

Все задания части 2

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

И. Н. Сергеев, В. С. Панферов

ЕГЭ 1000

НОВЫЙ

ЗАДАЧ

**С ОТВЕТАМИ
И РЕШЕНИЯМИ**

МАТЕМАТИКА

- Более 1000 заданий
- Задания 13 – 19
- Решения и комментарии
- Ответы

СОЗДАНО **ЕГЭ**
разработчиками

13

14

15

16

17

18

19

ЕГЭ

БАНК ЗАДАНИЙ ЕГЭ

И. Н. Сергеев
В. С. Панферов

1000 ЗАДАЧ

С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

МАТЕМАТИКА

ВСЕ ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

*Более 1000 заданий
Задания 13–19
Решения и комментарии
Ответы*

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2020*

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С32

Сергеев И. Н.

С32 ЕГЭ 2020. Банк заданий. Математика. 1000 задач. Профильный уровень. Все задания части 2. Закрытый сегмент / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. — М. : Издательство «Экзамен», 2020. — 334, [2] с. (Серия «ЕГЭ. Банк заданий»)

ISBN 978-5-377-14988-0

Задания части 2 по математике, не вошедшие в открытый банк заданий.

Сборник содержит более 1000 заданий части 2 Единого государственного экзамена по математике.

Книга позволит подготовиться к любому прототипу из заданий 13–19.

В сборнике приведены ответы ко всем заданиям, а также решения части задач из всех прототипов части 2.

Пособие будет полезно учителям, учащимся старших классов, их родителям, а также методистам и членам приемных комиссий.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

**УДК 372.8:51
ББК 74.262.21**

Формат 60х90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 11,23. Усл. печ. л. 21.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 1438.

ISBN 978-5-377-14988-0

© Сергеев И. Н., Панферов В. С., 2020
© Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2020

Содержание

Подготовительные упражнения.....	4
Задачи для самостоятельного решения.....	19
13	19
14	45
15	70
16	92
17	105
18	116
19	143
Решения с комментариями.....	160
13	160
14	189
15	206
16	220
17	231
18	247
19	285
Ответы	296
Подготовительные упражнения	296
Задачи для самостоятельного решения	303
13	303
14	311
15	315
16	323
17	326
18	327
19	332

Подготовительные упражнения

1. Решите уравнение $x^2 = 9$.
2. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 1)^2 = 1$.
3. Решите уравнение $(x + 1)^2 = (2x + 5)^2$.
4. Решите уравнение $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
5. Решите уравнение $3x^2 - 7x + 5 = 0$.
6. Решите уравнение $x^2 - 2011x + 2010 = 0$.
7. Решите уравнение $x^2 - 2010x - 2011 = 0$.
8. Решите уравнение $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.
9. Решите неравенство $2x^2 - 7x + 5 \leq 0$.
10. Решите неравенство $3x^2 + 7x - 6 > 0$.
11. Решите неравенство $x^2 - 2011x + 2010 < 0$.
12. Решите неравенство $x^2 + 2012x + 2011 \geq 0$.
13. Решите неравенство $2x^2 - 6x + 5 \geq 0$.
14. Решите неравенство $3x^2 - 9x + 7 \leq 0$.
15. Решите неравенство $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.
16. Решите неравенство $2x^4 - 7x^2 + 5 < 0$.
17. Решите неравенство $x^4 + x^2 - 12 \leq 0$.

18. Решите неравенство $3x^6 + 7x^3 - 6 > 0$.
19. Решите неравенство $\frac{5x + 4}{3x - 1} < 0$.
20. Решите неравенство $\frac{2x + 3}{3x + 5} > 0$.
21. Решите неравенство $(x - 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0$.
22. Решите неравенство $\frac{(x - 2)(x + 1)^2}{-x} < 0$.
23. Решите неравенство $\frac{x}{x^2 + 3x - 4} < 0$.
24. Решите неравенство $\frac{(x + 1)x^2}{5x - x^2} \geq 0$.
25. Решите неравенство $\frac{x^2 + 1}{x - 1 - x^2} < 0$.
26. Решите неравенство $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + x + 1} \geq 0$.
27. Решите неравенство $\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$.
28. Решите неравенство $\frac{2x^2 + 21x + 40}{x^2 + 3} \geq 0$.
29. Решите неравенство $\frac{x^2 + 14x + 49}{2x^2 - x - 1} > 0$.
30. Решите неравенство $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0$.

31. Решите неравенство $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x - 6} < 0$.
32. Решите неравенство $\frac{x^2 - 10x + 25}{5 - 4x - x^2} \geq 0$.
33. Решите неравенство $x \geq \frac{6}{x + 5}$.
34. Решите неравенство $\frac{x + 6}{x - 6} + \frac{3x - 2}{2} \geq 0$.
35. Решите неравенство $2 + \frac{3}{x} > \frac{2}{x - 1}$.
36. Решите неравенство $\frac{4x}{x + 3} > x + 1$.
37. Решите неравенство $\frac{2x^2 + 3x - 459}{x^2 + 1} > 1$.
38. Решите неравенство $\frac{3}{2 - x^2} \leq 1$.
39. Решите неравенство $\frac{1}{x} < \frac{x^2 + 1}{x} + 1$.
40. Решите неравенство $\frac{12}{x^2} + \frac{7}{x} + 1 < 0$.
41. Решите неравенство $\frac{9}{(x + 2)^2} \geq 1$.
42. Решите неравенство $(x - 1)^4 - 15(x - 1)^2 - 16 > 0$.
43. Решите уравнение $(x^2 - 1)\sqrt{5x - 1} = 0$.

44. Решите уравнение $\sqrt{8 - 3x^2} = 1$.
45. Решите уравнение $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 4} = 0$.
46. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x - 3}$.
47. Решите уравнение $\sqrt{12 - x} = x$.
48. Решите уравнение $x - \sqrt{x - 1} = 3$.
49. Решите уравнение $\sqrt{7 + x} + x + 1 = 0$.
50. Решите уравнение $\sqrt{4 + 4x + x^2} + x = 4$.
51. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 + 21x + 4} = 2 + 11x$.
52. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 + 25x + 51} = 7 + 2x$.
53. Решите уравнение $\frac{\sqrt{2x + 1} + 1}{x} = 1$.
54. Решите неравенство $x \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.
55. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x - 3}{3 - 2x}} > -1$.
56. Решите неравенство $\sqrt{3x - 4} > \sqrt{4 - x}$.
57. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 2x - 3} < 1$.
58. Решите неравенство $\sqrt{x^2} + x < 1$.
59. Решите неравенство $0 < x + \sqrt{2 - x}$.
60. Решите неравенство $0 < x + \sqrt{x + 2}$.

