Решение. Если данное число

$$n^2 + 5n + 16 = (n + 9)(n - 4) + 52$$

делится на $169 = 13^2$, то оно делится и на 13. Поскольку число 52 делится на 13, то и произведение $(n + 9)(n - 4)$ также делится на 13. Поэтому хотя бы один из его сомножителей $n + 9$ или $n - 4$ делится на 13, а так как

$$(n + 9) - (n - 4) = 13,$$

то сразу оба числа $n + 9$ и $n - 4$ делятся на 13. Следовательно, их произведение делится на 169, а поскольку 52 не делится на 169, то сумма

$$(n + 9)(n - 4) + 52$$

также не делится на 169.

Ответ: таких чисел нет.

Пример 4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Решение. Разложим числа 210 и 1920 на простые множители:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7;\ 1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5.$$

Так как произведение всех чисел из A делится на 1920, A должно содержать по крайней мере семь чисел, имеющих в своём разложении на простые множители двойку. Среди делителей числа 210 таких чисел восемь:

$$2,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 7,\ 2 \cdot 5 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Совокупность A не может состоять только из этих восьми чисел, так как тогда их произведение равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ и является полным квадратом. Но, согласно условию задачи, количество чисел в A больше семи. А это означает, что в A присутствует, по крайней мере, одно число, не входящее в данный список, т.е. не содержащее в своём разложении двойку. Следовательно, число 2 не может входить в A, так как иначе A содержало бы два взаимно простых числа, что противоречит одному из условий задачи. Кроме того, ясно, что число, содержащееся в A и не входящее в список, — это $3 \cdot 5 \cdot 7$, так как любое другое такое число будет взаимно просто с одним из чисел списка — например, число $3 \cdot 5$ взаимно просто с числом $2 \cdot 7$. Значит, совокупность A состоит из следующих восьми чисел:

$$2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7,\ 3 \cdot 5 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Ответ: $A = \{6, 10, 14\ 30, 42, 70, 105, 210\}$.

Пример 5. Натуральные числа k, l, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найти числа k, l и m, если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.

Решение. Пусть $q > 1$ — целое число, являющееся знаменателем данной геометрической прогрессии. Тогда $l = kq$, $m = kq^2$. Разложим числа 2835 и 2646 на простые множители. Имеем:

$$2835 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7;\ 2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2.$$

Так как первое из этих чисел делится на q, а второе на q^2, то q может принимать только одно из трех значений: $q = 3$, $q = 7$ и $q = 21$.

Если $q = 3$, то число 2835 должно делиться на $l = kq = 3k$, следовательно, $3^3 \cdot 5 \cdot 7$ должно делиться на k. Аналогично 2646 делится на $m = kq^2 = 9k$, т.е. $2 \cdot 3 \cdot 7^2$ делится на k. Так как при этих условиях k должно быть максимальным (при фиксированном q сумма $k + kq + kq^2$ максимальна тогда и только тогда, когда максимально k), то k есть наибольший общий делитель (НОД) чисел $3^3 \cdot 5 \cdot 7$ и $2 \cdot 3 \cdot 7^2$, т.е. $k = 3 \cdot 7 = 21$. В этом случае $l = kq = 63$, $m = kq^2 = 189$ и $k + l + m = 273$.

Если $q = 7$, то 2835 делится на $7k$, а 2646 делится на $7^2 \cdot k$, откуда непосредственно вытекает, что $k =$ НОД $(3^4 \cdot 5; 2 \cdot 3^3) = 27$. При этом $l = 189$, $m = 1323$ и $k + l + m = 1539$. И, наконец, при $q = 21$ имеем, что $k =$ НОД $(3^3 \cdot 5; 2 \cdot 3) = 3$. В этом случае $k + l + m = 3 + 63 + 1323 = 1389$. Таким образом, сумма $k + l + m$ максимальна при $k = 27$ и $q = 7$ и ответом к задаче будут служить числа $k = 27$, $l = 189$ и $m = 1323$.

Ответ: $k = 27$, $l = 189$ и $m = 1323$.

Пример 6. Найти все пары пятизначных чисел n и m такие, что число $\overline{nm}$, полученное приписыванием десятичной записи числа m после десятичной записи числа n, делится на $n \cdot m$.

Решение. Согласно условию задачи число $10^5 \cdot n + m$ делится на nm, следовательно, это число делится на n. Так как $10^5 \cdot n + m$ делится на n и $10^5 \cdot n$ делится на n, то и m делится на n. Пусть $m = kn$; $k \in N$. Тогда число $10^5 \cdot n + kn$ должно делиться на kn^2, т.е. число $10^5 + k$ должно делиться на kn. Сразу заметим, что число k не может превосходить 9, так как иначе при умножении на k пятизначного числа получим шестизначное (или состоящее из большего количества знаков) число.

Далее число $10^5 + k$ делится на kn, следовательно, это число делится на k. Отсюда вытекает, что и число 10^5 делится на k. С учётом вышесказанного k может принимать одно из следующих пяти значений: $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$, $k = 5$ или $k = 8$. Тогда $\dfrac{10^5}{k} + 1$ делится на n. Пусть $\dfrac{10^5}{k} + 1 = ln$; $l \in N$. Обратим внимание, что число l не может быть равно единице. Действительно, в этом случае $\dfrac{10^5}{k} + 1 = n$ и $m = kn = 10^5 + k$ не является пятизначным числом.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Пусть сначала $k = 1$, тогда должно быть выполнено равенство $100001 = ln$. При этом l не может превосходить 10 (действительно, $100001 : 11 = 9091$ является четырехзначным числом). Но у числа 100001 нет делителей, лежащих в интервале от 2 до 10. Таким образом, данный случай невозможен. Пусть теперь $k = 2$. В этом случае имеем, что $50001 = ln$. По тем же соображениям l здесь не превосходит 5. Из чисел 2, 3, 4 делителем 50001 является число $l = 3$. При этом $n = 16667$ и $m = 2n = 33334$.

Если $k = 4$, равенство $\dfrac{10^5}{k} + 1 = ln$ примет вид $25001 = ln$. Здесь имеем только одно возможное значение l — это $l = 2$ (при $l \geq 3$ число $\dfrac{25001}{l}$ уже не будет пятизначным). Ясно, что $l = 2$ не является делителем числа 25001.

Аналогично случаи $k = 5$ и $k = 8$ также являются невозможными. Действительно, при $k = 5$ получаем равенство $20001 = ln$, а при $k = 8$ равенство $12501 = ln$. Как легко видеть, нет таких натуральных l, чтобы n в этих равенствах было пятизначным числом.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $n = 16667$ и $m = 33334$.

Ответ: $n = 16667$, $m = 33334$.

Пример 7. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

Решение. Два числа, отличающиеся лишь порядком цифр, дают одинаковые остатки при делении на 9. Это следует из того факта, что число даёт такой же остаток при делении на 9, что и сумма всех его цифр. Выясним, какие остатки при делении на 9 могут давать числа вида 2^n; $n = 1, 2, 3...$:

Степень числа 2:	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
Остаток степени при делении на 9:	2	4	8	7	5	1	2

Докажем, что последовательность остатков при делении на 9 степеней двойки 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, ... периодична с периодом 6. Действительно, $2^{n+6} - 2^n = 2^n \cdot 63$ делится на 9. Предположим, что две степени двойки отличаются только лишь порядком цифр, тогда они дают одинаковый остаток при делении на 9 и отличаются не менее чем в $2^6 = 64$ раза, т.е. в них разное количество цифр. Получаем противоречие.

Ответ: Не существует.

Задачи для самостоятельного решения

1. Натуральные числа m и n таковы, что НОД (m, n) + + НОК $(m, n) = m + n$. Доказать, что одно из них является делителем другого.

2. Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a, b, c, если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

3. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n.

4. Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

5. Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

6. Доказать, что если сумма целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих же чисел делится на 6.

7. Существует ли такое натуральное число n, что число $2n^2 + 3n + 4$ делится нацело на 2005?

8. Доказать, что при любом натуральном n число 4^n + + $15n - 1$ делится на 9.

9. Найти все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, где n — натуральное число.

10. Известно, что натуральное трехзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Должны ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться нацело на 37?

11. Является ли число $100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55$ простым?

12. Каждое из целых чисел n, m, k не делится на три. Доказать, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на три.

13. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

14. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

15. Пусть q и d — наименьшее общее кратное и соответственно наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Найти наименьшее значение величины $q : d$, если выполнено условие $3x = 8y - 29$.

16. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\dfrac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{2n - m}{3n + 2m}$, если известно, что она сократима?

17. Доказать, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда у него нечетное число натуральных делителей.

18. Доказать, что при любом натуральном n сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

§ 8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В отличие от уже рассмотренных в предыдущих главах текстовых задач в задачах настоящей главы свойства делимости имеют определяющее значение. В процессе решения таких задач необходимо следить за целочисленностью всех переменных, которые должны быть таковыми по смыслу задачи. Конечно, при этом остаются в силе и другие уже рассмотренные методы решения задач в целых числах. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто — лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Каким при этих условиях могло быть наименьшее число опрошенных?

Решение. Обозначим через x число школьников, которые любят лето, через y — число школьников, которые любят зиму, а через z — число всех опрошенных школьников. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,9x = 0,72y \\ 0,9z = x + 0,28y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ 9z = x + 10y. \end{cases}$$

Кроме этого числа $0{,}1x$ и $0,28y = \frac{7}{25}y$ должны быть целыми. Это означает, что x делится без остатка на 10, а y — на 25. Наименьшие значения переменных при этих условиях — это $x = 20$ и $y = 25$. При этом $z = \frac{x+10y}{9} = 30$.

Таким образом, было опрошено минимум 30 школьников.

Ответ: 30 школьников.

Пример 2. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год — на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка за 2006 год?

Решение. Пусть x — число книг в библиотеке в начале 2005 года. Тогда в конце 2005 года в библиотеке было $1,004x = \frac{251}{250}x$, а в конце 2006 года — $1{,}008 \cdot 1{,}004x = \frac{126}{125} \cdot \frac{251}{250}x$. Так как последнее число является целым, а каждое из чисел 125 и 250 взаимно просто с каждым из чисел 126 и 251, то x делится без остатка на $125 \cdot 250 = 31\,250$. Поскольку x при этом не превосходит 50 000, то $x = 31\,250$. Тогда за 2006 год фонд библиотеки увеличился на

$$\frac{126}{125}\cdot\frac{251}{250}x-\frac{251}{250}x=$$

$$=(x=125\cdot 250)=$$

$$=126\cdot 251-125\cdot 251=251\text{ (книгу).}$$

Ответ: на 251 книгу.

Пример 3. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их число увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

Решение. Разложим числа 6480 и 11 200 на простые множители:

$$6480=2^4\cdot 3^4\cdot 5;\ 11\,200=2^6\cdot 5^2\cdot 7.$$

Пусть n — количество прессов, которое было на заводе первоначально. Тогда $(n+3)$ — количество прессов, которое стало после реконструкции. Так как каждый пресс выпускает в день целое число деталей, то 6480 должно делиться на n, а 11 200 — на $(n+3)$. При этом n не может делиться на 3, так как тогда бы и $(n+3)$ делилось на 3, а в разложении числа 11 200 на простые множители тройки отсутствуют. Значит, $n>1$ является делителем числа $2^4\cdot 5=80$, т.е. может принять одно из следующих значений:

$$2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 16,\ 20,\ 40,\ 80.$$

Тогда $n+3$ принимает, соответственно, значения

$$5,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 19,\ 23,\ 43,\ 83.$$

Ясно, что всем условиям делимости удовлетворяют $n=2$, $n=4$ и $n=5$. В случае $n=2$ производительность каждого пресса до реконструкции равна 3240 деталей в день, а после реконструкции — 2240 деталей в день, что противоречит условию задачи. В случае $n=4$ производительность каждого пресса до реконструкции равна 1620 деталей в день, а после реконструкции — 1600 деталей в день, что также противоречит условию задачи. И, наконец, в случае

$n = 5$ производительность каждого пресса до реконструкции равна 1296 деталей в день, а после реконструкции — 1400 деталей в день, что не противоречит условию задачи.

Ответ: 5 прессов.

Пример 4. Юля и Лера верили в народную примету: встретить машину, номер которой содержит две одинаковые цифры, — к удаче. В первый день Юля встретила на 20% «счастливых» машин меньше, чем Лера. Во второй день, наоборот, Юля встретила на 30% машин больше, чем Лера в этот день. Всего за два дня Лера встретила на 10% меньше «счастливых» машин, чем Юля. Какое минимальное количество «счастливых» машин могли встретить студентки за два дня при данных условиях?

Решение. Пусть x и y — число машин, которые встретила Лера в первый и второй день соответственно. Тогда Юля встретила в первый день $0{,}8x$, а во второй — $1{,}3y$ автомобилей. Согласно условию задачи имеем

$$0{,}9(0{,}8x + 1{,}3y) = x + y \Leftrightarrow 28x = 17y.$$

Так как числа $0{,}8x = \frac{4}{5}x$ и $1{,}3y = \frac{13}{10}y$ должны быть целыми, то x должно делиться на 5, а y на 10 без остатка. При этих условиях наименьшим натуральным решением полученного уравнения является пара чисел $x = 17 \cdot 5 = 85$ и $y = 28 \cdot 5 = 140$. Таким образом, за два дня студентки встретили $1{,}8x + 2{,}3y = 475$ (машин).

Ответ: 475 машин.

Пример 5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Решение. Пусть x, y, z и t — число месяцев, в которых вклад находился под действием каждой из перечисленных процентных ставок соответственно. Имеем уравнение:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^y\cdot\left(1+\frac{11\frac{1}{9}}{100}\right)^z\cdot\left(1+\frac{12,5}{100}\right)^t=\left(1+\frac{104\frac{1}{6}}{100}\right)$$

или после преобразований

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^y\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^z\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^t=\frac{49}{24}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2y+z+3}\cdot 3^{x+2t+1}\cdot 5^z\cdot 7^{x+y}=$$

$$=2^{2x+3t}\cdot 3^{2z}\cdot 5^{x+2y}\cdot 7^2.$$

Используя теорему об единственности разложения любого натурального числа на простые множители, получим систему:

$$\begin{cases}2y+z+3=2x+3t\\ x+2t+1=2z\\ z=x+2y\\ x+y=2.\end{cases}$$

Так как x и y — натуральные числа, из последнего уравнения немедленно следует, что $x=y=1$. Далее не составляет труда найти, что $z=3$ и $t=2$. Таким образом, общее число месяцев, в которых вклад находился в банке, есть $x+y+z+t=7$.

Ответ: 7 месяцев.

Пример 6. Брокерская фирма выставила на торги акции двух компаний: нефтяной компании — по 100 долларов за акцию и газовой компании — по 65 долларов 60 центов за акцию. Всего было 200 акций. Все акции газовой компании были проданы, а часть акций нефтяной компании осталась непроданной. Общая сумма выручки оказалась равной 13 120 долларов. Найти сумму выручки, полученной за акции газовой компании.

Решение. Пусть x и y — количество проданных акций нефтяной и газовой компаний соответственно. Согласно условию задачи получаем уравнение:

$$100x + 65{,}6y = 13120 \Leftrightarrow \frac{125}{82}x + y = 200.$$

Так как число $\frac{125}{82}x$ является целым, а числа 125 и 82 взаимно простые, то x должно делиться на 82 без остатка. Следовательно, $x = 82$, так как иначе число $y = 200 - \frac{125}{82}x$ будет отрицательным. Таким образом, выручка от продажи акций газовой компании составляет

$$65{,}6y = 13120 - 100x = 4920 \text{ долларов.}$$

Ответ: 4920 долларов.

Пример 7. В цехе имелось n одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 деталей. После реконструкции число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило, по крайней мере, без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на четыре. Найти n.

Решение. Пусть x — количество деталей, которые вытачивал в день каждый станок до реконструкции. Тогда, согласно условиям задачи, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} nx = 5850 \\ (n-4)\cdot 1{,}2x \ge nx \\ (n-5)\cdot 1{,}2x < nx \end{cases} \Rightarrow \quad 24 \le n < 30.$$

Так как n — целое число, то n = 24, 25, 26, 27, 28, 29. Разложим теперь число 5850 на простые множители: $5850 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$. Поскольку n является делителем числа 5850, то $n = 25$ или $n = 26$. Если $n = 25$, то $x = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ и число $1{,}2x$ не является целым. Если же $n = 26$, то $x = 3^2 \cdot 5^2$ и $1{,}2x$ — целое число. Таким образом, в цехе до реконструкции было 26 станков.

Ответ: $n = 26$.

Пример 8. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов A и B общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида A больше цены одной акции вида B. К концу дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов A и B.