61. Решите неравенство $x < \sqrt{x + 30}$.
62. Решите неравенство $\sqrt{2x - 1} < x - 2$.
63. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.
64. Решите неравенство $3 + x > 3\sqrt{1 - x^2}$.
65. Решите неравенство $\sqrt{(x + 1)(x - 10)} > x$.
66. Решите неравенство $\sqrt{(x + 5)(3x + 4)} > 4(x - 1)$.
67. Решите неравенство $\frac{3}{\sqrt{2 + x}} < \sqrt{2 + x} + 2$.
68. Решите уравнение $|x + 2| = x + 2$.
69. Решите уравнение $|x - 2| = 2(3 + x)$.
70. Решите уравнение $|3x + 2| = x + 11$.
71. Решите уравнение $|1 - x^2| = 15$.
72. Решите уравнение $|2x - 5| = 5 - 2x$.
73. Решите уравнение $x^2 + |x| - 6 = 0$.
74. Решите уравнение $(x - 5)^2 - |x - 5| = 30$.
75. Решите уравнение $x^2 + 6x + 8 + |x + 4| = 0$.
76. Решите уравнение $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$.
77. Решите уравнение $|1 - 5x^2| = 4$.

78. Решите уравнение $|x - 4| = |5 - 2x|$.
79. Решите неравенство $|2x + 5| < 1$.
80. Решите неравенство $\left|3x + \frac{5}{2}\right| \geq 2$.
81. Решите неравенство $|x^2 + 5x| < 6$.
82. Решите неравенство $2|x - 1| \leq 4 - x$.
83. Решите неравенство $|x + 1| > \frac{1 - x}{2}$.
84. Решите неравенство $|x + 2| \leq |4 - x|$.
85. Решите неравенство $|x - 1| - |x + 4| > 7$.
86. Решите неравенство $|x - 2| + x + \frac{3}{2} < |x + 1|$.
87. Решите неравенство $x^2 - 6|x| + 8 < 0$.
88. Решите неравенство $x^2 - |x| - 6 \leq 0$.
89. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin x = 2$.
90. Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{6}$.
91. Решите уравнение $\sqrt{2} \cos^2 5x = \cos 5x$.
92. Решите уравнение
 $(2 \sin 2x - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = \sin^2 2x$.
93. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x = \sqrt{3}$.

94. Решите уравнение $2 \cos 4x + \cos 2x = 1$.
95. Решите уравнение $3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2 \cos^2 x$.
96. Решите уравнение $\frac{4 \sin x - 2 \cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3} \cos x - 2} = 0$.
97. Решите уравнение $\frac{6 \sin x - 2 \cos 2x - 4 \cos^2 x - 3}{\sqrt{7} \sin x - 3 \cos x} = 0$.
98. Решите уравнение $4 \sin^4 \frac{x}{2} + 12 \cos^2 \frac{x}{2} = 7$.
99. Решите уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}$.
100. Решите уравнение $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.
101. Решите уравнение $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1$.
102. Решите уравнение $3 \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 0$.
103. Решите уравнение $4 \sin x \cdot \cos x - 3 \sin^2 x = 1$.
104. Решите уравнение $\cos x - \sin x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1$.
105. Решите уравнение $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.
106. Решите уравнение
 $6(\sin x + \cos x) - 2 \sin x \cdot \cos x + 6 = 0$.
107. Решите уравнение
 $(\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$.
108. Решите уравнение $\cos 3x - \sin(9x - 2) = 0$.

109. Решите уравнение $4 \cos x - 3 \sin x = 5$.
110. Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.
111. Решите неравенство $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.
112. Решите неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.
113. Решите неравенство $20 \sin^2 x + 9 \cos x < 21$.
114. Решите неравенство $\operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} \geq 1$.
115. Решите уравнение $5^{x^2+6x+8} = 1$.
116. Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{6x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{14x-3}$.
117. Решите уравнение $0,125 \cdot 2^{-4x-16} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^x$.
118. Решите уравнение $2^{3+2x} = 4^{1-x^2-3x}$.
119. Решите уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^{4\sqrt{x}} = (2,25)^{2\sqrt{x}-4}$.
120. Решите уравнение $5\sqrt{5}(0,2)^{x+0,5} = (0,04)^x$.
121. Решите уравнение $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{64} = 8^{x-1}$.
122. Решите уравнение $32^{\frac{x+8}{x-4}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+20}{x}}$.

123. Решите уравнение $5^{x+1} = 5^{x-1} + 24$.
124. Решите уравнение $7^{x+1} - \frac{1}{7}7^x + 2 \cdot 7^{x-1} - 14 \cdot 7^{x-2} = 48$.
125. Решите уравнение $3^{2x-1} - 9^x + 27^{\frac{2x+2}{3}} = 675$.
126. Решите уравнение $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.
127. Решите уравнение $4^{-\frac{2}{x}} - 5 \cdot 2^{-\frac{2}{x}} + 4 = 0$.
128. Решите уравнение $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$.
129. Решите уравнение $2^{x+1} \cdot 5^x = 10^{x+1} \cdot 5^{x+2}$.
130. Решите уравнение $2^x \cdot 5^{x-1} = 200$.
131. Решите уравнение $2^{(x^2-6)} \cdot 3^{(x^2-6)} = \frac{(6^{-x-1})^4}{6^5}$.
132. Решите неравенство $2^{5+10x} > 1$.
133. Решите неравенство $4^{2x} > 0,125$.
134. Решите неравенство $2^{-x} > \frac{1}{128}$.
135. Решите неравенство $\sqrt{27} \cdot 3^{x+1} < 9^{4x^2}$.
136. Решите неравенство $3^{x-3} < 3 \cdot 27^{\frac{1}{x}}$.
137. Решите неравенство $5^{-2-\frac{x^2}{3}} < 5^{2+2x} (\sqrt[3]{5})^{x^2} + 24$.
138. Решите неравенство $(0,2)^{\frac{2x-1}{x}} > 5$.

139. Решите неравенство $(0,1)^{\frac{1-2x}{x+1}} > 10^3$.
140. Решите неравенство $(0,25)^{4x^2+2x-2} < 4^{2x+3}$.
141. Решите неравенство $(0,3)^{2x^2+3x+6} < 0,00243$.
142. Решите неравенство $\sqrt{16^{\frac{2x+2}{x}}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.
143. Решите неравенство $2^{-x+2} - 2^{-x+1} + 2^{-x-1} - 2^{-x-2} \leq 9$.
144. Решите неравенство $2^{x+1} + 2^{-x} - 3 < 0$.
145. Решите неравенство $5^{1-2x} > 5^{-x} + 4$.
146. Решите неравенство $25^x - 5^{x+1} \geq 50$.
147. Решите неравенство $4^{-x-0,5} - 7 \cdot 2^{-x-1} - 4 < 0$.
148. Решите уравнение $2 \log_8 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$.
149. Решите уравнение $10^{\lg(\lg \sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.
150. Решите уравнение $\log_5 \left(\frac{x+1}{10} \right) = \log_5 \left(\frac{2}{x} \right)$.
151. Решите уравнение $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$.
152. Решите уравнение $\frac{\log_2 5}{\log_2 10} + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$.
153. Решите уравнение $2 \log_4(4+x) = 4 - \log_2(x-2)$.
154. Решите уравнение $\log_3((x+2)(x-2)) = 4 \log_5(2x+3) - \log_{\sqrt{5}} 5$.