Решение. Обозначим через x, y, z количество акций вида A в начале дня у первого, второго и третьего брокеров соответственно, а через p и q — цены на акции видов A и B ($p > q$). Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} px + q(11 - x) = 4402 \\ py + q(21 - y) = 4402 \\ pz + q(29 - z) = 4402 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p - q)x + 11q = 4402 \\ (p - q)y + 21q = 4402 \\ (p - q)z + 29q = 4402. \end{cases}$$

Вычтем третье уравнение из первого и третье из второго. Имеем:

$$\begin{cases} (p - q)(x - z) = 18q \\ (p - q)(y - z) = 8q \end{cases} \Rightarrow \quad 4(x - z) = 9(y - z).$$

Последнее равенство было получено делением двух уравнений с одновременным выполнением условий $p > q > 0$, $x - z > 0$, $y - z > 0$. Далее, так как $1 \le x \le 10$ и $z \ge 1$, то $x - z = 9$ (поскольку из полученного равенства следует, что $x - z$ делится на 9) и, значит, $x = 10$ и $z = 1$. Тогда $y - z = 4$ и $y = 5$. Возвращаясь к исходной системе, находим, что $p = 426$ и $q = 142$.

Ответ: 426 рублей и 142 рубля.

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди учащихся старших классов провели опрос: кто любит волейбол, а кто — баскетбол. Оказалось, что 52% любителей волейбола любят и баскетбол, а 65% любителей баскетбола любят и волейбол. Зато 36% всех опрошенных не любят ни волейбол, ни баскетбол. Каким при этих условиях могло быть наименьшее число опрошенных?

2. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 15 000 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать 33 792 банки в день. Сколько поточных линий было первоначально?

3. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}$%, на третьем — $6\frac{1}{4}$% и на четвертом — $11\frac{2}{7}$% в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить продолжительность периода реконструкции.

4. После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 55% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?

5. Интервалы движения морских катеров по трём маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с 7 часов 40 минут до 17 часов 35 минут того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трёх маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11 часов 15 минут?

6. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

7. Численность населения города, не превышавшая 50 тыс. человек, за 2005 год сократилась на 1,2%, а за 2006 год — на 2,4%. На сколько человек сократилась численность населения города за 2006 год?

8. Птицеферма имела m куриц одинаковой породы, которые могли снести в сумме 8232 яйца в год. После выведения новой яйценосной породы число яиц, приносимых одной курицей в год, возросло на 25%. Это позволило, по крайней мере, без сокращения общего объема продукции птицефермы уменьшить число куриц максимум на четыре. Найти m.

9. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей больше чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в 3 раза, а красных — в 2 раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько в каждом комплекте было синих и красных карандашей.

10. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей в сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

11. Три фермера отправились на ярмарку для продажи баранов. Первый привел 10, второй — 16, третий — 26 голов. Каждый продал часть своих баранов (не менее одного, но не всех) в течение первого дня по одинаковой цене за одного барана. На второй день цена на баранов упала, и фермеры, опасаясь дальнейшего понижения цены, продали остальных баранов и опять по одинаковой цене за каждого барана. По какой цене продавались бараны в первый и второй день, если каждый из фермеров выручил от продажи 35 000 рублей?

12. «...Словарь людоеда из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью...» Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас стал, оставаясь целочисленным, увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу. Какое наибольшее целое число месяцев могла проучиться Эллочка в школе, чтобы при этих условиях словарь людоеда после одного года посещения проповедей обязательно оказался богаче словаря Эллочки?

§ 9. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Экстремум — это обобщающее понятие, означающее либо максимум, либо минимум. Мы в основном будем рассматривать задачи с «экономическим» уклоном, в которых требуется найти экстремум функции (последовательности) целочисленного аргумента. Особенностью таких задач является отсутствие какого-либо единого метода их решения. Будут применяться все уже изученные методы решения задач в целых числах (делимость, оценки переменных, графические иллюстрации и т.д.). Однако при этом каждая «экстремальная» задача имеет свою ярко выраженную специфику. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа P и 2010 деталей типа Q. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Решение. Пусть x — число рабочих в бригаде, изготовляющей детали типа P, $192 - x$ — число рабочих в бригаде, изготовляющей детали типа Q, y — количество деталей типа Q, которое один рабочий делает за единицу времени, тогда $2y$ — количество деталей типа P, которое один рабочий делает за ту же единицу времени. Тогда время изготовления деталей типа P составит $t_1 = \dfrac{1005}{2yx}$, а время изготовления деталей типа Q есть $t_2 = \dfrac{2010}{y(192-x)}$. Время выполнения заказа равно

$$t = \max\{t_1, t_2\} = \frac{1005}{y} f(x),$$

где $f(x) = \max\left\{\dfrac{1}{2x}, \dfrac{2}{192-x}\right\}$.

Таким образом, задача свелась к поиску натурального x, лежащего в интервале $1 \le x \le 191$, для которого достигается минимум функции $f(x)$. Для решения этой задачи удобно нарисовать график функции $f(x)$ (рис. 9).

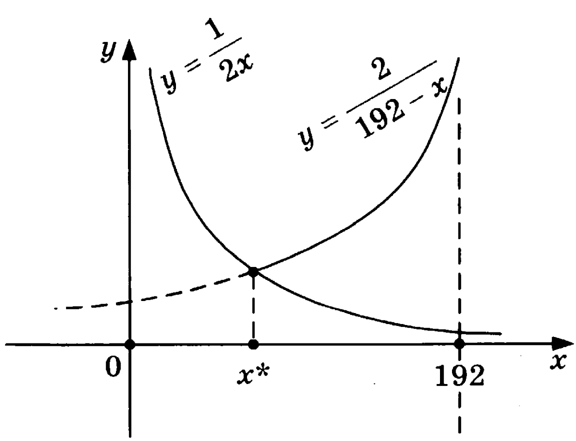


Рис. 9

Очевидно, что минимум $f(x)$ достигается при $x = x^*$, где x^* есть решение уравнения $\frac{1}{2x} = \frac{2}{192 - x}$, т.е. $x^* = 38\frac{2}{5}$. Поскольку x^* не является целым числом, необходимо исследовать два близлежащих целых числа $x_1 = 38$ и $x_2 = 39$ и сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Так как $f(x_1) = \frac{1}{76} > \frac{2}{153} = f(x_2)$, то минимум $f(x)$ достигается при $x = 39$. Таким образом, рабочих фабрики следует разделить на бригады в количестве 39 и 153 человека.

Ответ: 39 и 153 человека.

Пример 2. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Решение. Пусть x, y и z — число домов на 12, 16 и 21 квартиру соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Какое наибольшее значение может принять выражение $12x + 16y + 21z$ при условиях, что $70x + 110y + 150z \le 900$ и $100x + 150y + 200z \le 1300$?» Пусть $t = 12x + 16y + 21z$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 12x + 16y + 21z \\ 70x + 110y + 150z \le 900 \\ 100x + 150y + 200z \le 1300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12}(t - 16y - 21z) \\ 7x + 11y + 15z \le 90 \\ 2x + 3y + 4z \le 26 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12}(t - 16y - 21z) \\ 7t + 20y + 33z \le 1080 \\ t + 2y + 3z \le 156. \end{cases}$$

Так как числа y и z не принимают отрицательных значений, из второго неравенства системы следует, что $t \le 154$. Пусть $t = 154$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(154 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 2 \\ 2y + 3z \le 2. \end{cases}$$

Так как y и z — целые неотрицательные числа, то полученной системе удовлетворяет единственная пара чисел $y = z = 0$, однако при этом x не является целым числом. Аналогичная ситуация и при $t = 153$ и $t = 152$. Пусть $t = 151$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(151 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 23 \\ 2y + 3z \le 5. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют пары чисел $y = 0$, $z = 0$ и $y = 1$, $z = 0$, однако x ни в одном из случаев не является целым числом. Аналогичная ситуация и при $t = 150$. Пусть $t = 149$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(149 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 37 \\ 2y + 3z \le 7. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют пары чисел $y = 0$, $z = 0$; $y = 1$, $z = 0$ и $y = 0$, $z = 1$, однако x снова ни в одном из случаев не является целым числом. И, наконец, если $t = 148$, система примет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(148 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 44 \\ 2y + 3z \le 8 \end{cases}$$

и будет иметь единственное целочисленное решение $x = 11$, $y = 1$ и $z = 0$.

Ответ: Один дом на 16 квартир и 11 домов на 12 квартир.

Пример 3. Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Решение. Пусть x, y и z — количество лис, леопардов и львов соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких натуральных x, y и z, таких, что $2x + 14y + 21z = 111$, выражение $20x + 160y + 230z$ принимает наибольшее значение?» Пусть $t = 2x + 16y + 23z$. Выразив x через t, y и z и подставив в первое уравнение, получим систему:

$$\begin{cases}(t-16y-23z)+14y+21z=111\\ 2x=t-16y-23z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2y+2z+111\\ 2x=t-16y-23z.\end{cases}$$

Значит, t максимально, когда максимально $y + z$. Это означает, что леопардов и львов в сумме должно быть как можно больше. Но так как леопард съедает меньше мяса, чем лев, надо брать как можно больше леопардов. При этом наибольшее возможное число леопардов — семь, иначе им не хватит на всех 111 кг мяса. Пусть $y = 7$. Имеем:

$$\begin{cases}t=14+2z+111\\ 2x=t-112-23z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2z+125\\ 2x=13-21z.\end{cases}$$

Так как $2x \geq 0$, то и $13 - 21z \geq 0$, следовательно, $z = 0$, поскольку z — натуральное число. Но тогда x не является целым числом, поэтому последняя система решений не имеет. Пусть $y = 6$. Имеем:

$$\begin{cases}t=12+2z+111\\ 2x=t-96-23z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2z+123\\ 2x=27-21z.\end{cases}$$

Так как $2x \geq 0$, то и $27 - 21z \geq 0$, следовательно, $z = 0$ или $z = 1$, поскольку z — натуральное число. Если $z = 0$, то x не является целым числом, если $z = 1$, то $x = 3$.

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов и 1 лев.

Пример 4. На полевых работах геологу нужно собрать образцы типов A и B. Вес одного образца типа A равен 3 кг, а типа B — 4 кг. По каждому из образцов типа A требуется провести 5 видов анализов, а по каждому из образцов типа B — 7 видов. Известно, что вес всех собранных образцов не должен превышать 149 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее чем 249. Какое минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов можно собрать при указанных условиях?

Решение. Пусть x и y — количество собранных образцов типа A и B соответственно, $t = x + y$ — суммарное количество образцов. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 149 \\ 5x + 7y \geq 249 \\ t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4(t - x) \leq 149 \\ 5x + 7(t - x) \geq 249 \\ y = t - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq \dfrac{149 + x}{4} \\ t \geq \dfrac{249 + 2x}{7}. \end{cases}$$

На координатной плоскости Oxt изобразим множество точек, являющихся решением последней системы неравенств с учетом условия $x > 0$ и $t > 0$ (рис. 10).

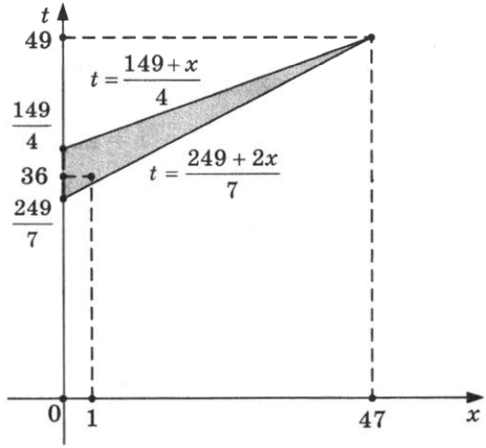


Рис. 10

Так как x и t — натуральные числа, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x, t) = (1, 36)$, а точка с наибольшей ординатой есть точка $(x, t) = (47, 49)$. Таким образом, при данных условиях можно собрать минимально 36 образцов, максимально — 49 образцов.

Ответ: 36 и 49.

Пример 5. Паром грузоподъемностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джипов. Вес и стоимость перевозки одного джипа составляют 3 тонны и 600 рублей, а грузовика — 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джипов и грузовиков при данных условиях.

Решение: Пусть x и y — количество перевозимых на пароме джипов и грузовиков соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 5y \le 109 \\ y \ge 1,2x \\ 600x + 700y = 100t, \end{cases}$$

где $100t$ — суммарная стоимость перевозки всех джипов и грузовиков, которую надо сделать максимальной. Исключая из системы переменную x, получаем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t-7y}{6} \\ \dfrac{t-7y}{2} + 5y \le 109 \\ y \ge \dfrac{t-7y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{218-t}{3} \\ y \ge \dfrac{t}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{12} \le \frac{218-t}{3} \Leftrightarrow t \le 174,4.$$

Так как t — целое число, получаем, что $t \le 174$.

Пусть $t = 174$. Имеем: $\begin{cases} y \le \dfrac{44}{3} \\ y \ge \dfrac{174}{12} \end{cases}$ — нет целых решений.

Если $t = 173$, получаем: $\begin{cases} y \le 15 \\ y \ge \dfrac{173}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = \dfrac{68}{6}$ — не является целым числом.

При $t = 172$ имеем: $\begin{cases} y \le \dfrac{46}{3} \\ y \ge \dfrac{172}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = \dfrac{67}{6}$ — не является целым числом.

И, наконец, если $t = 171$, получаем:

$$\begin{cases} y \le \dfrac{47}{3} \\ y \ge \dfrac{172}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = 11.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить сумма $100t = 17\ 100$ рублей.

Ответ: 17 100 рублей.

Пример 6. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Решение. Покажем сначала, как все блоки можно перевезти за 20 рейсов. Сначала грузим в машину один большой и 30 маленьких блоков и делаем 16 таких рейсов. По объему это как раз составляет 44 маленьких блока, а по весу — $3{,}6 + 30 \cdot 0{,}2 = 9{,}6$ тонны за один рейс. После этого у нас остаётся 8 больших и 30 маленьких блоков, и мы их перевозим за 4 рейса следующим образом. В машину грузим по 2 больших и 8 маленьких блоков (последние два рейса — по 7 маленьких блоков). По объёму это составляет $28 + 8 = 36$ маленьких блоков, а по весу — $2 \cdot 3{,}6 + 8 \cdot 0{,}2 = 8{,}8$ тонны за каждый рейс (меньше за последние два рейса).

Теперь докажем, что все блоки нельзя перевезти за 19 рейсов. Действительно, суммарный объём всех блоков равен $24 \cdot 14 + 510 = 846$ маленьких блоков, а в 19 машин можно погрузить максимум $19 \cdot 44 = 836$ маленьких блоков. Таким образом, минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков, равно 20.

Ответ: 20 рейсов.

Пример 7. На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 140 рублей. Тетрадь в клетку стоит 3 рубля, тетрадь в линейку — 2 рубля. При закупке число тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более чем на 9. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество тетрадей, при этом тетрадей в линейку нужно закупить как можно меньше. Сколько тетрадей в клетку и сколько тетрадей в линейку можно закупить при указанных условиях?

Решение. Пусть x и y — количество закупленных тетрадей в клетку и в линейку соответственно, $t = x + y$ — общее количество тетрадей. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 140 \\ |x - y| \le 9 \\ t = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(t - y) + 2y \le 140 \\ t - 2y \ge -9 \\ t - 2y \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t - 2y \le 280 \\ 2y - t \le 9 \\ t - 2y \le 9. \end{cases}$$

Сложив первые два неравенства, получим неравенство $5t \le 289$, которое эквивалентно неравенству $t \le 57$, поскольку t — целое число. Следовательно, максимально возможное значение переменной t — это $t = 57$. При этом исходная система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 171 - y \le 140 \\ 57 - 2y \ge -9 \\ 57 - 2y \le 9 \end{cases} \Rightarrow \quad 31 \le y \le 33.$$

Ясно, что минимально возможное значение переменной y — это $y = 31$, при этом $x = t - y = 26$. Таким образом, нужно купить 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку.

Ответ: 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку.

Задачи для самостоятельного решения

1. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причём каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

2. В контейнер упакованы комплектующие изделия трёх типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

3. При проведении геологических исследований требуется пробурить скважины типов A и B. Каждая скважина типа A имеет глубину 70 метров, а типа B — 90 метров. Расходы на бурение одной скважины типа A составляют 500 тыс. руб., а одной скважины типа B — 600 тыс. руб. Суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 3290 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 22 300 тыс. руб. Какое минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов можно пробурить при указанных условиях?

4. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\left(\frac{40\,500}{n} + 270 - \left|-90 - \frac{40\,500}{n}\right|\right)$ тыс. руб., а цена каждого телевизора не превосходит $\left(540 - \frac{3n}{10}\right)$ тыс. руб. Определите ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

5. Имеются три пакета акций. Суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

6. Автофургон грузоподъемностью 339 кг перевозит ящики с виноградом и яблоками. Вес и стоимость одного ящика с виноградом составляют 15 кг и 10 условных единиц, ящика с яблоками — 27 кг и 8 условных единиц соответственно. Известно, что количество загруженных на автофургон ящиков с виноградом составляет не более 70% от количества загруженных ящиков с яблоками. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех ящиков с виноградом и яблоками, перевозимых автофургоном при данных условиях.

7. Цех получил заказ на изготовление 2000 деталей типа *A* и 14 000 деталей типа *B*. Каждый из 146 рабочих цеха затрачивает на изготовление одной детали типа *A* время, за которое он мог бы изготовить 2 детали типа *B*. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

8. В профком поступили путёвки трёх типов на отдых в санатории. Одна путёвка первого типа стоит 4 тыс. руб., одна путёвка второго типа — 6 тыс. руб., одна путёвка третьего типа — 9 тыс. руб. По путёвке первого типа можно отдыхать 8 дней, по путёвке второго типа — 14 дней, по путёвке третьего типа — 20 дней. Сколько путёвок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла 100 тыс. руб.?

9. Детский сад хочет приобрести на сумму 2200 рублей наборы конфет. Наборы одного типа стоят 50 рублей (в каждой коробке 10 конфет), наборы другого типа — 180 рублей (в каждой коробке 38 конфет), наборы третьего типа — 150 рублей (в каждой коробке 32 конфеты). Сколько коробок каждого типа должен купить детский сад, чтобы общее число купленных конфет было максимальным?

10. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 30 рублей, роза — 40 рублей. На покупку гвоздик и роз можно потратить не более 710 рублей. При покупке число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

11. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 6-квартирного дома необходимо 30 деталей первого и 40 деталей второго вида. Для 10-квартирного дома требуется 40 и 60, а для дома на 14 квартир нужно 90 и 120 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

12. Из пункта A в пункт B по железной дороге нужно перевезти 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона равна 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.

§ 10. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПРОГРЕССИИ

Пусть a_1 и d — первый член и разность некоторой арифметической прогрессии, n — количество её членов. Пусть также a_n — n-й член этой прогрессии, S_n — сумма n первых её членов. Имеют место следующие соотношения:

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Пусть теперь b_1 и q — первый член и знаменатель некоторой геометрической прогрессии ($b_1 \neq 0$, $q \neq 0$), n — количество её членов. Пусть также b_n — n-й член этой прогрессии, S_n — сумма n первых её членов. Тогда выполнены следующие равенства:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ при } q \neq 1,$$

$$S_n = nb_1 \text{ при } q = 1.$$

В данной главе в основном рассматриваются задачи на арифметическую либо геометрическую прогрессии, все члены которой являются целыми числами. При решении таких задач используются уже изученные нами методы и приемы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Последние члены двух арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_M и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ..., b_K совпадают, а сумма всех их общих членов равна 815. Найти M и K.

Решение. Очевидно, что

$$a_m = 5 + 3(m - 1),$$

$$b_k = 9 + 5(k - 1),$$

где $1 \leq m \leq M$ и $1 \leq k \leq K$. Для нахождения общего члена двух прогрессий составим и решим в натуральных числах уравнение:

$$5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$$

Рассматривая всевозможные остатки от деления k на 3, получим, что $k = 3n - 1$, где $n \in Z$ и $1 \leq n \leq N$, откуда $m = 5n - 1$. Найдем N. Легко видеть, что общие члены обеих арифметических прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 14, разностью, равной 15, и количеством членов, равным N. Применим к этой прогрессии формулу для нахождения суммы её первых N членов:

$$S_N = \frac{2 \cdot 14 + 15(N - 1)}{2} \cdot N = 815 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15N^2 + 13N - 1630 = 0,$$

откуда $N = 10$, $M = 5N - 1 = 49$ и $K = 3N - 1 = 29$.

Ответ: $M = 49$, $K = 29$.

Пример 2. Все члены геометрической прогрессии $\{b_n\}$ являются целыми числами. Определить, при каких из указанных ниже значений k число $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2$ делится на $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ независимо от выбора прогрессии, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 5$.

Решение. Пусть b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Согласно условиям задачи b и q — целые числа, кроме того, b, $q \neq 0$. Если $q = 1$, то $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2 = kb^2$, а $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = kb$. Поэтому первое число делится нацело на второе. Пусть $q \neq 1$. Имеем:

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k} =$$

$$= \frac{b^2(q^{2k} - 1)}{q^2 - 1} : \frac{b(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{b(q^k + 1)}{q + 1}.$$

При любом нечётном k полученная дробь является целым числом. Действительно,

$$\frac{q^{2m+1} + 1}{q + 1} = q^{2m} - q^{2m-1} + q^{2m-2} - q^{2m-3} + \ldots + q^2 - q + 1.$$

Поэтому $k = 3$ и $k = 5$ удовлетворяют требованиям задачи. В то же время, к примеру, для $b_1 = 1$, $q = 2$ и $k = 4$ получаем $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 85$, а $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 15$, т.е. первое из чисел не делится нацело на второе.

Ответ: $k = 3$, $k = 5$.

Пример 3. Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за шесть лет увеличилось на 20 615 человек. Найти первоначальную численность сотрудников корпорации.

Решение. Пусть x — первоначальная численность сотрудников корпорации, а $q = \frac{m}{n}$, где $m, n \in N$, $m > n$, m и n взаимно просты, — знаменатель геометрической прогрессии (q рационально как отношение двух натуральных чисел). Прирост за шесть лет равен

$$xq^6 - x = x\left(\frac{m^6}{n^6} - 1\right) = \frac{x}{n^6}(m^6 - n^6) =$$

$$= y(m^6 - n^6) = 20\ 615,$$

где $y = \dfrac{x}{n^6}$ — натуральное число, поскольку m и n взаимно просты, а значит, числа $m^6 - n^6$ и n^6 также взаимно просты. Имеем далее:

$$y(m - n)(m + n)(m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn) =$$
$$= 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31,$$

причем

$$m + n \le m(m - n) + n^2 = m^2 + n^2 - mn.$$

Возможны четыре случая:

1. Если $m - n > 1$, то каждое из четырех чисел $m - n < < m + n < m^2 + n^2 - mn < m^2 + n^2 + mn$ должно совпадать с соответствующим из чисел $5 < 7 < 19 < 31$, поэтому $m - n = 5$, $m + n = 7$, откуда $m = 6$, $n = 1$, что невозможно, так как $m^2 + n^2 - mn = 43 \neq 31$.

2. Если $m - n = 1$, а $m + n = 5$, то $m = 3$, $n = 2$, $m^2 + n^2 - - mn = 7$, $m^2 + n^2 + mn = 19$, $y = 31$ и $x = yn^6 = 1984$.

3. Если $m - n = 1$, а $m + n = 7$, то $m = 4$, $n = 3$, $m^2 + n^2 - - mn = 13$, что не делится ни на одно из чисел 5, 19, 31.

4. Если $m - n = 1$, а $m + n > 7$, то $m + n \ge 19$, откуда получаем, что $m \ge 10$, $m^2 + n^2 + mn \ge 10^2$ и $(m - n)(m + n) \times \times (m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn) \ge 19^2 \cdot 100 = 36\ 100$, что невозможно. Таким образом, первоначальная численность сотрудников корпорации составляла 1984 человека.

Ответ: 1984 сотрудника.

Пример 4. Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены — натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

Решение. Пусть a_1 и d — первый член и разность данной арифметической прогрессии, а S_{14} — сумма её первых четырнадцати членов. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$S_{14} = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 77 \Leftrightarrow 2a_1 + 13d = 11,$$

откуда вытекает, что $6a_1 + 39d = 33$ является целым числом. Далее $a_{11} = a_1 + 10d$ — целое число, следовательно, $4a_{11} = 4a_1 + 40d$ также является целым числом. Имеем:

$$\begin{cases} 6a_1 + 39d \in Z \\ 4a_1 + 40d \in Z \end{cases} \Rightarrow 2a_1 - d \in Z \Rightarrow d \in Z,$$

так как a_1 — целое число. Итак, мы доказали, что разность прогрессии d является целым числом.

Из равенства $2a_1 + 13d = 11$ вытекает, что $a_1 = \dfrac{11-13d}{2}$ и $a_{11} = a_1 + 10d = \dfrac{11+7d}{2}$. Так как a_1 и a_{11} не только целые, но и натуральные числа, имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{11-13d}{2} > 0 \\ \dfrac{11+7d}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{11}{7} < d < \frac{11}{13} \Rightarrow d = 0 \text{ или } d = -1,$$

поскольку d — целое число. Если $d = 0$, то $a_1 = \dfrac{11-13d}{2}$ не является целым числом. Если же $d = -1$, то $a_1 = 12$ и $a_{18} = a_1 + 17d = -5$.

Ответ: $a_{18} = -5$.

Пример 5. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Решение. Пусть a_1 и d — первый член и разность данной арифметической прогрессии, a_n и S_n; $n \in N$ — n-й член и сумма ее первых n членов соответственно. Тогда первое из условий задачи можно записать следующим образом:

$$|S_6 - S_{7-12}| < 450 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |S_6 - (S_{12} - S_6)| < 450 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2S_6 - S_{12}| < 450 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |6(2a_1 + 5d) - 6(2a_1 + 11d)| < 450 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |36d| < 450 \Leftrightarrow |d| \le 12,$$

так как d — целое число. Здесь S_{7-12} — сумма членов данной прогрессии с седьмого по двенадцатый включительно.

Далее, согласно второму условию задачи, имеем неравенства $S_5 \ge 6 + S_4$ и $S_5 \ge 6 + S_6$ (здесь используем целочисленность данной прогрессии). Первое из этих неравенств эквивалентно неравенству $a_5 \ge 6$, а второе — неравенству $a_6 \le -6$. Имеем:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \ge 6 \\ a_6 = a_1 + 5d \le -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 4d \le -6 \\ a_1 + 5d \le -6 \end{cases} \Rightarrow d \le -12.$$

Итак, $d = -12$, первое неравенство системы принимает вид $a_1 \ge 54$, второе неравенство преобразуется к виду $a_1 \le 54$. Значит, $a_1 = 54$.

Ответ: $a_1 = 54$.

Пример 6. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма её членов со второго по последний не меньше 26. Найти знаменатель прогрессии.

Решение. Пусть b_n и S_n, $n \in N$ — соответственно n-й член и сумма n первых членов данной прогрессии, q — ее знаменатель. Заметим, что $q \ne 1$, иначе не выполняется первое из условий задачи. Согласно остальным условиям задачи при $q \ne 1$ имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} b_1 \ge b_n - 17 \\ S_n - b_1 \ge 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \ge b_1 \cdot q^{n-1} - 17 \\ b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} - b_1 \ge 26 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^{n-1} - 1) \le 17 \\ b_1\left(\dfrac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1}\right) \ge 26. \end{cases}$$

Так как дробь $\frac{q}{q-1}$ положительна при всех целых q, отличных от нуля и единицы, полученная система эквивалентна следующему двойному неравенству:

$$\frac{26(q-1)}{q} \le b_1\left(q^{n-1}-1\right) \le 17 \Rightarrow \frac{26(q-1)}{q} \le 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9q-26}{q} \le 0.$$

Ясно, что последнему неравенству с учетом всех вышеперечисленных условий удовлетворяет только $q = 2$. При этом двойное неравенство принимает вид $13 \le b_1(2^{n-1} - 1) \le 17$ и выполняется, например, при $n = 3$ и $b_1 = 5$. Таким образом, знаменатель данной геометрической прогрессии равен двум.

Ответ: $q = 2$.

Пример 7. Найти все возможные значения суммы возрастающей арифметической прогрессии:

$$a_1 = \frac{4k-k^2-1}{4k-k^2+5};\ a_2 = \frac{4k-k^2+3}{4k-k^2+5};\ \ldots;\ a_n = \frac{15}{4k-k^2+5},$$

где k — некоторое целое число.

Решение. Заметим, что разность данной прогрессии равна

$$d = a_2 - a_1 = \frac{4}{4k-k^2+5}.$$

Прогрессия является возрастающей, если $d > 0$, т.е. $k = 0$, 1, 2, 3, 4 (так как k — целое число).

При $k = 0$ или $k = 4$ имеем $a_1 = -\frac{1}{5}$, $a_n = 3$, $d = \frac{4}{5}$. По формуле n-го члена арифметической прогрессии находим, что

$$a_n = a_1 + d(n-1) \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}(n-1) \Leftrightarrow n = 5.$$

Тогда сумма первых n членов этой прогрессии будет равна

$$S_n = S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 7.$$

Если $k = 1$ или $k = 3$, имеем $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = \frac{15}{8}$, $d = \frac{1}{2}$. В этом случае:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n - 1) \Leftrightarrow n = \frac{17}{4}$$

— не является целым числом.

И, наконец, при $k = 2$ находим, что $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{5}{3}$, $d = \frac{4}{9}$. В этом случае получаем, что

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}(n - 1) \Leftrightarrow n = 4.$$

Тогда

$$S_n = S_4 = \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 4.$$

Таким образом, сумма членов данной арифметической прогрессии может быть равна 7 или 4.

Ответ: $S = 7$ или $S = 4$.

Пример 8. Шесть простых чисел являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Доказать, что разность этой прогрессии не меньше 30.

Решение. Предположим, что разность прогрессии нечетна. Тогда в этой прогрессии будет как минимум три чётных числа, что невозможно. Аналогично, если разность прогрессии не кратна 3, то в этой прогрессии будут как минимум два числа, кратных трем. Значит, разность прогрессии кратна 2 и 3, т.е. кратна 6.

Если разность прогрессии не кратна 5, то в ней есть член, кратный 5. Тогда это простое число 5. Если 5 — первый член прогрессии, то среди оставшихся пяти членов есть еще один член, кратный 5, что невозможно. Если же 5 не является первым членом, то первый член будет отрицательным, ибо ранее доказано, что разность прогрессии не меньше 6.

Итак, разность прогрессии кратна 5 и 6, т.е. кратна 30, а значит, не менее 30. Прогрессия с разностью 30, удовлетворяющая условию задачи, существует. В качестве примера можно взять прогрессию 7, 37, 67, 97, 127, 157, состоящую из простых чисел.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму первых ста общих членов арифметических прогрессий 0, 7, 14, ... и 3, 7, 11, ...

2. Известно, что последние члены двух арифметических прогрессий $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, ..., a_L и $b_1 = 4$, $b_2 = 9$, ..., b_M совпадают и что сумма всех общих членов этих прогрессий равна 1440. Найти L и M.

3. Найти сумму чисел, одновременно являющихся членами двух арифметических прогрессий: 2, 5, 8, ..., 332 и 7, 12, 17, ..., 157.

4. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найти двадцатый член этой прогрессии.

5. Сумма первых двенадцати членов арифметической прогрессии равна 54. Известно, что её первый и девятый члены — натуральные числа. Чему равен девятнадцатый член прогрессии?

6. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

7. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 15, а сумма её членов со второго по последний не меньше 23. Найти знаменатель прогрессии.

8. Найти все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии:

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2};\ a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2};\ \ldots;\ a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

9. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

10. Количество жителей поселка ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за шесть лет увеличилось на 37 037 человек. Найти первоначальную численность жителей поселка.

§ 11. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

В данной главе рассматриваются задачи на целые числа, связанные с квадратным трехчленом. Во многих случаях при решении таких задач используется графический метод. В некоторых задачах применяется теорема Виета, которая формулируется следующим образом. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все целые значения a, при каждом из которых квадратный трехчлен $x^2 - 3ax + 2a^2 + 1$ можно разложить в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

Решение. Согласно условию задачи имеем следующее равенство:

$$x^2 - 3ax + 2a^2 + 1 = (x + b)(x + c) = x^2 + (b + c)x + bc,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} -3a = b + c \\ 2a^2 + 1 = bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a - b \\ 2a^2 + 1 = -3ab - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a - b \\ (a + b)(2a + b) = -1. \end{cases}$$

Из последнего равенства ввиду целочисленности значений a и b вытекают два случая:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=1. \end{cases}$$

В первом случае получаем, что $a = -2$, $b = 3$, $c = 3$, во втором — $a = 2$, $b = -3$, $c = -3$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = \pm 2$.

Ответ: $a = \pm 2$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение. Обозначим $3^x = t > 0$, тогда данное неравенство принимает вид $t^2 - 20t - a < 0$. Рассмотрим функцию $y(t) = t^2 - 20t - a$. На координатной плоскости Oty графиком этой функции будет служить парабола, абсцисса вершины которой равна $t_0 = 10$. Тогда целочисленным решениям исходного неравенства $x = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ будут соответствовать $t = 3^x = \ldots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots$. Отсюда следует, что исходное неравенство не имеет ни одного целочисленного решения тогда и только тогда, когда число $t = 9$ не входит в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$ (или это неравенство вообще не имеет решений). И в том и в другом случае должно выполняться условие $y(9) \geq 0$ (рис. 11).