155. Решите уравнение $2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}$.
156. Решите неравенство $\log_{11}(3x - 1) > 1$.
157. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(7x - 1) > 0$.
158. Решите неравенство $\lg(x^2 + 5x + 7) < 0$.
159. Решите неравенство $\log_{0,5}(x^2 + 5x + 6) > -1$.
160. Решите неравенство $\log_8(x^2 + 4x + 3) \leq 1$.
161. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - 2x}{x}\right) \leq 0$.
162. Решите неравенство $2 \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{2 - 3x}{x}\right) \geq -1$.
163. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 4) > \log_{\frac{1}{5}}(x - 2)$.
164. Решите неравенство $\log_{0,1}(x^2 - x - 2) > \log_{0,1}(3 - x)$.
165. Решите неравенство $1 + \log_2(2 - x) > \log_2(x^2 + 3x + 2)$.
166. Решите неравенство
 $\log_{0,1}(4 - x) \geq \log_{0,1} 10 - \log_{0,1}(x - 1)$.
167. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 2x + 3y = -6. \end{cases}$
168. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

169. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 - |x-1|. \end{cases}$

170. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + |x+1| = 1, \\ |y-x| = 5. \end{cases}$

171. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18}. \end{cases}$

172. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4 \sin y = -11, \\ -2x + 5 \sin y = \frac{7}{2}. \end{cases}$

173. Решите уравнение $a \cdot x = 1$.

174. Решите неравенство $a \cdot x < 1$.

175. Решите уравнение $(a^2 - 1)x = a - 1$.

176. Решите уравнение $\frac{x-a}{x-1} = 0$.

177. Решите уравнение $\frac{x^2-1}{x-a} = 0$.

178. Решите уравнение $\frac{x-1}{x^2-a^2} = 0$.

179. Решите уравнение $\frac{a(x-1)}{x-a} = 0$.

180. Решите уравнение $x^2 = a$.

181. Решите неравенство $x^2 > a$.

182. Решите неравенство $x^2 < a$.
183. Решите уравнение $|x| = a$.
184. Решите уравнение $|a| = x$.
185. Решите неравенство $|x| < a$.
186. Решите неравенство $|x| > a$.
187. Решите уравнение $\sqrt{x} = a$.
188. Решите уравнение $a\sqrt{x} = 0$.
189. Решите неравенство $\sqrt{x} > a$.
190. Решите неравенство $\sqrt{x} < a$.
191. Решите неравенство $2^x < a$.
192. Решите неравенство $2^x > a$.
193. Решите уравнение $\sqrt{a^x} = 1$.
194. Решите неравенство $\log_a x < 1$.
195. Решите неравенство $\log_x a \leq 0$.
196. Решите уравнение $\cos x = a$.
197. Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$.
198. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то число $p^2 - 1$ делится нацело на 24.

199. Докажите, что если p и q — простые числа, большие 3, то число $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.
200. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.
201. Докажите, что число $222^{333} + 333^{222}$ — составное.
202. Докажите, что число $2010^{2010} - 1$ делится на 2009.
203. Докажите, что если сумма цифр десятичной записи числа n равна сумме цифр десятичной записи числа $2n$, то число n делится на 9. Верно ли обратное утверждение?
204. Найдите все числа вида $\overline{34x5y}$, кратные 36.
205. Докажите, что для любого натурального n число $n^2 + n$ четное.
206. Докажите, что для любого целого n число $n^3 + 2n$ делится на 3.
207. Докажите, что для любого целого n число $n^3 + 5n$ делится на 6.
208. Докажите, что для любого целого n число $n^5 - n$ делится на 30.
209. Докажите, что в последовательности
 $11, 111, 1111, 11111, \dots$
нет числа, являющегося квадратом натурального.
210. Докажите, что все числа вида
 $16, 1156, 111556, 11115556, \dots$
являются полными квадратами.

211. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 54 и 72.
212. Докажите, что при любом натуральном значении n числа $3n + 5$ и $5n + 8$ взаимно просты.
213. Докажите, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2 + 10n + 21$ и $n^2 + 9n + 18$ равен $n + 3$.
214. Докажите, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел $n^2 + 6n + 9$ и $n + 4$ равно $n^3 + 10n^2 + 33n + 36$.
215. Докажите, что ни при каком целом n число $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169.
216. Запишите число $0,11(7)$ в виде обыкновенной дроби.
217. Докажите, что числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ — иррациональные.
218. Докажите, что числа $\log_2 3$ и $\log_4 6$ — иррациональные.
219. Решите уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.
220. Докажите, что уравнение $x^2 + 1 = 3y$ не имеет решений в целых числах.
221. Решите уравнение $xy + x + y = 0$ в целых числах.
222. Докажите, что если хотя бы одно из рациональных чисел p и q отлично от -2 , то ни один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ не равен $1 + \sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

13

223. Решите уравнение $x^4 + x^2 - 12 = 0$.
224. Решите уравнение $3x^6 + 7x^3 - 6 = 0$.
225. Решите уравнение $(x - 1)^4 - 8(x - 1)^2 - 9 = 0$.
226. Решите уравнение $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$.
227. Решите уравнение $\frac{x^2 + x}{2x^2 + 2x} = \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x}$.
228. Решите уравнение $\frac{2x^2 + x + 2}{4x^2 + 5x - 14} = \frac{2x^2 + x + 6}{4x^2 + 5x - 10}$.
229. Решите уравнение $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 24$.
230. Решите неравенство $\frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$.
231. Решите неравенство $\frac{(2 - (x + 1)^2)(x - 4)^2}{x(x^2 - x - 6)} \geq 0$.
232. Решите неравенство $\frac{1}{2 - x} \leq 2$.
233. Решите неравенство $\frac{x - 1}{x + 3} > 2$.
234. Решите неравенство $\frac{5x + 1}{x^2 + 3} > -1$.