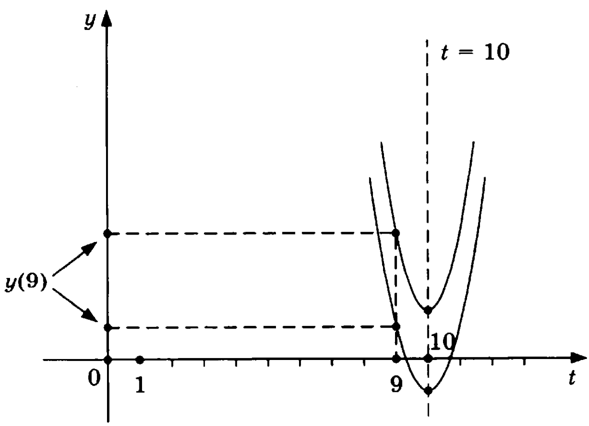


Рис. 11

В противном случае (т.е. когда $y(9) < 0$) число $t = 9$ попадает в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$, и, значит, $x = 2$ является решением исходного неравенства. Окончательно имеем:

$$y(9) \geq 0 \Leftrightarrow 81 - 20 \cdot 9 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -99.$$

Полученные значения a и будут служить ответом к задаче.

Ответ: $a \leq -99$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых существует ровно 1998 целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - \pi x + a < 0$.

Решение. Обозначим заданный квадратный трёхчлен через $f(x) = x^2 - \pi x + a$. Так как вершина параболы $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ удовлетворяет неравенствам $\dfrac{3}{2} < x_0 < 2$, то множество решений данного неравенства содержит ровно 1998 целых чисел в том и только в том случае, когда парабола $y = f(x)$ расположена так, как показано на рис. 12.

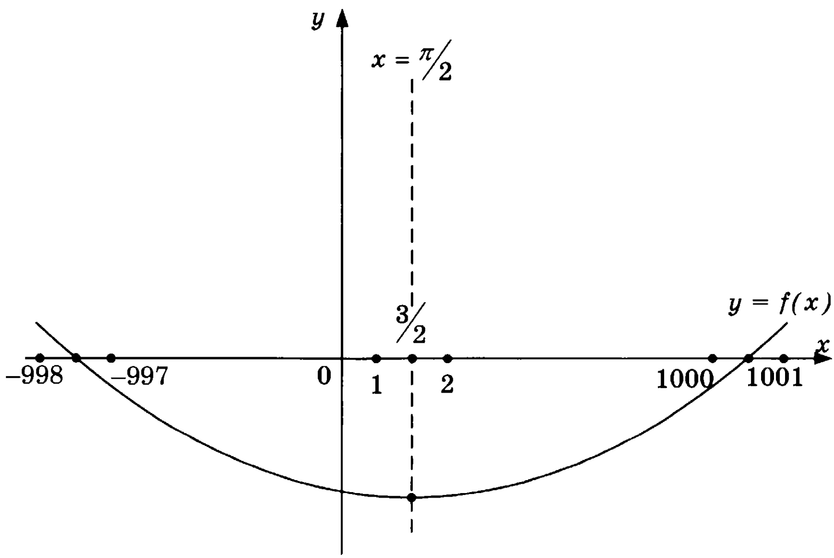


Рис. 12

Значит, корни трёхчлена x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} -998 \le x_1 < -997 \\ 1000 < x_2 \le 1001 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-997) < 0 \\ f(1001) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 997^2 + 997\pi + a < 0 \\ 1001^2 - 1001\pi + a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1001(\pi - 1001) \le a < -997(\pi + 997).$$

Ответ: $1001(\pi - 1001) \le a < -997(\pi + 997)$.

Пример 4. Найти все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 - 5(x - 1) + 3|x - q| - q \le 0$ максимально.

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$x^2 - 5(x - 1) + 3|x - q| - q \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge q \\ x^2 - 5x + 5 + 3x - 3q - q \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le q \\ x^2 - 5x + 5 - 3x + 3q - q \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q \le x \\ q \ge \dfrac{x^2 - 2x + 5}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} q \ge x \\ q \le \dfrac{-x^2 + 8x - 5}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

На координатной плоскости Oxq изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной совокупности (рис. 13).

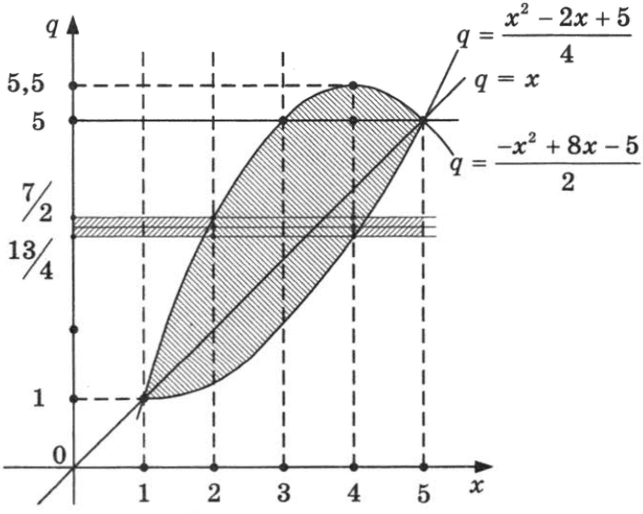


Рис. 13

Из рисунка видно, что наибольшее число целочисленных решений (а именно три решения) данное неравенство будет иметь при $\frac{13}{4} \le q \le \frac{7}{2}$ и $q = 5$.

Ответ: $\frac{13}{4} \le q \le \frac{7}{2}$, $q = 5$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$$

содержит хотя бы одно целое число.

Решение. Рассмотрим данное неравенство как квадратное относительно a:

$$4a^2 + (6x - 24)a + 6x^2 - 3x + 35 < 0.$$

Необходимым и достаточным условием существования его решений является положительность дискриминанта:

$$(3x - 12)^2 - 4(6x^2 - 3x + 35) > 0 \Leftrightarrow 15x^2 + 60x - 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{-30 - 8\sqrt{15}}{15}, \frac{-30 + 8\sqrt{15}}{15}\right).$$

Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x — это $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Требуется для каждого из этих значений x найти соответствующие значения параметра a.

1. Если $x = -4$, то неравенство принимает вид

$$4a^2 - 48a + 143 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

2. Если $x = -3$, получаем

$$2a^2 - 21a + 49 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{7}{2}, 7\right).$$

3. При $x = -2$ имеем

$$4a^2 - 36a + 65 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

4. Для $x = -1$ получаем

$$2a^2 - 15a + 22 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(2, \frac{11}{2}\right).$$

5. Если $x = 0$, то

$$4a^2 - 24a + 35 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right).$$

Ответ выписывается как результат объединения всех полученных интервалов: $a \in (2,\ 7)$.

Ответ: $a \in (2,\ 7)$.

Пример 6. Каждый из двух различных корней некоторого квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x = 1$ являются простыми числами. Найти a, b и корни трёхчлена $f(x)$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x)$ (будем считать, что $x_1 < x_2$), тогда $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ и $f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Так как по условию x_1, x_2 и $f(1)$ являются простыми числами, то числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ — натуральные и меньшее из них равно 1 (иначе $f(1)$ не будет простым). Следовательно, $x_1 = 2$ и $f(1) = x_2 - 1$. Значит, $x_2 - 1$ и x_2 — два последовательных простых числа, что возможно, только если этими числами являются 2 и 3.

Итак, $x_2 = 3$, $3a + 10 = -(x_1 + x_2) = -5$, $5b - 14 = x_1 \cdot x_2 = 6$, откуда $a = -5$ и $b = 4$.

Ответ: $a = -5$, $b = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Пример 7. Найти все a, при которых уравнение

$$(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0$$

имеет, по крайней мере, один корень и все его корни являются целыми числами.

Решение. При $a = -1$ получаем, что данное уравнение имеет единственный корень $x = -1$, поэтому $a = -1$ удовлетворяет условию задачи. Если $a \neq -1$ и квадратное уравнение $(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0$ имеет корни x_1, x_2, то, согласно теореме Виета, выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{a-1}{a+1} \\ x_1x_2 = \dfrac{a+3}{a+1} \end{cases} \Rightarrow\ x_1 + x_2 + x_1x_2 = \frac{a-1}{a+1} + \frac{a+3}{a+1} = \frac{2a+2}{a+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3.$$

Так как x_1 и x_2 — целые числа, то возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} x_1+1=1 \\ x_2+1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1+1=3 \\ x_2+1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1+1=-1 \\ x_2+1=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1+1=-3 \\ x_2+1=-1. \end{cases}$$

Или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=-2. \end{cases}$$

В первом и втором случаях квадратный трёхчлен принимает вид

$$(1+a)(x-x_1)(x-x_2)=(1+a)x(x-2)$$

и должен совпадать с исходным квадратным трёхчленом; отсюда находим $a=-3$. В третьем и четвёртом случаях получаем, что

$$(1+a)(x+2)(x+4)\equiv(1+a)x^2+(1-a)x+a+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(1+a)=1-a \\ 8(1+a)=a+3 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{5}{7}.$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a=-1$, $a=-3$, $a=-\frac{5}{7}$.

Ответ: $a=-1$, $a=-3$, $a=-\frac{5}{7}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $16^x + a < 30 \cdot 4^x$ не имеет ни одного целочисленного решения.

2. Найти все целые значения параметра a, при которых существуют ровно два целых значения x, удовлетворяющих неравенству $x^2 + 5\sqrt{2}\,x + a < 0$.

3. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найти корни трёхчлена.

4. Найти все такие целые a и b, что корни уравнения

$$x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5$$

являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

5. Найти все a, при которых уравнение

$$(1 + a)x^2 + (1 - a)x - 5a - 3 = 0$$

имеет, по крайней мере, один корень и все его корни являются целыми числами.

6. Найти все целые значения a, при которых квадратный трёхчлен $x^2 - (a + 5)x + 5a + 1$ можно разложить в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

7. Найти все значения параметра p, при которых число целочисленных решений неравенства

$$x^2 + 5(x + 1) + 3|x - p| + p \leq 0$$

максимально.

8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$2x^2 + 12a^2 - 6ax + 17x + 2a + 56 < 0$$

содержит хотя бы одно целое число.

§ 12. ЗАДАЧИ, АНАЛОГИЧНЫЕ ЗАДАЧАМ 19 ИЗ ЕГЭ

В данной главе рассматриваются задачи типа 19, аналогичные тем, которые предлагались на Едином государственном экзамене по математике.

Пример 1. Найти все пары натуральных чисел k и n таких, что $k < n$ и выполнено равенство $(n^2)^k = (k^2)^n$.

Решение. Ясно, что данное уравнение эквивалентно уравнению $n^k = k^n$. Рассмотрим общее уравнение $x^y = y^x$ (x и y различные действительные положительные числа). Преобразуем его следующим образом:

$$x^y = y^x \Leftrightarrow y \cdot \ln x = x \cdot \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, тогда наше уравнение примет вид $f(x) = f(y)$. Производная этой функции равна

$$f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = e.$$

Следовательно, $f(t)$ строго возрастает при $0 < t < e$ и строго убывает при $t > e$. Поэтому на каждом из этих промежутков функция $f(t)$ принимает любое своё значение ровно по одному разу. Это означает, что равенство $f(x) = f(y)$ при $x \neq y$ возможно тогда и только тогда, когда x и y принадлежат разным промежуткам. Но интервалу $(0, e)$ принадлежат только два натуральных числа — это 1 и 2. При этом значение $f(1) = 0$ не принимается на интервале $(e, +\infty)$. Таким образом, в натуральных числах исходное уравнение имеет решение только при $k = 2$.

Число $n > 2$ находим из уравнения:

$$\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln n}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n = 4.$$

В силу приведённых выше рассуждений это решение будет единственным.

Ответ: $k = 2$, $n = 4$.

Пример 2. Найти все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $5 \cdot k! = m! - n!$. Здесь ($1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$).

Решение. Возможны три случая. Если $k = n < m$, имеем:

$$5 \cdot k! = m! - k! \Leftrightarrow 6 \cdot k! = m! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = (k+1)(k+2) \ldots (m-1)m.$$

Несложным перебором получаем, что либо $k = 1$ и тогда $m = 3$, либо $k = 5$ и $m = 6$. Если $k < n < m$, исходное уравнение преобразуется следующим образом:

$$5 \cdot k! = m! - n! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 = [(k+1)(k+2) \ldots (m-1)m] - [(k+1)(k+2) \ldots (n-1)n] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 = [(k+1)(k+2) \ldots (n-1)n] \times$$

$$\times [(n+1)(n+2) + \ldots + (m-1)m - 1].$$

Последнее равенство невозможно, так как оба множителя (стоящие в квадратных скобках) больше единицы. И, наконец, если $n < k < m$, получаем, что

$$5 \cdot k! = m! - n! \Leftrightarrow n! = m! - 5 \cdot k! \Leftrightarrow$$

$$1 = [(n+1)(n+2) \ldots (m-1)m] -$$

$$- 5 \cdot [(n+1)(n+2) \ldots (k-1)k] \Leftrightarrow$$

$$1 = [(n+1)(n+2) \ldots (k-1)k] \times$$

$$\times [(k+1)(k+2) + \ldots + (m-1)m - 5].$$

Полученное равенство также невозможно, поскольку число, стоящее в первой квадратной скобке, всегда больше единицы. Таким образом, решением задачи будут служить $k = n = 1$, $m = 3$ и $k = n = 5$, $m = 6$.

Ответ: $k = n = 1$, $m = 3$; $k = n = 5$, $m = 6$.

Пример 3. Найти все натуральные n, для которых уравнение $n^2 + 2 = (2n - 1)^x$ имеет хотя бы один рациональный корень x.

Решение. Пусть $\dfrac{p}{q}$ — рациональный корень данного уравнения. Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$n^2 + 2 = (2n-1)^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow (n^2 + 2)^q = (2n - 1)^p.$$

Ясно, что $(n^2 + 2) - (2n - 1) = n^2 - 2n + 3 > 0$ при всех n, откуда следует, что $n^2 + 2 > 2n - 1 > 0$ при всех натуральных n. Поэтому будем считать числа p и q положительными и взаимно простыми, причём $p > q$. Пусть $p = q + t$, $t \in N$. Имеем:

$$(n^2 + 2)^q = (2n - 1)^{q+t} \Leftrightarrow \left(\frac{n^2+2}{2n-1}\right)^q = (2n - 1)^t.$$

Значит, дробь $\dfrac{n^2+2}{2n-1}$ является целым числом. Разделим $n^2 + 2$ на $2n - 1$ в «столбик» с остатком:

$$\frac{n^2+2}{2n-1} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4(2n-1)} \Leftrightarrow \frac{4(n^2+2)}{2n-1} = 2n + 1 + \frac{9}{2n-1}.$$

Следовательно, число $2n - 1$ является делителем числа 9, поэтому возможны варианты $n = 1$, $n = 2$ или $n = 5$. При $n = 1$ получаем, что $3^q = 1$ — нет решений в натуральных числах. При $n = 2$ имеем $\left(\frac{4}{3}\right)^q = 3t$, чего не может быть, так как в левой части не целое число. И, наконец, при $n = 5$ получаем уравнение $3^q = 9^t$, которое имеет решение в натуральных числах: $q = 2$, $t = 1$, $p = 3$ и, значит, $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $n = 5$.

Пример 4. Найти все несократимые дроби $\frac{a}{b}$, представимые в виде $\overline{b,a}$ (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел b и a).

Решение. Пусть натуральные числа a и b взаимно просты, а десятичная запись числа a имеет n знаков. Тогда условие задачи записывается в виде уравнения

$$\frac{a}{b} = b + a \cdot 10^{-n} \Leftrightarrow 10^n(a - b^2) = ab,$$

из которого следует, в частности, что $a > b$. В силу взаимной простоты чисел a и b число $a - b^2$ не имеет общих делителей ни с a, ни с b, следовательно, уравнение превращается в систему из двух уравнений

$$a - b^2 = 1,\ 10^n = ab.$$

В силу все той же взаимной простоты чисел a и b (с учетом $a > b$) последнему уравнению удовлетворяют только пары чисел $a = 10^n$, $b = 1$ и $a = 5^n$, $b = 2^n$. Первая пара при подстановке дает для числа n уравнение $10^n = 2$, которое не имеет решений. Если же $a = 5^n$ и $b = 2^n$, получаем, что

$$5^n - 4^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как левая часть полученного уравнения возрастает, а правая убывает, то это уравнение имеет не более одного корня, который угадывается: $n = 1$, откуда $a = 5$ и $b = 2$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Пример 5. Десятичная запись целого числа n, большего 9, должна состоять из различных цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найти все такие числа n.

Решение. Заметим сначала, что n — чётное число, так как при возведении любого нечётного числа, большего 3, в квадрат вторая цифра справа получается чётной. Действительно, квадрат любого нечётного числа оканчивается либо на 1, либо на 5, либо на 9 и должен давать остаток 1 при делении на 4, что не может произойти, если вторая справа цифра нечётная. Последней цифрой числа n не может быть 6. Если это так, то вторая справа цифра должна быть нечётной, иначе n будет давать остаток 2 при делении на 4, что также невозможно.

Следовательно, последняя цифра числа n — это 4 (если последняя цифра числа есть 0, то и предпоследняя должна быть равна 0, что приводит к противоречию). Рассмотрим теперь возможные остатки при делении числа n на 3. Полный квадрат при делении на 3 дает либо остаток 1, либо 0. Остатки при делении на 3 чисел 2, 4, 6, 8, 0 есть 2, 1, 0, 2, 0 соответственно. Так как любое число дает при делении на 3 тот же остаток, что и сумма его цифр, то число n дает остаток 1 при различных комбинациях цифр 4, 6, 0 (4 — последняя цифра, могут входить не все цифры), а остаток 0 — при различных комбинациях цифр 4, 6, 8, 0 (в этом случае n делится на 9, поэтому сумма цифр должна быть равна 18, цифра 0 может не входить, 4 — последняя цифра). В первом случае полным квадратом является число $n = 64$, во втором — число $n = 6084$.

Ответ: 64, 6084.

Пример 6. Какое наибольшее число членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой — различные натуральные числа, большие 340 и меньшие 520?

Решение. Без ограничения общности будем рассматривать только возрастающие геометрические прогрессии (если прогрессия убывающая, всегда можно положить первый член новой прогрессии равным последнему члену исходной, второй — предпоследнему и т.д., последний — ее первому члену). Знаменатель q такой геометрической прогрессии должен быть рационален как отношение двух натуральных чисел. Пусть $q = \frac{c}{d}$, где $c > d$ — несократимая дробь, $b_1 = x$ — первый член данной прогрессии, n — количество её членов. Докажем, что ответом к задаче является $n = 4$. В качестве примера возьмём прогрессию, у которой $b_1 = x = 7^3 = 343$, $q = \frac{8}{7}$, $b_2 = 7^2 \cdot 8$, $b_3 = 7 \cdot 8^2$ и $b_4 = 8^3 = 512$. Покажем, что для любой другой прогрессии, удовлетворяющей условиям задачи, всегда $n \le 3$.

Из неравенств $340 < b_1 < b_1 \cdot q^{n-1} < 520$ следует, что $q^{n-1} < \frac{520}{340} = \frac{26}{17}$. Если $d = 1, 2, \ldots 6$, имеем

$$\left(\frac{2}{1}\right)^3 > \left(\frac{3}{2}\right)^3 > \left(\frac{4}{3}\right)^3 > \left(\frac{5}{4}\right)^3 > \left(\frac{6}{5}\right)^3 > \left(\frac{7}{6}\right)^3 > \frac{26}{17}$$

(каждый раз берём минимально возможное q, чтобы «уместить» как можно больше членов прогрессии). Значит, при всех таких d количество членов прогрессии не превосходит 3. Пусть теперь $d \ge 8$. Так как числа c и d — взаимно простые, а числа $x \cdot \frac{c^k}{d^k}$ при $k = 0, 1, \ldots n - 1$ натуральные, то x должно делиться без остатка на d^{n-1}. В предположении $n \ge 4$ нужно найти в промежутке $340 < x < 520$ такое натуральное число, которое делилось бы нацело на куб натурального числа, большего либо равного 8. Ясно, что такое число только одно, это число 512, и оно соответствует уже построенной нами геометрической прогрессии.

Следовательно, данная в условии задачи геометрическая прогрессия может иметь максимум 4 члена.

Ответ: 4 члена.

Пример 7. Найти все пары натуральных чисел a и b, которые удовлетворяют равенству $\overline{ba} = a^b + 90$ (в левой части стоит число, получаемое дописыванием десятичной записи числа a после десятичной записи числа b).

Решение. При $a = 1$ данное уравнение принимает вид $\overline{b1} = 91$ и имеет решение $b = 9$. Если $b = 1$ и a является k-значным числом, то исходное уравнение преобразуется к виду

$$\overline{1a} = a + 90 \Leftrightarrow 10^k + a = a + 90 \Leftrightarrow 10^k = 90$$

и не имеет решений в целых числах. Далее будем считать, что $a \geq 2$ и $b \geq 2$. Если $a \leq 9$ и $b \leq 9$, то в левой части уравнения стоит двузначное число, откуда следует неравенство $a^b \leq 9$. Ясно, что это неравенство выполняется только для следующих пар чисел: $(a, b) = \{(2, 2); (2, 3); (3, 2)\}$. Проверкой убеждаемся, что ни одна из этих пар не является решением задачи. Если же $a \leq 9$, а b является k-значным числом, где $k \geq 2$, то справедлива следующая оценка:

$$a^b \geq 2^{10^{k-1}} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ba}.$$

Следовательно, в этом случае исходное уравнение решений не имеет.

Пусть теперь $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия: $b = 2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b является k-значным числом, а a является $(m + 1)$-значным числом, где $m \geq 1$, имеем:
если $k > 1$, то

$$a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m(k+2)} = 10^{(m+m)+mk} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

если $k = 1$, $b \geq 3$, то

$$a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

если $k = 1$, $b = 2$, $m \geq 2$, то

$$a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

если $k = 1$, $b = 2$, $m = 1$, $a \geq 32$, то

$$a^b \geq 32^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ba}.$$

Конечным перебором для всех пар a и b, для которых $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$, получаем, что уравнению удовлетворяет всего одна пара $a = 11$ и $b = 2$. Таким образом, ответом к задаче будут служить две пары чисел $(a, b) = \{(11, 2); (1, 9)\}$.

Ответ: $a = 11$, $b = 2$; $a = 1$, $b = 9$.

Пример 8. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все полученные 54 результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \ldots + 7)(13 + \ldots + 21) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, то число нечётных слагаемых в ней — нечётно, причём это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого её слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечётной, а значит, не будет равна нулю. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получается при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7) \times$$
$$\times (-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21) =$$
$$= 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, наименьшая по модулю сумма, которую можно получить исходя из условий задачи, равна 1, а наибольшая сумма равна 4131.

Ответ: 1 и 4131.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ Здесь ($1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $n! = 1 \cdot 2\ \ldots \cdot n$).

2. Найти все натуральные n, для которых уравнение

$$n^2 + 4 = (2n + 3)^x$$

имеет хотя бы один рациональный корень x.

3. Рассматриваются наборы различных целых чисел, произведение которых равно 180. Для каждого такого набора рассматриваются арифметические прогрессии, состоящие из чисел этого набора. Из какого наибольшего количества членов может состоять такая арифметическая прогрессия?

4. Набор состоит из 41 натурального числа, среди которых есть числа 3, 5 и 7. Среднее арифметическое любых 34 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 17 единиц?

б) Меньше 17 единиц?

в) Доказать, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 35.

5. Найти все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

6. Какое наибольшее число членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой — различные натуральные числа, большие 210 и меньшие 350?

7. Перед каждым из чисел 22, 23, ..., 26 и 50, 51, ..., 60 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

§ 13. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

В данной главе рассматриваются задачи на целые числа, предлагавшиеся в разные годы на олимпиадах «Ломоносов» и «Покори Воробьевы горы» по математике, а также на Московской математической олимпиаде.

Пример 1. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n при данных условиях.

Решение. Диагональ прямоугольника не может проходить через узлы клеток, лежащие внутри прямоугольника.

Действительно, если бы это было не так, то существовал бы прямоугольник меньшего размера $m_1 \times n_1$ клеток, причём $m = km_1$ и $n = kn_1$ (k, m_1 и n_1 — натуральные числа). Тогда числа m и n не являлись бы взаимно простыми, что противоречит условию задачи.

Далее диагональ прямоугольника, пересекая каждую новую клетку, пересекает либо вертикальную, либо горизонтальную линию клетчатой бумаги, находящуюся внутри этого прямоугольника. Это значит, что число пересекаемых ею клеток, уменьшенное на единицу (не рассматривается клетка, прилегающая к той вершине прямоугольника, из которой выходит данная диагональ), равно суммарному количеству вертикальных и горизонтальных линий, лежащих внутри прямоугольника, т.е. $(m - 1) + (n - 1)$. Итак, число пересекаемых клеток равно $m + n - 1$, и из условия задачи получаем уравнение

$$mn - 116 = m + n - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(n - 1) = 116.$$

Поскольку $m < n$, пара $(m - 1,\ n - 1)$ равна либо $(1,116)$, либо $(2,58)$, либо $(4,29)$. Первые две пары приводят к ответу, в последнем случае получаются числа $m = 5$ и $n = 30$, не являющиеся взаимно простыми.

Ответ: $\{(2,117); (3,59)\}$.

Пример 2. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 9 раз?

Решение. Пусть d — наибольший общий делитель чисел m и n, тогда $9d$ — наибольший общий делитель чисел $m + 6$ и n. Так как d — делитель m и $m + 6$, то d — делитель разности этих чисел, т.е. делитель числа 6. Следовательно, $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ или $d = 6$. Так как числа $m + 6$ и n делятся на 9, то числа m и n делятся на 3, следовательно, d делится на 3. Таким образом, $d = 3$ или $d = 6$. Осталось проверить, что оба случая имеют место. Если $d = 3$, то, например, $m = 21$, $n = 27$; если $d = 6$, то $m = 48$, $n = 54$.

Ответ: 3 или 6.

Пример 3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найти все возможные значения этого произведения.

Решение. Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ ($k \geq 2$) — произведение нескольких различных простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, удовлетворяющих условию задачи. Поскольку по условию N кратно чётному числу $p_2 - 1$, оно само чётно и $p_1 = 2$. Число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ имеет единственный делитель p_1 из интервала $(1, p_2)$, но $p_2 - 1$ также принадлежит этому интервалу, значит, $p_2 - 1 = p_1 = 2$. Таким образом, $p_2 = 3$, а N может принимать значение $2 \cdot 3 = 6$.

Если $k \geq 3$, то по условию задачи $p_3 - 1$, принадлежащее интервалу (p_2, p_3), является делителем числа N. Этому интервалу может принадлежать единственный делитель N — число $p_1 \cdot p_2 = 6$. Следовательно, $p_3 = p_1 \cdot p_2 + 1 = 7$. Число $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ удовлетворяет условию задачи.

Если $k \geq 4$, то по условию чётное число $p_4 - 1$, принадлежащее интервалу (p_3, p_4), также является делителем N. Из чётных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \cdot p_3 = 14$ и $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 42$. Число $15 = p_1 \cdot p_3 + 1$ является составным, значит, $p_4 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + 1 = 43$. Число $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$ удовлетворяет условию задачи.

Если $k \geq 5$, то по условию чётное число $p_5 - 1$, принадлежащее интервалу (p_4, p_5), также должно являться делителем N. Из чётных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \cdot p_4 = 86$, $p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 258$, $p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 = 602$ и $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 1806$. Каждое из чисел 87, 259, 603, 1807 является составным. Значит, у числа N не может быть более четырёх различных простых делителей. Таким образом, ответом к задаче будут служить числа 6, 42 и 1806.

Ответ: 6, 42, 1806.

Пример 4. Найти наименьшее натуральное n, для которого число n^n не является делителем числа 2008!, где $2008! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008$.

Решение. Если $n^2 \leq 2008$, то 2008! будет делиться на n^n (так как числа n, $2n$, ..., $(n-1)n$ и n^2 содержатся среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008). Поскольку верны неравенства

$44^2 < 2008 < 45^2$, то достаточно проверить делимость 2008! на n^n при $n \geq 45$.

1. 2008! делится на $45^{45} = 5^{45} \cdot 3^{90}$, так как среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 заведомо найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3.

2. 2008! делится на $46^{46} = 2^{46} \cdot 23^{46}$, так как среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 заведомо найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23, поскольку $23 \cdot 46 = 1058 < 2008$.

3. 2008! не делится на 47^{47}, так как число 47 простое, и поэтому среди чисел 1, 2, ... 2007, 2008 есть лишь 42 числа, кратных 47. Действительно, $47 \cdot 42 = 1974 < 2008 < 2021 = 43 \cdot 47$.

Замечание. Легко заметить, что для произвольного натурального x наименьшим натуральным n, для которого $x!$ не делится на n^n, является наименьшее простое число p, большее $\sqrt{x}$.

Ответ: 47.

Пример 5. Для каждого простого p найти наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

Решение. Если $(p^2)!$ кратно $(p!)^n$, $n \in N$, то $n \leq p + 1$, так как p входит в разложение числа $p!$ на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа $(p!)^n$ — в степени n), а в разложение числа $(p^2)!$ — в степени $p + 1$. Докажем, что $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Запишем p^2 различных элементов в виде таблицы $p \times p$. Две такие таблицы назовем эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк. Скажем, что все таблицы, эквивалентные данной, образуют класс эквивалентности. Так как m объектов можно переставить $m!$ способами, то всего таблиц $(p^2)!$, количество перестановок в каждой строке — $p!$, количество таблиц, которые можно получить, переставляя элементы внутри строк, — $(p!)^p$, количество таблиц в одном классе эквивалентности — $(p!)^p \cdot p! = (p!)^{p+1}$. Так как общее число таблиц есть произведение количества таблиц в одном классе эквивалентности на число таких классов, то $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Ответ: $p + 1$.

Пример 6. Доказать, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.

Решение. Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_к = 10^к d - d$. Пусть l — количество знаков в десятичной записи числа d ($l = [\lg d] + 1$). Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k > l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идёт десятичная запись числа $d - 1$, затем — серия девяток, и наконец — десятичная запись числа $10^l - d$. Таким образом, при $k > l$ число n_k можно получить из числа $n_{к+1}$ путем вычеркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

Пример 7. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Существуют ли пять идущих подряд её членов, делящихся на 2005?

Решение. Докажем, что при $n = 4k$; $k \in N$, член последовательности с номером n не делится на 5. Действительно, $a_{4k} = 1 + 16^k + 81^k + 256^k + 625^k$. Числа 16, 81, 256 являются числами вида $5m + 1$; $m \in N$. Остаток при делении чисел вида $(5m + 1)^k$ на 5 равен 1, что несложно получить, раскрыв, например, скобки в выражении $(5m + 1)^k$. Число 625^k делится, очевидно, на 5 без остатка. Следовательно, число a_{4k} дает при делении на 5 остаток 4, т.е. не делится на 5 нацело. Таким образом, не существуют пять идущих подряд членов последовательности a_n, делящихся на 2005.

Замечание. Согласно малой теореме Ферма $a^{p-1} -1$ делится на p для любого простого числа p и любого натурального числа a, не кратного p. При $p = 5$ и $a = 2^k, 3^k, 4^k$; $k \in N$ получаем, что $a^4 - 1$ делится на 5, т.е. a^4 даёт остаток 1 при делении на 5.

Ответ: Нет.

Пример 8. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК $(a, b) = 60$ и НОК $(a, c) = 270$. Найти НОК (b, c).

Решение. Разложим числа 60 и 270 на простые множители. Имеем:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Пусть теперь

$$a = 2^{p_1} \cdot 3^{p_2} \cdot 5^{p_3},\ \ b = 2^{q_1} \cdot 3^{q_2} \cdot 5^{q_3},\ \ c = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3},$$

где p_i, q_i, r_i — целые неотрицательные числа; $i = 1, 2, 3$. Выполнение условий НОК $(a, b) = 60$ и НОК $(a, c) = 270$ означает, что $\max\{p_1, q_1\} = 2$ и $\max\{p_1, r_1\} = 1$. Следовательно, $q_1 = 2$, $p_1 = \{0, 1\}$ и $r_1 = \{0, 1\}$, причём p_1 и r_1 одновременно не равны нулю. Во всех этих случаях $\max\{q_1, r_1\} = 2$.

Аналогично $\max\{p_2, q_2\} = 1$ и $\max\{p_2, r_2\} = 3$. Значит, $r_2 = 3$, $p_2 = \{0, 1\}$ и $q_2 = \{0, 1\}$, причём p_2 и q_2 одновременно не равны нулю. Отсюда следует, что $\max\{q_2, r_2\} = 3$. И, наконец, $\max\{p_3, q_3\} = 1$ и $\max\{p_3, r_3\} = 1$. Здесь существуют две возможности: $\max\{q_3, r_3\} = 1$ или $\max\{q_3, r_3\} = 0$ (например, если $p_3 = 1$, $q_3 = r_3 = 0$). Таким образом,

$$\text{НОК}(b, c) = 2^{\max\{q_1, r_1\}} \cdot 3^{\max\{q_2, r_2\}} \cdot 5^{\max\{q_3, r_3\}} =$$

$$= 540 \text{ или } 108.$$

Ответ: 540, 108.

Пример 9. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найти все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

Решение. Пусть b_1 и q — первый член и знаменатель данной геометрической прогрессии, b_k — натуральное число, являющееся k-м членом этой прогрессии. Согласно условию задачи существуют такие натуральные числа n, m и k ($n \neq m$), что имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 54 = b_1 \cdot q^{n-1} \\ 128 = b_1 \cdot q^{m-1} \\ b_k = b_1 \cdot q^{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{54}{128} = q^{n-m} \\ \dfrac{54}{b_k} = q^{n-k} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{54}{128}\right)^{n-k} = \left(\frac{54}{b_k}\right)^{n-m}.$$

Так как $54 = 2 \cdot 3^3$, а $128 = 2^7$, последнее уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{3^{3(n-k)}}{2^{6(n-k)}} = \frac{3^{3(n-m)} \cdot 2^{n-m}}{b_k^{n-m}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_k^{n-m} = 2^{7n-m-6k} \cdot 3^{3k-3m}.$$

Отсюда следует, что, во-первых, существуют такие целые неотрицательные числа x и y, что $b_k = 2^x \cdot 3^y$, и, во-вторых, выполняется следующее соотношение:

$$2^{x(n-m)} \cdot 3^{y(n-m)} = 2^{7n-m-6k} \cdot 3^{3k-3m} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(n-m) = 7n - m - 6k \\ y(n-m) = 3k - 3m. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение полученной системы на 2 и сложим его с первым уравнением. Имеем:

$$(x + 2y)(n - m) = 7(n - m) \Leftrightarrow x + 2y = 7$$

(так как $n \neq m$).