235. Решите неравенство $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.
236. Решите неравенство $\frac{1-x}{(x+1)^2} < 1$.
237. Решите неравенство $x + \frac{60}{x} \geq 17$.
238. Решите неравенство $\frac{x^2+1}{x} < \frac{1}{x} + 1$.
239. Решите неравенство $\frac{x-1}{x+1} < x$.
240. Решите неравенство $\frac{x^2+3x+24}{x^2+3x+3} < 4$.
241. Решите неравенство $-2 < \frac{x^2+2}{1-x^2}$.
242. Решите неравенство $\frac{3x-2}{x^2+6x} > \frac{1}{2}$.
243. Решите неравенство $\frac{5+2x}{3x^2+2x-16} < 1$.
244. Решите неравенство $\frac{1}{x^2+5x+6} \geq \frac{1}{2}$.
245. Решите неравенство $\frac{1}{x^2-8x-9} \geq \frac{1}{3x^2+5x+2}$.
246. Решите неравенство $\frac{19+33x}{7x^2+11x+4} > 2$.
247. Решите неравенство $\frac{4}{x} + \frac{2}{2-x} < 1$.

248. Решите неравенство $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} > \frac{1}{x+1}$.
249. Решите неравенство $\frac{7}{x(x+1)} + \frac{9}{x} + 1 < 0$.
250. Решите неравенство $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 1$.
251. Решите неравенство $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 3) \geq 5$.
252. Решите неравенство $(x^2 + 2x)(2x + 2) - 9 \frac{2x+2}{x^2+2x} \geq 0$.
253. Решите неравенство $\frac{1}{x+9} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x}$.
254. Решите неравенство $\frac{7}{x^2+5x+6} - \frac{9}{x+3} + 1 \leq 0$.
255. Решите неравенство $\frac{\frac{1}{x} - 1}{1 - \frac{1}{x-6}} \geq 0$.
256. Решите неравенство $\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{15}{88+32x}\right)^2 \geq 1$.
257. Решите уравнение $\sqrt{3-x} + \frac{4}{\sqrt{3-x}+3} = 2$.
258. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{2}$.
259. Решите уравнение $2x^2 - 3x - \sqrt{2x^2 - 3x + 9} + 3 = 0$.

260. Решите уравнение $\sqrt{1-3x} - \sqrt{4-x} = 1$.
261. Решите уравнение $\sqrt{4+x} - \sqrt{5-x} = 3$.
262. Решите уравнение $\sqrt{13-4x} = \sqrt{12-3x} - \sqrt{1-x}$.
263. Решите неравенство $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$.
264. Решите неравенство $\frac{3}{\sqrt{2+x}} < \sqrt{2+x} + 2$.
265. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} < \frac{3}{2}$.
266. Решите неравенство $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} > 1$.
267. Решите неравенство $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} < 0$.
268. Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-1}$.
269. Решите неравенство $\sqrt{7x-6} - \sqrt{3x-16} > \sqrt{5x-22}$.
270. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2+x+1} < 1$.
271. Решите неравенство $\sqrt{1+x} \leq \sqrt[4]{5-x}$.
272. Решите неравенство $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 2$.
273. Решите неравенство $\sqrt{2-\sqrt{x}} < \sqrt{x+1}$.
274. Решите неравенство $x+4 + \frac{x^2}{(1+\sqrt{x-1})^2} > 0$.
275. Решите уравнение $x^2+x = 0,6(x+3-\sqrt{5x^2+2x+1})$.

276. Решите уравнение $x^2 + x = 0,5(6 - x) + \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$.
277. Решите уравнение $2 - 3x + x^2 = 2(x - 1)\sqrt{x}$.
278. Решите уравнение $40 - 14x + x^2 = 2(x - 4)\sqrt{x}$.
279. Решите уравнение $6 - 5x + x^2 = 4(x - 2)\sqrt{x}$.
280. Решите уравнение $|x^2 + 13x + 35| = |35 - x^2|$.
281. Решите уравнение $|2x - 8| - |x + 5| = 12$.
282. Решите уравнение $|x| - |x + 2| = 2$.
283. Решите уравнение $|5x + 3| + |2x + 1| = |7x + 4|$.
284. Решите уравнение $|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2| = 0$.
285. Решите уравнение $2|x - 6| - |x| + |x + 6| = 18$.
286. Решите уравнение $||x + 1| + 2| - 1| + 1| = 2$.
287. Решите уравнение $|2x + 15| = 22 - |2x - 7|$.
288. Решите уравнение $|x^2 + 2x - 1| = \frac{1 - 5x}{3}$.
289. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$4x + 14 \text{ и } \frac{11\sqrt{16x^2 - 2x - 5}}{\sqrt{8x - 5}}$$

принимают равные значения.

290. Решите неравенство $|x^2 + 2x| + x \leq 0$.

291. Решите неравенство $|x + 4| > x^2 + 7x + 12$.

292. Решите неравенство $x^2 + 5x + 9 \leq |x + 6|$.

293. Решите неравенство $3x^2 + 9x + 2 \geq |x + 3|$.

294. Решите неравенство $|x + 6| > |x^2 + 5x + 9|$.

295. Решите неравенство $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{|x|} \geq 2$.

296. Решите неравенство $\frac{3}{|x+1|} \geq 5 - 2x$.

297. Решите неравенство $\frac{|x-3|-1}{4-2|x-4|} \geq -1$.

298. Решите неравенство $\frac{|2+x|+x}{|x+3|-1} \leq 2$.

299. Решите неравенство $\frac{|1-x|+10}{4|x-1|+3} > 2$.

300. Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-2} \text{ и } g(x) = 1$$

меньше, чем 0,5.

301. Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = \frac{7x-3}{2x-3} \text{ и } g(x) = 4$$

меньше, чем 0,8.

302. Решите уравнение $\sin x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \cdot \cos x = 1$.

303. Решите уравнение $2 \cos 3x = \sqrt{3} \cos x + \sin x$.

304. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$.

305. Решите уравнение $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} x} = 2$.

306. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x$.

307. Решите уравнение $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = (\sin x - \cos x)^2$.

308. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 7 - 5 \operatorname{tg} 2x$.

309. Решите уравнение
 $2 \sin^3 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

310. Решите уравнение
 $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x$.

311. Решите уравнение
 $2 \sin^8 x - 2 \cos^8 x = \cos^2 2x - \cos 2x$.

312. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + 2 = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-3\pi; -3\pi/2]$.

313. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
 б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.
314. а) Решите уравнение $2 \cos 2x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1$.
 б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.
315. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}.$$
 б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-3\pi; -3\pi/2]$.
316. Решите уравнение

$$(3 - \operatorname{ctg}^2 x) \sin 2x = 2(1 + \cos 2x).$$
317. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x + 4 \cos^2 x = 0$.
318. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$
 б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[2\pi; 7\pi/2]$.
319. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) + \operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 0$.
320. Решите уравнение $|\sin x| = \sin x \cdot \cos x$.
321. Решите уравнение

$$4 \cos x \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} x + \sin x = 0.$$
322. Решите уравнение $\cos 7x = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 + x^2$.

323. Решите уравнение $\sin \frac{x}{3} = \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 + x^2 - 25$.

324. Решите уравнение

$$\cos 2,5x = \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 + x^2 - 10.$$

325. Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x$.

326. Решите уравнение

$$\sin^2 \frac{2x}{5} - 10 \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{x}{5} + 25 = 25 \cos^2 \frac{x}{5}.$$

327. Решите уравнение $\sin^2 x + 6 \sin x \sin \frac{x}{2} + 9 = 9 \cos^2 \frac{x}{2}$.

328. Решите уравнение

$$\sin^2 \frac{2x}{3} + 8 \sin \frac{2x}{3} \sin \frac{x}{3} + 16 = 16 \cos^2 \frac{x}{3}.$$

329. Решите уравнение

$$x^2 + 1 = 0,5 \left(2 + 6x + 4\sqrt{2x^2 - 6x + 5}\right).$$

330. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} \text{ и } \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\operatorname{tg} 2x}$$

принимают равные значения.

331. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} \text{ и } \frac{\sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$$

принимают равные значения.

332. Решите уравнение $\frac{6 \cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

333. Решите уравнение $\frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

334. а) Решите уравнение $8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\log_2 5; \log_2 11]$.

335. а) Решите уравнение $8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[3/2; 2]$.

336. Решите уравнение $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 3^{x+2} + 3^x$.

337. Решите уравнение $9^x - 5^x - 3^{2x} \cdot 15 + 5^{x+1} \cdot 3 = 0$.

338. Решите уравнение $25^x - 7^x - 7 \cdot 5^{2x+1} + 5 \cdot 7^{x+1} = 0$.

339. Решите уравнение $9^x + 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$.

340. Решите уравнение $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 9^x$.

341. Решите уравнение $4^x = 2 \cdot 10^x + 3 \cdot 25^x$.

342. Решите уравнение

$$64 \cdot 9^{-x} - 84 \cdot 12^{-x} + 27 \cdot 16^{-x} = 0.$$

343. Решите уравнение $4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} - 9^{\frac{1}{x}} = 0$.

344. Решите уравнение $8^x + 8 = 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+1}$.

345. Решите уравнение

$$3^{-12x-1} - 9^{-6x-1} - 27^{-4x-1} + 81^{1-3x} = 2192.$$

346. Решите уравнение $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$.

347. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7 + \sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7 - \sqrt{48}}\right)^x = 14.$$

348. Решите уравнение

$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2 - 2x^2}\right)^2 + 2x^2.$$

349. Решите уравнение

$$5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1,2 = \left(\sqrt{0,2 - x^2}\right)^2 + x^2.$$

350. Решите уравнение

$$4^x - 10 \cdot 2^x + 20 = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + x^2.$$

351. Решите неравенство $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_9 27$.

352. Решите неравенство $2^{x-0,5} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1 + 2^{-x}$.

353. Решите неравенство $4^{3x^2-x} - 8 < 2 \cdot 8^{x^2 \cdot \frac{x}{3}}$.

354. Решите неравенство $\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \leq 2$.

355. Решите неравенство $\frac{2^{x-1} - 1}{2^{x+1} + 1} < \frac{1}{2}$.

356. Решите неравенство $\frac{2^{1+x} - 2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \leq 0$.

357. Решите неравенство $8 \cdot \frac{3^{x-2} - 1}{3^x - 2^x} < 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

358. Решите неравенство $\frac{33 \cdot 3^{x-1} - 93}{12 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^x - 15} \geq 5$.

359. Решите неравенство $2^{2-x} - 2^{3-x} - 2^{4-x} > 5^{2-x} - 5^{-x}$.

360. Решите неравенство

$$5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} > 7^{\frac{x}{2}+1} + 7^{\frac{x}{2}} + 7^{\frac{x}{2}-1}.$$

361. Решите неравенство $2^{2x} - 2 \cdot 25^x - 10^x > 0$.

362. Решите неравенство $2 \cdot 4^x - 25 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 10^x > 0$.

363. Решите неравенство $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$.

364. Решите неравенство $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 15^x \cdot 10^x$.

365. Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{4^x - 18 \cdot 2^x}{20 - 3x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \frac{-32}{20 - 3x}$.

366. Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{25 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x}{42 - 10x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \frac{-1}{42 - 10x}$.

367. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = (6^{\sqrt{1-x}} + 7)^2 - 4x^2 - 36^{\sqrt{1-x}} - 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 0,5x^4.$$

368. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = (0,6^{\sqrt{0,5-x}} - 2x)(0,6^{\sqrt{0,5-x}} + 2x) + 2x^4 - 0,36^{\sqrt{0,5-x}}.$$

369. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = (7^{\sqrt{1-x}} - 2)^2 - 49^{\sqrt{1-x}} + 4 \cdot 7^{\sqrt{1-x}} + 4x^2 - 0,5x^4.$$

- 370.** Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = 0,5 \cdot 7^{4x+9} \text{ и } g(x) = 2$$

меньше, чем 1,5.

- 371.** Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = 0,2 \cdot 2^{3x+5} \text{ и } g(x) = 4,8$$

меньше, чем 1,6.

- 372.** Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = 0,3 \cdot 2^{3x-13} \text{ и } g(x) = 14,4$$

меньше, чем 4,8.

- 373.** Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \lg \left(x + \frac{1}{8} \right) - \lg \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \lg \left(x - \frac{1}{2} \right) - \lg x.$$

- 374.** Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(-x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(1-x) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7+x) = 1.$$

- 375.** Решите уравнение $x^{\log_{\sqrt{x}}(x^2+1)} = 25.$

- 376.** Решите уравнение $\log_{x+1} 2 = 3.$

- 377.** Решите уравнение $\log_{1-x}(x^2 + 3x + 1) = 1.$

- 378.** Решите уравнение $\log_{1-x}(x^2 - x - 6)^2 = 4.$

379. Решите уравнение $(\lg x)^2 - 6 \lg x = \lg x^2 - 5$.
380. Решите уравнение $(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 \sqrt{x} = 2$.
381. Решите уравнение $\lg^{-1} x + 4 \lg x^2 + 9 = 0$.
382. Решите уравнение $\log_2 \frac{x}{8} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{16} - 1}$.
383. Решите уравнение $\frac{\log_{27} \frac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x} = 3$.
384. Решите уравнение $\log_2 x - 4 \log_{x^2} 4 = 3$.
385. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x}} 2 + 8 \log_{16} x^2 + 9 = 0$.
386. Решите уравнение $3 + 2 \log_{x-1} 3 = 2 \log_3 (x-1)$.
387. Решите уравнение $1 + 2 \log_{(x+5)} 5 = \log_5 (x+5)$.
388. Решите уравнение $(\log_3 8) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \log_3 4$.
389. Найдите нули функции

$$y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$$
.
390. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции

$$f(x) = 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
.
391. Решите уравнение $7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1$.
392. Решите уравнение $2 \sin 2x + \cos^2 x = 1 + 9 \operatorname{tg} x$.