Полученное уравнение имеет четыре пары решений в целых неотрицательных числах: это $(x, y) = \{(1, 3); (3, 2); (5, 1); (7, 0)\}$. Этим решениям будут соответствовать значения b_k, равные 54, 72, 96 и 128. Таким образом, только эти четыре натуральных числа могут встретиться в данной геометрической прогрессии.

Ответ: 54, 72, 96, 128.

Задачи для самостоятельного решения

1. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 124 его клетки. Найти все возможные значения m и n при данных условиях.

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК $(a, b) = 90$ и НОК $(a, c) = 120$. Найти НОК (b, c).

3. Числа 24 и 2187 являются членами геометрической прогрессии. Найти все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

4. В течение четверти учитель ставил Мише оценки «1», «2», «3», «4» и «5», при этом среднее арифметическое всех его оценок оказалось равным в точности 3,5. Тогда учитель заменил одну оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Миши увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены: 1) одной оценки «4»; 2) всех его оценок «4».

5. Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right]=n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

6. Найти все пары натуральных чисел (x, y) таких, что числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся без остатка на $x^2 + y^2$.

7. Решить в натуральных числах уравнение

$$(1 + n^k)^l = 1 + n^m.$$

8. Дана геометрическая прогрессия. Известно, что ее первый, десятый и тридцатый члены — натуральные числа. Верно ли, что её двадцатый член — натуральное число?

9. Решить в целых числах уравнение $x^4 - 2y^2 = 1$.

10. В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

11. Существует ли такой прямоугольный треугольник, что увеличенные на 1 оба его катета и гипотенуза являются, соответственно, катетами и гипотенузой другого прямоугольного треугольника? Тот же вопрос, если все три стороны исходного треугольника не увеличивать, а изменять на 1, т.е. увеличивать или уменьшать — каждую по своему усмотрению.

12. При каких значениях параметра a каждый из квадратных трёхчленов $x^2 + ax + 2008$ и $x^2 + 2008x + a$ имеет хотя бы один корень, причем все их корни — целые числа?

13. Известно, что наибольший общий делитель (НОД) двух натуральных чисел m и n равен единице. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел $m + 2000n$ и $n + 2000m$?

14. Существует ли 2005 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число?

15. Натуральное число n таково, что числа $3n + 1$ и $10n + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Доказать, что число $29n + 11$ составное.

16. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 + x + 1$ является натуральной степенью y, а $y^2 + y + 1$ — натуральной степенью x?

17. Найти все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

18. Петр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Петр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

19. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящие 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011?

20. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее в свою очередь меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Преобразование тригонометрических выражений

1.2. Доказательство тождеств и упрощение выражений

7. $1+\text{ctg}^2 2\alpha$. **8.** 1. **9.** 0. **10.** $\frac{1}{\sin\alpha}$. **11.** 0. **12.** $\sin x$. **13.** -1.

1.3. Задачи на вычисление в тригонометрии

1. 2. **2.** 1. **3.** 5. **4.** -6. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **6.** $\frac{24}{7}$. **7.** $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. **8.** $\frac{\sqrt{15}}{7}$. **9.** $\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$. **10.** $-0{,}5$. **11.** $\frac{2}{11}$. **12.** $\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$. **13.** $-\frac{31}{17}$. **14.** $\frac{120}{119}$. **15.** $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\text{tg}\,2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

§ 2. Основные методы решения тригонометрических уравнений

2.2. Сведение тригонометрического уравнения к квадратному

1. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$. **2.** $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$; $n\in Z$. **3.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$. **4.** $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-7}{10}+2\pi n$; $n\in Z$. **5.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $n\in Z$. **6.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$. **7.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $n\in Z$. **8.** $x=\frac{\pi n}{3}$; $n\in Z$. **9.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$; $n\in Z$. **10.** $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$.

2.3. Разложение на множители

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi n$; $n\in Z$. **2.** $x=\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$. **3.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pi n$; $n\in Z$. **4.** $x=\frac{\pi n}{3}$,

$x=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n;\ n\in Z$. **5.** $x=\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ n\in Z$. **6.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\frac{\pi n}{2};\ n\in Z$. **7.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{2\pi n}{5},\ x=\frac{2\pi n}{9}$; $n\in Z$. **8.** $x=\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi n}{2},\ x=\frac{10\pi n}{3};\ n\in Z$. **9.** $x=\frac{\pi n}{2};\ n\in Z$. **10.** $x=\frac{\pi}{2}+$ $+\pi n,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5};\ n\in Z$. **11.** $x=2\pi+4\pi n,\ x=(-1)^n\cdot 4\arcsin\frac{3\sqrt{3}-5}{4}+4\pi n$ $x=(-1)^n\cdot 4\arcsin\frac{3\sqrt{3}-5}{4}+4\pi n;\ n\in Z$. **12.** $x=\frac{\pi n}{5},\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ n\in Z$, $n\geq 0$. **13.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3};\ n\in Z$. **14.** $x=\pi n;\ n\in Z$. **15.** $x=\frac{\pi n}{3};\ n\in Z$. **16.** $x=\frac{\pi n}{3};\ n\in Z$. **17.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}+2\pi n;\ n\in Z$.

2.4. Понижение степени

1. $x=\frac{(-1)^n\arcsin(\sqrt{3}-1)}{2}+\frac{\pi n}{2};\ n\in Z$. **2.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in Z$. **3.** $x=\pi+2\pi n;\ n\in Z$. **4.** $x=\frac{\pi n}{3};\ n\in Z$. **5.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n\in Z$. **6.** $x=\frac{\pi}{56}+\frac{\pi n}{28},\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6};\ n\in Z$. **7.** $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5};\ n\in Z$. **8.** $x=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$.

2.5. Введение дополнительного угла

1. $x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\ n\in Z$. **2.** $x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z$. **3.** $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ n\in Z$. **4.** $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ x=-\frac{7\pi}{12}+$ $+2\pi n;\ n\in Z$. **5.** $x=2\pi n,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z$. **6.** $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{3}\pm$ $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}}{4}+2\pi n;\ n\in Z$. **7.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ x=\frac{13\pi}{12}+2\pi n$; $n\in Z$. **8.** $a\in[-\sqrt{13},\sqrt{13}]$. **9.** $x=\arccos\frac{7}{\sqrt{53}}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z$.

§ 3. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

3.1. Отбор корней при помощи тригонометрического неравенства

1. $x=\pi n$; $n\in Z$. **2.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $n\in Z$. **3.** $x=\operatorname{arctg}5+2\pi n$; $n\in Z$. **4.** $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $n\in Z$. **5.** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $n\in Z$. **6.** $x=\frac{5\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$. **7.** $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $n\in Z$. **8.** $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $n\in Z$. **9.** $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$; $n\in Z$. **10.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $n\in Z$. **11.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $n\in Z$. **12.** $x=\pi+$ $+2\pi n$, $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $n\in Z$. **13.** $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $x=-\frac{11\pi}{12}+2\pi n$; $n\in Z$. **14.** $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $n\in Z$. **15.** $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$; $n\in Z$.

3.2. Отбор корней в промежуток на числовой прямой

1. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n; n\in Z$. Отрезку принадлежат корни $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$. **2.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in Z$. Отрезку принадлежат корни $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{6}$. **3.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n; n\in Z$. Отрезку принадлежат корни $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi$, $\frac{11\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+3\pi$.

4. $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi n, x=\frac{\pi}{4}+\pi n; n\in Z$. Отрезку принадлежат корни $-\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. **5.** $x=\pi+2\pi n, x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$; $n\in Z$. Отрезку принадлежат корни 3π, $3\pi+\arcsin\frac{1}{4}$. **6.** $x=\pi$, $x=\frac{7\pi}{6}$. **7.** $x=\frac{47}{24}$, $x=\frac{55}{24}$, $x=\frac{71}{24}$. **8.** $x=-\frac{11\pi}{12}$, $x=-\frac{7\pi}{12}$. **9.** $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{6}$. **10.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in Z$. Сумма корней равна $\frac{5\pi}{6}$. **11.** $x=-\frac{19\pi}{200}$, $x=\frac{131\pi}{200}$. **12.** $x=5\pi$. **13.** $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=2\pi$, $x=2\pi-\arccos\frac{2}{5}$.

3.3. Нахождение общих корней двух тригонометрических уравнений

1. $x = \pi n;\ n \in Z$. **2.** $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. **3.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. **4.** $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n;\ n \in Z$. **5.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$. **6.** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. **7.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$. **8.** $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. **9.** $x = \pi + 2\pi n,\ x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z$. **10.** $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. **11.** $x = 0,\ x = \frac{3\pi}{4}$. **12.** $x = (-1)^n\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$.

§ 4. Решение систем тригонометрических уравнений

1. $\left\{\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{25}{9}\right)\right\};\quad n \in Z$. **2.** $\left\{\left((-1)^n\arcsin\frac{1}{4} + \pi n, -\frac{1}{4}\right)\right\};\quad n \in Z$. **3.** $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -4\right)\right\};\quad n \in Z$. **4.** $\left\{\left(1, (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n - 1\right)\right\};\quad n \in Z$. **5.** $\left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, 2\pi k\right); \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, 2\pi k\right)\right\};\quad n, k \in Z$. **6.** $x = 1 + 2\pi n;\ n \in Z$.

7. $\left\{\left(\arcsin\frac{37}{40} + 2\pi n, \arccos\frac{13}{20} + 2\pi k\right);\right.$

$\left.\left(\pi - \arcsin\frac{37}{40} + 2\pi n, -\arccos\frac{13}{20} + 2\pi k\right)\right\};\quad n, k \in Z$.

8. $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k\right)\right\};\ n, k \in Z$.

9. $\left\{\left(\frac{\pi}{6}, -\pi\right); \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right); \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)\right\}$. **10.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\quad x = \pi + 2\pi n,\quad n \in Z,\ n \geq 0;\ y = \log_3 x$. **11.** $\left\{\left(\frac{3\pi}{4} + \pi n, -\frac{5\pi}{4} + \pi n\right)\right\};\ n \in Z$.

§ 5. Решение тригонометрических неравенств

1. $x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right];\ n \in Z$. **2.** $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$. **3.** $x \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n\right);\ n \in Z$. **4.** $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right];\ n \in Z$. **5.** $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4};\quad n \in Z$. **6.** $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right);\ n \in Z$.

7. $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$; $n \in Z$. **8.** $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right) \cup \left[\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; $n \in Z$. **9.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$. **10.** $x \in [-13, -4\pi) \cup \left(-4\pi, -\frac{11\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{7\pi}{3}, -2\pi\right) \cup \left(-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, -1\right]$.

ГЛАВА II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. Нахождение углов

1.1. Угол между прямыми

1. $30°$. **2.** $60°$. **3.** $\arccos\frac{3}{7}$. **4.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.** $60°$. **6.** $\arccos\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}}$. **7.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

1.2. Угол между прямой и плоскостью

1. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **2.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{7} + \operatorname{arctg}\frac{2}{7}$. **3.** $\arcsin\frac{5}{2\sqrt{37}}$. **4.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{2\sqrt{2}}$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **6.** $\arcsin\frac{2}{\sqrt{15}}$.

1.3. Угол между плоскостями

1. $\arccos\frac{7}{11}$. **2.** $30°$. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **4.** $45°$. **5.** $90°$. **6.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** $\arcsin\frac{3}{5}$.

§ 2. Вычисление расстояний

1. $\frac{\sqrt{91}}{2}$. **2.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **3.** $\frac{12}{5}$. **4.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **5.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

§ 3. Метод координат

1. $\arccos\frac{1}{18}$. **2.** $\arccos\frac{7}{3\sqrt{22}}$. **3.** $60/19$. **4.** $\frac{6}{\sqrt{46}}$. **5.** $\arccos\frac{8}{9}$. **6.** $\arcsin\frac{18}{13\sqrt{17}}$. **7.** $\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{13}}$.

§ 4. Сечения

1. 24. **2.** $\sqrt{13}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **4.** $\frac{33\pi}{4}$. **5.** $\frac{5\sqrt{2}}{16}$. **6.** $2\sqrt{132}$. **7.** $\sqrt{133}$.

§ 5. Другие задачи

1. $\sqrt{6}$. **2.** $\frac{11}{\sqrt{170}}$. **3.** 3. **4.** $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$. **5.** 28. **6.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **7.** 4π. **8.** $\sqrt{6}$. **9.** $\frac{45\sqrt{11}}{4}$.

ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Метод интервалов для решения неравенств

1. $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 6)$. **2.** $x \in [-7, -1] \cup [3, 4]$. **3.** $x \in (-\infty, -6) \cup (0, 1)$. **4.** $x \in (-8, -3) \cup (4, +\infty)$. **5.** $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 2) \cup [4, +\infty)$. **6.** $x \in [-3, 0) \cup (5, 8]$. **7.** $x \in [-2, -1) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$. **8.** $x \in [-4, 0) \cup (0, 1]$. **9.** $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$. **10.** $x = 0$. **11.** $x \in (-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6})$. **12.** $x = 1$. **13.** $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. **14.** $x = -4$. **15.** $x \in (3, +\infty)$. **16.** $x = 2$. **17.** $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty)$. **18.** 6. **19.** $x \in [-5, 1] \cup (2, 3)$. **20.** -6. **21.** $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right)$. **22.** $-0{,}3$. **23.** $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{5}\right] \cup \left(2, \frac{13}{5}\right]$. **24.** $x \in (-\infty, -9) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

§ 2. Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах

1. $x = -3$, $x = -1$. **2.** $x = 2$, $x = 3$. **3.** $x = \pm 3$. **4.** $x \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. **5.** $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty)$. **6.** $x \in (4, 6)$. **7.** $x = 4$. **8.** $x = -3$. **9.** $x = -1$. **10.** $x = -25$, $x = 3$. **11.** $x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{15}{2}\right]$. **12.** $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **13.** $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. **14.** $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$. **15.** $x \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$. **16.** $x \in [-2, -1) \cup (-1, +\infty)$. **17.** $x \in (-\infty, -199) \cup (-66, 200)$. **18.** $x \in (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$. **19.** $x \in (-\infty, 1) \cup$

$\cup$ (3, $+\infty$). **20.** $x \in (-\infty, 2) \cup \{3\} \cup (4, +\infty)$. **21.** $x = -16$, $x = 18$. **22.** $x = 0$, $x = \pm1$, $x = \pm2$, $x = \pm3$. **23.** $x = \frac{11}{3}$, $x = -\frac{17}{5}$. **24.** $x \in [1, 2] \cup \{5\}$. **25.** $x \in [-6, -1] \cup [0, +\infty)$. **26.** $x \in (-2, 2) \cup (2, 3) \cup (6, +\infty)$. **27.** $x \in (-\infty, -4) \cup \{0\} \cup \{2\} \cup (4, +\infty)$.

§ 3. Иррациональные уравнения и неравенства

1. $x = -1$. **2.** $x = 4$. **3.** $x = 1$. **4.** $x = -1$. **5.** $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

6. $x \in \left[\frac{10}{3}, \frac{15}{2}\right]$. **7.** $x \in [-7, -2) \cup (4, +\infty)$. **8.** $x \in [2, +\infty)$. **9.** $x \in (3, 5]$.

10. $x \in \left(-\infty, -\frac{17}{2}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{185}-9}{2}, +\infty\right)$. **11.** $x \in [1, 2)$. **12.** $x \in \left[\frac{20}{9}, 4\right) \cup (5, +\infty)$.

13. $x \in [4, +\infty)$. **14.** $x \in (-\infty, 1] \cup \{4\}$. **15.** $x = 3$. **16.** $x = -1$. **17.** $x = \frac{6 \pm 5\sqrt{3}}{2}$. **18.** $x = 6$. **19.** $x = 3$. **20.** $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. **21.** $x \in \left[-\frac{1+2\sqrt{29}}{5}, 2\right]$. **22.** $x = 1$. **23.** $x \in [5, +\infty)$. **24.** $x \in (-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$.