393. Решите уравнение $\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 6 \operatorname{ctg} x$.
394. Решите уравнение $32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$.
395. Решите уравнение $2^{5x-1} \cdot 3^{4x+1} \cdot 7^{3x+3} = 504^{x-2}$.
396. Решите уравнение $3^{16+x} \cdot 4^{4+x} \cdot 5^{3x} = 540^{8-x}$.
397. Решите уравнение $\sqrt{9 - 4x|x - 4|} - 4x = 3$.
398. Решите уравнение $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} - 2x = 7$.
399. Решите уравнение $2 + \sqrt{25x|x - 1| + 4} = 5x$.
400. Решите уравнение

$$2 \log_{12} \left(x + \frac{6}{x - 5} \right) = \log_{12} \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 3} \right) + 3.$$
401. Решите уравнение

$$4 \log_2 \left(2 + \frac{6}{2x - 5} \right) - 8 = 3 \log_2 \left(2 - \frac{3}{x - 1} \right).$$
402. Решите уравнение

$$3 \log_6 \left(3 - \frac{3}{2x + 3} \right) = 4 \log_6 \left(2 + \frac{1}{x + 1} \right) + 3.$$
403. Решите уравнение

$$2 \log_2 \left(1 - \frac{13}{2x + 7} \right) = 3 \log_2 \left(2 + \frac{13}{x - 3} \right) + 2.$$
404. Решите уравнение $\sqrt{13 + \frac{4}{\log_x 3}} = 2 \log_3 (3\sqrt{x})$.
405. Решите уравнение

$$\sqrt{105 - \frac{8}{\log_x 2}} = 3 \log_2 (0,5x^3\sqrt{x}).$$

406. Решите уравнение $\sqrt{7 - \frac{1}{\log_x 4}} = 2 \log_4 (0,5\sqrt{x})$.

407. Решите уравнение

$$\sqrt{25 - \frac{11}{\log_x 10}} = 10 \cdot \lg \left(10^{\frac{2}{5}} (0,1x)^{-0,1} \right).$$

408. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \frac{16}{\log_x 5}} = 8 \log_5 \left(5^{-0,125} \left(\frac{5}{x} \right)^{0,25} \right).$$

409. Решите уравнение $\log_{81} (15 - 7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1$.

410. Решите уравнение $\log_9 (37 - 12x) \cdot \log_{7-2x} 3 = 1$.

411. Решите уравнение $\log_{25} (34 - 33x) \cdot \log_{4-3x} 5 = 1$.

412. Решите уравнение $\log_{0,25} (13 - 6x) \cdot \log_{3-x} 0,5 = 1$.

413. Решите уравнение

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 31 = \left(\sqrt{25 - x^2} \right)^2 + x^2.$$

414. Решите уравнение

$$\log_3^2 x - 5 \log_3 x + 87 = \left(\sqrt{81 - x^2} \right)^2 + x^2.$$

415. Решите уравнение

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = \left(\sqrt{5 - x^2} \right)^2 + x^2.$$

416. Решите уравнение

$$\log_{3-4x^2} (9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2 (3 - 4x^2)}.$$

417. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(2 \cos x) - 5 \log_2(2 \cos x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\pi; 5\pi/2]$.

418. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\pi/2; 2\pi]$.

419. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$3x^2 \log_3(2 + 3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2 + 3x} \text{ и } 3x^2 + 2x$$

принимают равные значения.

420. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$x^2 \log_2(3x + 1) - x \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3x + 1} \text{ и } 3x^2 + x$$

принимают равные значения.

421. Решите неравенство $\lg(x + 4) \geq -2 \lg \frac{1}{2 - x}$.

422. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 6x + 18) + 2 \log_5(-x - 4) < 0.$$

423. Решите неравенство $2 \log_2 x - \log_2(2x - 2) > 1$.

424. Решите неравенство

$$2 \log_3(-x) - \log_{\frac{1}{3}}(4 + x) \leq \log_3(x + 1)^2 + 2 \log_3(10 + x).$$

425. Решите неравенство $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x \leq 2$.

426. Решите неравенство $\log_3 x \leq \frac{2}{\log_3 x - 1}$.

427. Решите неравенство $\frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{1}{1 - \log_2 x} > 2$.

428. Решите неравенство $\frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1} \leq 1$.

429. Решите неравенство $5 + 2 \log_{\frac{1}{3}} x > 2 \log_x 3$.

430. Решите неравенство $\log_x \left(\frac{6 - 5x}{4x + 5} \right) > 1$.

431. Решите неравенство $\log_{(x-2)}(x+2) > -1$.

432. Решите неравенство $\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)} \left(\frac{14}{24-2x-x^2} \right) > 1$.

433. Решите неравенство $\log_{\left(\frac{x}{2}\right)} 8 + \log_{\left(\frac{x}{4}\right)} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

434. Найдите все значения x , для которых точки графика функции

$$y = \frac{\log_7(10 - 2x)}{3 - x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{2}{3 - x}$.

435. Найдите все значения x , для которых точки графика функции

$$y = \frac{\log_5(15 - 2x)}{17 - 4x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{3}{17 - 4x}$.

436. Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{\log_{0.2}(20 - 5x)}{12 - 4x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = -\frac{3}{12 - 4x}$.

437. Найдите все значения x , для которых точки графика функции

$$y = \frac{\log_{0.7}^2(23 + 4x)}{45 - 4x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{83}{4x - 45}$.

438. Найдите все значения x , для которых точки графика функции

$$y = \frac{\log_7^2(23 - 4x)}{3x + 5}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{11}{-5 - 3x}$.

439. При каких значениях x соответственные значения функций

$$f(x) = \log_2 x \text{ и } g(x) = \log_2(3 - x)$$

будут отличаться меньше, чем на 1?

440. Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = \log_9(8x - 7) \text{ и } g(x) = 2,5$$

меньше, чем 0,5.

441. Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = \log_{\sqrt{2}}(5x + 14) \text{ и } g(x) = 10$$

меньше, чем 2.

442. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$9^{\log_7(9-25x^2)} \text{ и } 9^{\log_7(3-5x)+\log_7(10x^2-6x+6)}$$

принимают равные значения.

443. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$6^{\log_3(9-4x^2)} \text{ и } 6^{\log_3(2x+3)+\log_3(2x^2+3x+6)}$$

принимают равные значения.

444. Найдите значение функции

$$f(x) = 10^{\lg \frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$$

в точке максимума.

445. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = 48x^2 - 3x^4 - 9x^3 + 0,1^{-\lg(x^3+8)}.$$

446. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 72x^2 + 2^{-\log_{0,5}(x^3+8)}.$$

447. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 36x^2 + 100^{-\log_{0,01}(x^3+1)}.$$

448. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = \frac{6 - 6 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^2 + 2x^3 - 15x^4.$$

449. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = 4,5x^2 + 4x^3 - \frac{15 - 15 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^4.$$

450. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 15x^4 - 26x^3 + \frac{12 - 12 \cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \cdot x^2.$$

451. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \left| \sqrt{1-x^2} - 2 \right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2.$$

452. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (2x + 4)^5 - 4(2x + 4)^4$$

$$\text{при } |x + 2| \leq 1.$$

453. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 3(2x - 4)^4 - (2x - 4)^5$$

$$\text{при } |x - 2| \leq 1.$$

454. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 50(0,5x - 1)^2 - (0,5x - 1)^4$$

$$\text{при } |x - 3| \leq 3.$$

455. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 32(0,5x - 3)^2 - (0,5x - 3)^4$$

$$\text{при } |x - 7| \leq 3.$$

456. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = x(2x - 3)^6$$

$$\text{при } |x - 1,5| \leq 0,5.$$

457. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x(0,5x + 4)^6$$

при $|x + 8| \leq 2$.

458. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{-5x}{x^2 + 4}$

при $|x + 3,5| \leq 2,5$.

459. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 16}$

при $|x + 5,5| \leq 2,5$.

460. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 0,25(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) - 2x^2$$

при $|x - 1,5| \leq 1,5$.

461. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{6x - 2y - 7} = \frac{3x - y}{4} + 1, \\ \frac{x - 11y - 8}{3x - y - 16} = x - y. \end{cases}$$

462. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

463. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

464. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$$

465. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

466. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$
467. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$
468. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 \sqrt{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$
469. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y + 2. \end{cases}$
470. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = y^2 - x^2 + 3, \\ 2^{3x+y} = 512. \end{cases}$
471. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$
472. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$
473. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \frac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$
474. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - 2x = 4. \end{cases}$
475. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2 \log_x 8 + 3y = 24, \\ 2 \log_x^3 0,5 + y = 8. \end{cases}$

476. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

477. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$

478. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + x = -1, \\ \frac{x}{x+y} = -2. \end{cases}$

479. Решите систему уравнений $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$

480. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

481. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22, \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x}. \end{cases}$$

482. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{6y - x - 6}{3y + 2x - 1} = 3y - x, \\ 9^{3y+2x} + 27 = 12 \cdot 3^{3y} \cdot 3^{2x}. \end{cases}$

483. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3y - 2x - 1}{2y + x + 2} = 2x - y + 5, \\ \frac{1}{4^{x+2y}} + 8 = 6 \cdot 2^{-x} \cdot 2^{-2y}. \end{cases}$

484. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy + 7x}{y + 5} = x + 2, \\ 0,5 \log_3 \frac{25x - x^3 - 81}{y + 3} = 2 - \log_9(2 - x). \end{cases}$$

485. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy + x}{y - 2} = x - 3, \\ \log_4(x + 5) = 3 - 0,5 \log_2 \frac{36x - x^3 - 64}{y - 7}. \end{cases}$$

486. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3xy + 2x}{y - 6} + 4 = 3x, \\ \log_3 \frac{4x - x^3 - 81}{4 - y} = 4 - 2 \log_9(2 - 5x). \end{cases}$$

487. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{0,9}(2y - 3x + 1) = 0, \\ 0,5 \log_2(3y - x - 1,5) + \log_4(8x) = 0. \end{cases}$$

488. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (3\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 6) = 0. \end{cases}$

489. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ (2\sqrt{\cos x} - 1)(7y - 3) = 0. \end{cases}$

490. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cos^2 y = 0, \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

491. Решите систему уравнений $\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} - 2 \sin x = 0. \end{cases}$

492. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{12} \operatorname{ctg} x + \sqrt{2}y = 4, \\ -\sqrt{27} \operatorname{ctg} x + \sqrt{8}y = 1. \end{cases}$$

493. Найдите все решения уравнения

$$3^{\cos 2x} \cdot 6^{\sin 2x} = 2^{\sin 2x}$$

и выберите из них те, которые лежат на отрез

$$\left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \right].$$

494. В правильную шестиугольную пирамиду с высотой H вписан один конус, а около нее описан другой конус с радиусом основания R . Найдите разность объемов этих конусов.
495. Конус вписан в правильную четырехугольную пирамиду. Их общая высота равна $\frac{9}{4}$, а радиус вписанной в конус сферы равен 1. Найдите разность объемов пирамиды и конуса.
496. Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB площадью 42. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении 1:5. Найдите объем конуса, если $\angle SAB = \arccos \frac{3}{\sqrt{58}}$.
497. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует с двумя смежными гранями углы α и β соответственно.
498. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы объемом V , если угол между диагоналями двух ее боковых граней, проведенными из одной вершины, равен α .
499. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .
- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

500. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.
- а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .
501. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{3}$. Точки M и N — середины ребер CD и AB соответственно, NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD .
- а) Докажите, что точка T — середина отрезка SM .
- б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC .
502. Плоскость пересекает боковые ребра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если $\frac{SK}{KA} = \frac{SL}{LB} = 2$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам.
503. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны, причем $AB = BD = DC = AC = 5$.
- а) Докажите, что $AD = BC$.
- б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60° .
504. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды объемом 36, если ее высота вдвое больше радиуса окружности, описанной около основания.

505. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом φ между боковыми ребрами.
506. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной треугольной пирамиды, если угол между ее боковыми ребрами равен φ .
507. В правильной пирамиде $SABC$ с ребрами $AB = 1$ и $AS = 2$ проведены биссектриса AL боковой грани SAB и медиана BM основания ABC . Найдите LM .
508. На высоте правильной треугольной пирамиды взята точка, удаленная от бокового ребра пирамиды на расстояние $\frac{4}{\sqrt{13}}$ и делящая высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите объем пирамиды, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом $\frac{\pi}{6}$.
509. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .
510. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 4$, $BC = 3$ и $AA_1 = 2$ точки P и Q — середины ребер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке T .
- Докажите, что $B_1 T : TC = 2 : 1$.
 - Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью APQ .