25. $x = 3$, $x = \pm1$. **26.** $x = -1$, $x = 4$. **27.** $x \in \{-2\} \cup [1, 3]$. **28.** $x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

§ 4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

4.1. Основные формулы и решение простейших уравнений и неравенств.
4.2. Преобразование суммы и разности логарифмов

1. $x = 8{,}5$. **2.** $x = 1{,}5$. **3.** $x = 1 - \sqrt{2}$. **4.** 2. **5.** $x = \frac{7}{5}$. **6.** $x = -2 - \sqrt{5}$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$. **7.** $x = 4$. **8.** $x \in [-1, 4 - 2\sqrt{6})$. **9.** $x \in (5, 2 + \sqrt{17})$. **10.** $x \in \left(1 - \sqrt{2}, \frac{2}{3}\right) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$. **11.** $x \in (-2, 0) \cup (1, 3)$. **12.** $x \in (-\sqrt{10}, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \sqrt{10})$. **13.** $x \in (2, 1 + \sqrt{3})$. **14.** $x \in [-3, 2) \cup (5, 7]$. **15.** $x \in \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$. **16.** $x \in [-20, -9) \cup (1, 2]$.

4.3. Метод замены переменной

1. $x = 3$. **2.** $x=\frac{1}{2}$. **3.** $x=-1\pm\sqrt{2}$. **4.** $x = 0$. **5.** $x \in \left(\log_9\frac{11}{3},+\infty\right)$.
6. $x\in(-\sqrt{7},-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\sqrt{7})$. **7.** $x\in\left(1,\log_{\frac{7}{3}}3\right)$. **8.** $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.
9. $x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$. **10.** $x \in \left(-\infty,\log_3\frac{1}{2}\right]\cup\left[\log_3\frac{3}{5},\log_3\frac{5}{3}\right)$.
11. $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. **12.** $x \in (2-\log_2^2 3,2]$. **13.** $x = 2$, $x = 4$. **14.** $x=16^{-\frac{1}{27}}$, $x=2^{\frac{1}{3}}$. **15.** $-\frac{17}{6}$. **16.** $x\in\left(2,\frac{19}{9}\right)\cup(3,2+\sqrt{3})$. **17.** $x\in\left[\frac{1}{8},1\right)\cup(1,16]\cup$ $\cup(64,+\infty)$. **18.** $x \in (0, \sqrt[6]{2} - 1] \cup [63, +\infty)$. **19.** $x \in (\log_2 49 - 4, \log_2 7)$.
20. $x \in (0, \log_2 3]$. **21.** $x \in (\log_5 626-4, \log_5 26)$. **22.** $x \in \in\left[\frac{1}{4},1\right)\cup$ $\cup[\sqrt{2},+\infty)$. **23.** $x = -1$. **24.** $x\in\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(1,+\infty)$.

4.4. Расщепление неравенств

1. $x \in (-\infty, -6] \cup (-3, -2)$. **2.** $x\in\left(0,\frac{23}{35}\right)$. **3.** $x \in (1, 4]$. **4.** $x \in$ $\in (1, 2) \cup (2, 3) \cup [7, +\infty)$. **5.** $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$. **6.** $x \in$ $\in(0,1)\cup\left(\sqrt{6}-1,\frac{5}{2}\right)$. **7.** $x\in\left[\frac{2}{9},\frac{1}{2}\right)$. **8.** $x\in\left[\frac{4}{5},1\right)$. **9.** $x \in (-12, -3) \cup$ $\cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (4, 7) \cup (7, +\infty)$. **10.** $x \in [-10, -9) \cup (-9, -7) \cup$ $\cup (4, \sqrt{17})$. **11.** $x\in\left[\log_2\frac{1}{3},2\right)\cup\left(2,\log_2\frac{13}{3}\right)$. **12.** $x \in [-1, 2) \cup (5, 6] \cup$ $\cup (8, +\infty)$. **13.** $x \in \left(3,\frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2},\frac{19}{5}\right] \cup (4, 5)$. **14.** $x \in (-\infty, -7] \cup$ $\cup (-4, -3) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$. **15.** $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)$. **16.** $x \in$ $\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. **17.** $x \in\left[\frac{13}{50},9+4\sqrt{5}\right)$. **18.** $x \in (-3, -2) \cup (1, 2]$.

4.5. Переход к новому основанию

1. $x=-\frac{31}{8}$, $x = -2$. **2.** 392. **3.** $x=2^{\pm\sqrt{2}}$. **4.** $x = -2$. **5.** $x \in \{2\} \cup$ $\cup (4, 8)$. **6.** $x\in\left(\log_2\frac{33}{32},1\right)\cup(1,\log_2 17)$. **7.** $x \in [-5, 2)\cup\left(2,\frac{19}{9}\right)$. **8.** $x \in$

$\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup(\sqrt[3]{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. **9.** $x\in(-\infty,-2]\cup[0,\lg 101-2)$. **10.** $x\in[-3,0)$. **11.** $x\in(0,1)\cup(1,2)$.

§ 5. Уравнения и неравенства смешанного типа

1. $x=-\frac{15}{4}$, $x=-3$, $x=-\frac{7}{4}$. **2.** $x\in\left[\log_{\frac{3}{4}}4,\log_{\frac{3}{4}}\sqrt{7}\right)$. **3.** $x=-9$, $x=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$. **4.** $x\in(-\infty,0]$. **5.** $x=3$, $x=\log_2(3-\sqrt{7})$. **6.** $x\in[2,18)$. **7.** $x=\frac{1}{4}$. **8.** $x\in\left(-1,\frac{1}{3}\right]\cup\left[1,\frac{7}{3}\right)$. **9.** $x=\frac{1}{9}$. **10.** $x\in\left[-1,5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-2\right)$.

11. $x\in\left[-2^{\frac{7}{2}},-2^{\frac{3}{8}}\right)\cup\left(2^{\frac{3}{8}},2^{\frac{7}{2}}\right]$. **12.** $x=\frac{1}{7}$, $x=7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}}$. **13.** $x\in(0,1)\cup\left[4,2^{1+\sqrt{3}}\right]$. **14.** $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup[1,2)\cup(3,6]$. **15.** $x\in\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$. **16.** $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(1,2]$. **17.** $x\in\left[\frac{\sqrt{2}-16}{48},-\frac{7}{24}\right)\cup\left(-\frac{1}{6},\frac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.

§ 6. Логарифмический метод интервалов

1. $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$. **2.** $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2-\sqrt{15})\cup[6,+\infty)$. **3.** $x\in(1,+\infty)$. **4.** $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

§ 7. Системы алгебраических уравнений и неравенств

1. $\left\{(4,1);\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)\right\}$. **2.** $\left\{(-2,2);\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right);\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right);(6,2)\right\}$.

3. $\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. **4.** $\{(1,1)\}$. **5.** $\{(3,2);(-2,-3);(\sqrt{10}+3,\sqrt{10}-3);(3-\sqrt{10},-3-\sqrt{10})\}$. **6.** $\left\{(4,4);(-5,-5);\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2},\frac{1-\sqrt{77}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{77}}{2},\frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)\right\}$. **7.** $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right);\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)\right\}$. **8.** $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$.

9. $\left\{(4,2);\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$. **10.** $\{(9,2)\}$. **11.** $\{(1,1);(-2,4)\}$. **12.** $\{(-1,1)\}$.

13. $\{(28,\ 6);\ (-7,\ -29)\}$. **14.** $\left\{(5,1);-\right)\ \left(\frac{1}{3},\ -\frac{11}{3}\right)\right\}$. **15.** $\{(0,\ -2);\ (2,\ 0)\}$.

16. $\{(\log_2 3,\ \log_3 2)\}$. **17.** $\{(3,\ -2)\}$. **18.** $\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}$. **19.** $\{(81,\ 0)\}$. **20.** $\{(-1,\ 2)\}$.

21. $\left\{\left(\frac{5}{8},4\right)\right\}$. **22.** $x \in \left(0,\frac{1}{3}\right) \cup [1,\ 2-\log_3 2]$. **23.** $x \in \{-3\} \cup \{0\} \cup [1,\ 2)$.

24. $x \in \in \left[\sqrt{6},\frac{5}{2}\right] \cup (3,\ +\infty)$. **25.** $x \in \left(-\frac{7}{2},-1\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

ГЛАВА IV. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Теорема Пифагора и прямоугольные треугольники

1. 202,8. **2.** 60. **3.** $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. **4.** 40. **5.** $R\sin 2\alpha$. **6.** 2 : 5. **7.** 5. **8.** 30° и 60°. **9.** 2,4. **10.** 5/2. **11.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **12.** 2π.

§ 2. Теоремы синусов и косинусов, площадь треугольника

1. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\alpha}$. **2.** $8\sqrt{3}$. **4.** $\sqrt{13}$. **5.** $\frac{15}{4}$ или $\frac{5}{4}$. **6.** $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$. **7.** $2\sqrt{\frac{34}{15}}$. **8.** $\frac{4\sqrt{5}+1}{4}$. **9.** $\frac{3(3\sqrt{3}-4)}{2}$. **10.** $\frac{9\sqrt{3}}{11}$. **11.** 12/5. **12.** $\frac{8}{\sqrt{15}}$. **13.** $3\sqrt{3}\pm 4$. **14.** 2,5 или 3,9. **15.** 35/2. **16.** aR. **17.** $\frac{16}{3}$, центр вне треугольника; или $\frac{8\sqrt{5}}{3}$, центр внутри треугольника. **18.** $\frac{9\sqrt{15}}{4}$. **19.** $S = 1$, $R=\frac{\sqrt{85}}{2}$. **20.** $9(3+\sqrt{3})$. *21.* 9. **22.** 150°. **23.** $6\sqrt{\frac{3}{19}}$. **24.** 11/3. **25.** $\sqrt{2}$

§ 3. Биссектриса и медиана треугольника

1. $\sqrt{14}$. **2.** 60. **3.** 8. **4.** $d\sqrt{2+\frac{d}{c}}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 7. **6.** $\frac{2bc}{b+c}$. **7.** $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. **8.** $\frac{\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}}{4}$. **9.** 6. **10.** $\sqrt{7}$. **11.** $\frac{l+m}{l+k}$. **12.** 17/32. **13.** $\frac{\sqrt{190}}{2}$. **14.** 60°. **15.** $\angle A = \angle C = \operatorname{arctg}3$, $\angle B = \pi - 2\operatorname{arctg}3$; $S=\frac{1}{4}$. **16.** $CD = 2$; $S=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ или $S=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

§ 4. Пропорциональные отрезки и подобие треугольников

1. $2\sqrt{7}$. **2.** 18/7. **3.** 11. **4.** 5 и 5/4. **5.** $\frac{\pi \text{tg}^2\alpha}{4}$. **6.** 18. **7.** $\angle A = \pi - 4\text{arctg}\frac{1}{2}$, $\angle B = \angle C = 2\text{arctg}\frac{1}{2}$. **8.** $AC = \sqrt{45}$, $BD = \sqrt{37}$. **9.** $\sqrt{3}/2$. **10.** 4/5. **11.** n/m. **12.** arctg3. **13.** 1 : 1; 9 : 5. **14.** $4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$. **15.** $R_{\Delta BB_1C} = 4\sqrt{2}$, $R_{\Delta AB_1C_1} = 2$. **16.** 14/5. **17.** $2S$.

§ 5. Леммы о площадях

1. 2,4. **2.** 27/8. **3.** 5/24. **4.** 1/6. **5.** 48/5. **6.** 24. **7.** 9. **8.** 3. **9.** $\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$. **10.** $\angle B = 90°$, $\angle C = 45°$. **11.** 23/90. **12.** 3. **13.** $\frac{189\sqrt{55}}{88}$. **14.** $\sqrt{\frac{3a^2+8c^2}{35}}$. **15.** 189/25. **16.** $\frac{ab}{(a+b)^2}$. **17.** Искомое отношение может быть любым числом, большим 6, но меньшим 15. **18.** 16/9. **19.** 5/4. **20.** 13 или $2\sqrt{67}$. **21.** 2 или 3/5. **22.** 3/16. **23.** 1 или 4/3. **24.** 9/2. **25.** 19/44. **26.** 21/10.

§ 6. Углы в окружностях

1. $\sqrt{2}$. **2.** $\sqrt{pq}$. **3.** 60°, 75°, 45°. **4.** 10. **5.** $\sqrt{ab}$. **6.** $\sqrt{a(a-b)}$. **7.** $\sqrt{pq}$. **8.** $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$. **9.** 18. **10.** 1/2, 3/4. **11.** $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **12.** $\arccos\frac{3}{4}$. **13.** $R^2\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$. **14.** $\frac{ba^2}{c^2}$. **15.** $2\sqrt{3}$. **16.** 5. **17.** 8. **18.** 16/5. **19.** $2R\sin\frac{\alpha}{2}$. **20.** $\frac{qs-t^2}{t}$. **21.** 6. **22.** $\angle ACB = 60°$, $S = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **23.** $\frac{bc}{a}$. **24.** 18. **25.** $\sqrt{6}+1$, $2\sqrt{10}$. **26.** 4/9. **27.** $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$. **28.** 9 : 8.

§ 7. Касание окружностей, касание прямой и окружности

1. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. **2.** 8. **3.** $2\sqrt{21}-9$. **4.** $\sqrt{r^2+(p-a)^2}$. **5.** $\frac{2b+l}{c}$. **6.** $4\sqrt{19}$. **7.** $\sqrt{c^2-ab}$. **8.** 7 или 53/11. **9.** 8/9 или 32/9. **10.** $10\sqrt{5}$. **11.** $\frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.** 65/144. **13.** $\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

§ 8. Длины и площади, связанные с окружностью

1. $\dfrac{a^2(7-4\sqrt{3})(5\pi-6\sqrt{3})}{24}$. 2. $\dfrac{5\pi-6\sqrt{3}}{18}$. 3. $\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}}{3}$. 4. $\dfrac{2\pi}{3}+$ $+4\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 5. $\dfrac{3\pi(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{7\pi-6(\sqrt{3}+1)}$. 6. $\pi-2$. 7. $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{6}$. 8. $\dfrac{3\pi}{2}+1$.

§ 9. Четырехугольники

1. 6. **2.** 1. **3.** 5 и 8. **4.** 25. **5.** 36 или $\sqrt{19}$. **6.** $\sqrt{21}$. **7.** 9,6. **8.** $\dfrac{42\sqrt{51}}{625}a^2$. **9.** 10°, 130°, 130°, 90°. **10.** 9/2. **11.** 672. **12.** $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$. **13.** $2\sqrt{13}$. **14.** $\pi/4$, $\pi/4$, $3\pi/4$ и $3\pi/4$. **15.** $4\sqrt{5}$. **16.** $9\sqrt{2}$. **17.** 3/2. **18.** $S_{ABCD}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}<2\sqrt{15}$. **19.** 150. **20.** 9/2. **21.** $RS = SP = 4\sqrt{13}$. **22.** Тангенсы углов равны $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$; $R=\dfrac{35\sqrt{6}}{6}$.

ГЛАВА V. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Предварительные задачи

1. Понизится на 25%. **2.** 720 рублей. **3.** На 54%. **4.** За 1,5 часа. **5.** 6%. **6.** 2,1%. **7.** 68%. **8.** 20%. **9.** 10 кг. **10.** 5400 и 8100 рублей. **11.** 20%. **12.** 500. **13.** 8, 10, 12 кг. **14.** На 110%. **15.** В 4,5 раза.

§ 2. Формула сложных процентов

1. Через 7 лет. **2.** 12 500 рублей. **3.** 6%. **4.** 4%. **5.** 800 000 рублей. **6.** 10%. **7.** 12%. **8.** 15 лет. **9.** 1 млн 600 тыс. рублей. **10.** $r = 2$. **11.** $S = 36$. **12.** $r = 10$.

§ 3. Исследование функций и графические иллюстрации

1. 15 км/ч. **2.** $n = 5$. **3.** Вдоль шоссе 1000 метров и перпендикулярно шоссе 1500 метров. **4.** 33 и 113 человек. **5.** 90 тыс. рублей в первый проект, 150 тыс. рублей во второй проект; максимальная общая прибыль 435 тыс. рублей. **6.** 28 000 км. **7.** 37 и 39. **8.** 4000 или 8000.

§ 4. Задачи на оптимизацию

1. 10 кг первого сплава и 5 кг второго сплава. **2.** 12 часов 12 минут. **3.** Два дома на 6 квартир и 12 домов на 10 квартир.

4. 11 000 тыс. рублей и 12 600 тыс. рублей. 5. 2 набора по 500 рублей, 5 наборов по 1800 рублей, 8 наборов по 1500 рублей. 6. 1 путевку первого типа и 16 путевок второго типа. 7. 2 набора первого типа и 14 наборов третьего типа. 8. 8 роз и 13 гвоздик. 9. 15 вагонов. 10. 132 условных единиц.

§ 5. Специфика целых чисел

1. 14 человек. 2. 6 месяцев. 3. 2445 долларов. 4. 375 рублей и 125 рублей. 5. 24 и 80 тонн; $m = 4$.

§ 6. Другие задачи

1. 100 тысяч рублей для D и 10 тысяч рублей для E. 2. 10% и 15%. 3. 749 денежных единиц. 4. 5% и 20%. 5. Одинаково. 6. 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да. 7. 100 миллионов рублей и 50 миллионов рублей. 8. 8 миллионов рублей. 9. 2 216 000 рублей. 10. Утверждения 2 и 4 верны всегда, а 1, 3 и 5 — не всегда.

ГЛАВА VI. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

§ 1. Линейные уравнения и системы линейных уравнений

1. Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{a^2+a+1}{a+1}$, $y = -\frac{a}{a+1}$; если $a = 1$, то $x = t$, $y = 1 - t$, где $t \in R$; если $a = -1$, то нет решений. 2. $a \neq -2$. 3. $\sqrt{10}$. 4. 3, −1. 5. $a = \pm 1$, $b = 3$. 6. $b = -a^2 - 1$, $a \in R$ или $a = b = 0$.

§ 2. Исследование квадратного трехчлена с помощью дискриминанта

1. $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$. 2. $2\sqrt{2}$. 3. $\operatorname{arctg}\frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$. 4. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. 5. 50. 6. $-17/48$. 7. $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$. 8. $x = 7n$, $y = 3n$, $z = 2n$; $n \in Z$. 9. $\{(4,-3,0);(2,-1,2)\}$.

§ 3. Теорема Виета

1. -5, $-\frac{5}{13}$. 2. $\left[\frac{1}{100},1\right)\cup\left(\frac{17}{11},\frac{8}{5}\right)\cup\left(\frac{8}{5},\frac{17}{10}\right)$. 3. 4. 4. 4800. 5. $\left(0,2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3},+\infty\right)$. 6. $z = 5$, $\left(x^2+y^2\right)_{\max} = 8$. 7. $7/3$. 8. Корни существуют при $p = 0$ (нулевой корень) и при $p \geq 4$, когда оба корня положительны. 9. $\frac{\pi}{24} + \pi n$, $-\frac{5\pi}{24} + \pi n$; $n \in Z$. 10. $a \in (0,2c]$.

§ 4. Расположение корней квадратного трехчлена

1. $(-\infty,-6]\cup[0,+\infty)$. **2.** $\left(-\sqrt{6},-2\right)\cup(-2,-1)\cup\{4\}$. **3.** Если $a<-\frac{3}{2}$, то $x=\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; если $-\frac{3}{2}\le a<11$, то нет решений; если $a = 11$, то $x = 1$; если $a > 11$, то $x_1 = =\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$, $x_2=\log_5\frac{a-1-\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$. Единственное решение при $a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup$ $\cup\{11\}$. **4.** $\left(-1,-\frac{7}{9}\right]$. **5.** $(-\infty,1]\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$. **6.** $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$. **7.** $a\in[2,+\infty)$.
8. $\left(-\sqrt[3]{36},-3\right]\cup\left(0,\frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$. **9.** $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$. **10.** $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$.
11. $\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{8}}{\sqrt{8}}\right]\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$. **12.** $\left[1,\sqrt{2}\right]$.

§ 5. Применение графических иллюстраций к исследованию квадратного трехчлена

1. $\left(-\infty,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$. **2.** $\left(\frac{1}{2},4+\sqrt{6}\right)$. **3.** $[-4,2]$. **4.** $a = -5$, $f_{\max}(x)=-4$. **5.** $c=-\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{6}$. **6.** $c = 0$, $d = 1$ или $c = -1$, $d = -2$, $f(x)\in[0,2]$. **7.** -17.

§ 6. Ограниченность функции. Нахождение области значений

1. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. **2.** $[-2,2\sqrt{2\sqrt{5}}-6)$. **3.** $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.
4. $[-3,1]$. **5.** 2. **6.** $x=\frac{1}{2}+\log_{16}3$, $y=\frac{1}{2}-\log_{16}3$. **7.** $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.
8. Если $a = 0$, то $x = 0$, $x = -1$; если $a\ne 0$, то $x = 0$. **9.** Если $a < -1$, $a > 0$, то $x_1=y_1=2^{\sqrt{2(a^2+a)}}$, $x_2=y_2= =2^{-\sqrt{2(a^2+a)}}$; если $a = -1$, $a = 0$, то $x = y = 1$; если $-1 < a < 0$, то нет решений. **10.** $1/2$, -2. **11.** $1/16$. **12.** $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$. **13.** -3, 9. **14.** $f_{\min}=2$ при $x = 3$.

§ 7. Другие свойства функций

1. 0, $-2/3$. **2.** 4. **3.** $[0,4]$. **4.** Если $a=1$, то $x=-4$. **5.** 0, $\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **6.** $1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$. **7.** $1/8$. **8.** 2. **9.** -3, -2. **10.** $-1/5$. **11.** ± 1. **12.** $-1/4$. **13.** $-2/3$. **14.** 0 или 1. **15.** -5, 2.

§ 8. Логические задачи с параметром

1. Если $a<0$, то $x\in\left(2a^2+\frac{a}{2},+\infty\right)$; если $a\ge 0$, то $x\in\left(\frac{a^2}{18}+\frac{a}{2},+\infty\right)$. **2.** Если $a=\frac{1}{2}$, то $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$; если $a<-2$, то $x\in(-\infty,a)\cup(-2,+\infty)$; если $a=-2$, то $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$; если $-2<a<-\frac{1}{2}$ или $a>\frac{1}{2}$, то $x\in(-\infty,-2)\cup(a,+\infty)$. **3.** Если $a=0$, то $x>0$; если $a\ne 0$, то $x=\frac{5a+\sqrt{25a^2+4}}{2}$. **4.** Если $a=0$, то $x\in R$; если $0<|a|\le\frac{1}{2}$, то $x=\frac{(-1)^n\arcsin 2a+\pi n}{3a}$; если $|a|\ge\frac{2}{3}$, то $x=\frac{(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3a}+\pi n}{3a}$, $n\in Z$; при других a решений нет. **5.** Если $a=2$, то решений нет; если $\sqrt{2}<a<\sqrt{3}$, то $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$; если $\sqrt{3}<a<2$ и $a>2$, то $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$. **6.** Если $-3<a\le-2$, то одно решение; если $-2<a\le-1$, то два решения; если $-1<a<0$, то три решения. **7.** $\left[\frac{2}{5},\frac{11}{2}\right]$. **8.** Если $a<-1$, то $x\in(0,-a-\sqrt{a^2-1}]\cup[-a+\sqrt{a^2-1},-a+\sqrt{a^2+1}]$; если $a\ge-1$, то $x\in(0,-a+\sqrt{a^2+1}]$. **9.** Если $a<-5$, то нет решений; если $-5\le a\le 1$, то $x\in[0,(a+5)^2]$; если $a>1$, то $x\in[(a-1)^2,(a+5)^2]$. **10.** Если $a<-1$, то $x\in[a,-a]$; если $-1\le a\le-\frac{1}{2}$, то $x\in[-\sqrt{-2a-1},\sqrt{-2a-1}]$; если $a>-\frac{1}{2}$, то нет решений. **11.** $\left[-9,-\frac{1}{4}\right]\cup\{0\}$. **12.** $a\in(-\infty,-2]\cup\{2\}\cup(4,+\infty)$. **13.** Если $a=-1$, то $x\in(2,+\infty)$; если $-1<a\le-\frac{1}{2}$, то $x\in(1,a+2]\cup(1-a,+\infty)$; если $-\frac{1}{2}<a<0$, то $x\in(1,1-a)\cup[a+2,+\infty)$; если $a=0$, то $x\in[2,+\infty)$.

14. $[1,3]\cup\{4\}$. **15.** Если $a>2$, то $x=a-1$ и $x=\frac{a-1}{a-2}$; если $1<a\le 2$, то нет решений.

§ 9. Иллюстрации на координатной плоскости

1. $\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{16}\right)$. **2.** *а*) -8; б) $(-8,-4\sqrt{3})$. **3.** $\left(-\frac{1}{2},2\right)$. **4.** $[-6,1-\sqrt{13}]\cup$ $\cup[\sqrt{13}-1,6]$. **5.** $\left(\frac{6}{5},\frac{5}{4}\right)$. **6.** $(0,18]$. **7.** $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$. **8.** $\left[-1,-\frac{1}{3}\right)\cup\{0\}$. **9.** -2, 0. **10.** $5/2$. **11.** $(-4,\ -1)$. **12.** 2. **13.** 2. **14.** $\{\sqrt[4]{2}\}\cup\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},1\right]$.

§ 10. Метод «ОХА»

1. $[-1,5]$. **2.** $[-1,1]$. **3.** $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$. **4.** Если $a<0$, то $x\in(0,-a)\cup$ $\cup(-a,+\infty)$; если $a=0$, то нет решений, если $a>0$, то $x_1\in$ $\in(-\infty,-3a)\cup\left(-\frac{a}{3},0\right)$. **5.** $\left(-\infty,-\frac{99}{100}\right)\cup\left(-\frac{1}{50},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{100}\right)$. **6.** $\left[-\frac{5}{16},-\frac{1}{16}\right)$.

ГЛАВА VII. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными

1. $\{(21n-1,\ 19n-1)\}$; $n\in Z$. **2.** $\{(100,\ 1);\ (16,\ 20)\}$. **3.** $\{(19n+3,\ 20n+3)\}$; $n\in Z$; сумма равна 66. **4.** 231. **5.** 206. **6.** 3. **7.** 19. **8.** $x=\frac{15\pi}{16}+2\pi n$; $n\in Z$. **9.** $x=\frac{2\pi}{3}+4\pi n$; $n\in Z$.

§ 2. Диофантовы уравнения второго порядка с двумя неизвестными

1. $\{(3,\ 1);\ (-3,\ -1)\}$. **2.** $m=-1$, $n=-14$. **3.** $\{(10,\ 9)\}$. **4.** $\{(12,\ -4);$ $(10,\ -2);\ (4,\ -2);\ (10,\ -6);\ (2,\ -4);\ (4,\ -6)\}$. **5.** $\{(5,\ -4);\ (-13,\ 20);\ (-5,\ 4);$ $(13,\ -20)\}$. **6.** $x=15k^2-6k$, $y=3k-1$; $k\in Z$. **7.** $\{(\frac{\sqrt{5}}{5},\ 2,\ 0);\ (\frac{\sqrt{5}}{5},$ $-1,\ 5)\}$. **9.** Нет. **10.** 30. **11.** $\{(0,\ 0);\ (-2,\ -2);\ (0,\ -1);\ (-2,\ -1)\}$. **12.** $\{(1,\ -2);\ (3,\ 6);\ (0,\ 0);\ (4,\ 4);\ (-2,\ 1);\ (6,\ 3)\}$. **13.** $\{(p+1,\ p^2+p);$ $(2p,\ 2p);\ (p^2+p,\ p+1)\}$. **14.** $x=-7$, $x=-15$. **15.** 74. **16.** $\{(-2,\ -2);$ $(-4,\ 0);\ (0,\ 4)\}$.

§ 3. Другие уравнения в целых числах

1. $x = 2n$, $y = 7n$, $z = 3n$; $n \in Z$. **2.** $x = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$. **3.** $k = 0$, $k = -2$. **4.** $k + n + m = 39$. **5.** {(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 3, 1); (2, 1, 3); (3, 1, 2); (3, 2, 1)}. **6.** {(4, 9); (5, 8)}. **7.** $n = 0$, $n = -5$. **8.** {(1, 1, 1); (−1, −1, 1); (1, −1, −1); (−1, 1, −1)}. **9.** {(2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3)}. **10.** {(2, 3, 4)}. **11.** {(1, 5, 0); (1, −5, 0); (−1, 5, 0); (−1, −5, 0)}. **12.** $n = 13$. **13.** {(24, 8); (54, 2)}. **14.** {(0, 2); (0, −2); (4, 23); (4, −23)}. **15.** $n_{\min} = 2011$, $n_{\max} = 3015$.

§ 4. Текстовые задачи, использующие уравнения в целых числах

1. 189 палочек. **2.** 3 раза. **3.** 366 туристов. **4.** Из 36 деталей. **5.** 4 подберёзовика. **6.** 2 ездки. **7.** 16 875 арбузов. **8.** 255.

§ 5. Оценки переменных. Организация перебора

1. 180 рублей и 240 рублей; $n = 3$. **2.** $l = 15$. **3.** 11 двоек, 7 троек, 10 четверок и 2 пятерки. **4.** 99. **5.** $t = 390$ минут. **6.** 618, 659 и 698. **7.** $\frac{r}{R} = \frac{3}{4}$. **8.** Нет, 21. **9.** 6, 7, ..., 14 деталей. **10.** 6 томов. **11.** 72 часа. **12.** 7 автоматов. **13.** 28 студентов. **14.** 10 маляров и 15 маляров. **15.** 11 лип и 5 берёз. **16.** 27 операций. **17.** 14 человек. **18.** 13 дней; 19 тонн и 31 тонна. **19.** По 2 цеха первого и второго типов, 4 цеха третьего типа. **20.** 3 бригады; в бригаде 3 гусеничных и 5 колёсных тракторов. **21.** 7 самолётов.

§ 6. Неравенства в целых числах. Графические иллюстрации

1. {(−7, 7); (−6, 6)}. **2.** (12; −8). **3.** {(2, 1)}. **4.** $b \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, \sqrt{2})$. **5.** {(0, 0); (−2, 0); (−1, 1)}. **6.** {(2, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 3); (5, 4)}. **7.** {(4, 0); (4, 3); (4, −3)}. **8.** $k = \ldots -14, -13, -12, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. **9.** {(−7, 43); (−7, 44)}. **10.** {(−3, −3, −4)}.

§ 7. Задачи на делимость

2. $a = 8$, $b = 56$, $c = 392$. **7.** Не существует. **9.** 2 и 5. **10.** Да. **11.** Нет. **14.** 36. **15.** 4. **16.** На 7.

§ 8. Текстовые задачи, использующие делимость целых чисел

1. 50 школьников. **2.** 6. **3.** 6 месяцев. **4.** 77 рыб. **5.** 4 раза. **6.** 2445 долларов. **7.** на 741 человек. **8.** $m = 21$. **9.** Продано 3 комплекта; в комплекте 7 синих и 3 красных карандаша. **10.** 900 автомобилей и 855 автомобилей. **11.** 3750 и 1250 рублей. **12.** 2 месяца.

§ 9. Экстремальные задачи в целых числах

1. 6, 7, 8, ..., 14. **2.** 10 500 тыс. руб. и 12 600 тыс. руб. **3.** 37 и 39. **4.** 300 или 600 телевизоров. **5.** 12,5% и 15%. **6.** 132 у.е. **7.** 33 рабочих и 113 рабочих. **8.** 1 путевку первого типа и 16 путевок второго типа. **9.** 2 набора первого типа и 14 наборов третьего типа. **10.** 11 гвоздик и 7 роз. **11.** Два дома на 6 квартир и 12 домов на 10 квартир. **12.** 15 вагонов.

§ 10. Целочисленные прогрессии

1. $S = 139\,300$. **2.** $L = 47$, $M = 56$. **3.** $S = 845$. **4.** $a_{20} = 119$. **5.** $a_{19} = -8$. **6.** $a_1 = 44$. **7.** $q = 2$. **8.** $S = -\frac{21}{5}$ или $S = -\frac{11}{4}$. **9.** $a_8 = 24$. **10.** 8019.

§ 11. Целые числа и квадратный трехчлен

1. $a \geq 224$. **2.** $25(\sqrt{2} - 1) \leq a \leq 3(5\sqrt{2} - 3)$. **3.** $x_1 = 12$, $x_2 = 13$. **4.** $a = -3$, $b = -1$. **5.** $a = -1$, $a = -\frac{3}{5}$, $a = 1$. **6.** $a = 3$, $a = 7$. **7.** $p = -5$, $-\frac{17}{4} \leq p \leq -\frac{7}{2}$. **8.** $a \in \left(-\frac{8}{3}, -1\right)$.

§ 12. Задачи, аналогичные задачам 19 из ЕГЭ

1. $k = 1$, $n = 2$, $m = 3$; $k = n = 3$, $m = 4$; $k = 2$, $n = 1$, $m = 3$. **2.** $n = 1$, $n = 11$. **3.** Из 5 членов. **4.** Да, нет. **5.** $a = 3$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 2$. **6.** 4. **7.** 1 и 4345.

§ 13. Задачи математических олимпиад

1. $\{(2, 125); (5, 32)\}$. **2.** 360, 72. **3.** 24, 108, 486, 2187. **4.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) $3\frac{8}{11}$. **5.** $n = 1, 2, ..., 2002$. **6.** $\{(1, 1)\}$. **7.** $n = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$. **8.** Да. **9.** $\{(1, 0); (-1, 0)\}$. **10.** 218. **11.** 1) Нет; 2) Нет. **12.** $a = -2009$. **13.** $2000^2 - 1$. **14.** Да. **16.** Нет. **17.** $\{(2, 3); (3, 5, 7)\}$. **18.** На 9 лет. **19.** Да. **20.** Да.

Справочное издание

Садовничий Юрий Викторович

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
Профильный уровень
ЗАДАНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.HA34.H08638 с 07.08.2018 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *О. Ю. Казанаева, Н. Е. Жданова*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *Е. Ю. Лысова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 034-2014; 58.11.1 — книги печатные

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа»
Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495) 641-00-30 (многоканальный).