511. Найдите высоту пирамиды, основанием которой служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, если ее боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° .
512. Найдите объем пирамиды, если ее основанием служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 и углом 30° , а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° .
513. Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , а двугранные углы при ребрах основания равны по $\arcsin \frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH = 1$ и $BH = 3\sqrt{2}$.
514. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды объемом $9\sqrt{3}$ и высотой 3.
515. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанной около нее сферы равен 2, а боковое ребро в $\sqrt{2}$ раз больше ребра основания.
516. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к апофеме пирамиды.
517. В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB = a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC .
518. Плоскость, параллельная боковому ребру $AS = a\sqrt{2}$ и ребру $BC = a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS . Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

519. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой H и двугранным углом α при боковом ребре.
520. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро равно a , а двугранный угол при этом ребре равен φ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC .
521. Все ребра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость, параллельная прямым AC и SB , пересекает ребра AB и BC в точках M и N . Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN = \sqrt{2}$.
522. В правильной пирамиде $SABCD$ с высотой 4 сторона основания $SABC$ равна 6. Точки M и N — середины ребер BC и CD . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SMNC$.
523. На воздушном шаре, двигавшемся относительно Земли вдоль заданной параллели на постоянной высоте, было совершено кругосветное путешествие. На какой широте совершалось путешествие, если разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, оказалась равной удвоенному диаметру шара?
524. Какими должны быть радиусы четырех одинаковых шаров, чтобы их можно было разместить внутри данной сферы радиуса R и при этом каждый шар касался сферы и трех других шаров?
525. Два шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности конуса, а также его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найдите объем конуса, если его высота в $\frac{4}{3}$ раза больше радиуса основания.

526. Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину ее основания перпендикулярно противоположному ребру, вдвое меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

527. Три параллельные прямые касаются в точках A , B и C сферы с центром O и радиусом 4. Найдите $\angle ABC$, если площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

528. Вне правильного тетраэдра $ABCD$ взята такая точка M , что

$$MA = MB = MC = \sqrt{97} \text{ и } MD = \sqrt{2}.$$

Найдите объем тетраэдра.

529. Стороны $AB = 6$ и CD основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ параллельны,

$$AD = 4, AS = 2\sqrt{14} \text{ и } \angle BAD = 120^\circ.$$

Найдите объем пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают ее по равным четырехугольникам.

530. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ с углом $\angle A = 120^\circ$. На боковых ребрах AA' , BB' и CC' взяты такие точки K , L и M соответственно, что угол между прямыми KL и AB равен 45° , а между прямыми LM и BC — 30° . Найдите угол между плоскостями KLM и ABC .

531. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковым ребром $AA_1 = 4\sqrt{2}$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ и $BC = 16$. Точка Q — середина ребра A_1B_1 , а точка P делит реб-

ро B_1C_1 в отношении $1:2$, считая от вершины C_1 .
Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M — середина ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .

532. Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через ее боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади ее основания. Найдите площадь ее боковой грани.

533. На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объемом V взята такая точка D , что

$$SD : DA = m : n .$$

Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d . Найдите площадь треугольника BCD .

534. На боковых ребрах AA' и BB' треугольной призмы $ABCA'B'C'$ объемом V взяты такие точки D и E соответственно, что

$$AD = DA' \text{ и } BE : BE' = 1 : 2 .$$

Найдите объем призмы, заключенной между плоскостями ABC и DEC .

535. Найдите площадь поверхности параллелепипеда объемом 8 , вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

536. На каком расстоянии от ребра SA правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S должна проходить плоскость, параллельная ребрам $BC = a$ и $AS = b$, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

537. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 15 , а радиус вписанного в пирамиду шара равен 3 . Найдите высоту пирамиды, если она совпадает с ребром SA .

538. Хорды AA' , $BB' = 18$ и CC' сферы радиуса 11 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M , находящейся на расстоянии $\sqrt{59}$ от центра сферы. Найдите AA' , если

$$CM : MC' = (8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2}).$$

539. На ребрах AB , BC и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 взяты такие точки K , L и M соответственно, что

$$AK = \frac{1}{2} \text{ и } BL = CM = \frac{1}{3}.$$

Плоскость KLM пересекает прямую AD в точке N . Найдите угол между прямыми NK и NL .

540. Точка M равноудалена от вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$, а от каждой из вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Прямая MC перпендикулярна высоте DH треугольника ACD . Найдите объем тетраэдра.

541. В правильную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса 2. Этой сферы, граней BSC , CSD и основания $ABCD$ пирамиды касается другая сфера радиуса 1. Найдите объем пирамиды и двугранный угол при боковом ребре.

542. Найдите ребро основания правильной призмы $ABCA'B'C'$ с боковым ребром $AA' = 2$, если угол между скрещивающимися прямыми AC' и $A'B$ равен $\alpha < 60^\circ$.

543. На ребре BD тетраэдра $ABCD$ взята такая точка E , что

$$DE : BE = 3 : 5.$$

Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и D параллельно медиане BM треугольника ABC , делит объем тетраэдра.

544. На ребрах AD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты такие точки E и F соответственно, что

$$DE : AE = SF : BF = 1 : 2.$$

Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки E и F параллельно ребру CB , делит объем тетраэдра.

545. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите $\angle DAC$, если $\angle DAB = \frac{\pi}{2}$ и

$$\angle BAC = \frac{3\pi}{4}.$$

546. Двугранный угол при ребре AC тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите BD , если

$$AB = 2, AD = \sqrt{2},$$
$$\angle BAC = \frac{\pi}{6} \text{ и } \angle CAD = \frac{\pi}{2}.$$

547. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если

$$AB = BC = 2, AC = 1,$$

а ребро $CD = 4$ перпендикулярно ребрам AB и AC .

548. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие вершины — на диагонали грани этого куба.

549. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка E не лежит в его плоскости. Найдите угол между двумя прямыми, по которым пересекаются две пары плоскостей ABE , CDE и BCE , ADE .

550. Дан тетраэдр $ABCD$ с углом $\angle ABC = \beta \leq 90^\circ$. Найдите угол между двумя прямыми, проходящими через две пары точек: середины ребер AC , BC и середины ребер BD , CD .
551. Точка A находится на расстоянии a от данной плоскости и на расстоянии b от прямой L , лежащей в этой плоскости. Найдите расстояние от проекции точки A на плоскость до прямой L .
552. Найдите угол между боковым ребром a правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания со стороной b .
553. В одной из граней двугранного угла величины α взята точка A на расстоянии d от ребра двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани.
554. Пусть A' — проекция точки A на данную плоскость, $AA' = a$. Через точку A проходит другая плоскость, образующая с данной плоскостью угол α и пересекающая ее по прямой L . Найдите расстояние от точки A' до прямой L .
555. В пирамиде $SABC$ с углом $\angle ABC = \alpha$ точка B — проекция точки S на плоскость ABC . Найдите величину угла между гранями SAB и SBC .
556. На ребре $BC = 4$ куба $ABCD A' B' C' D'$ взята середина M , а на ребре $A' D'$ — такая точка N , что $A' N = 1$. Найдите длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.
557. Найдите объем куба $ABCD A' B' C' D'$, если сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через точки A, B, C и середину ребра $A' D'$.

558. Расстояния от концов отрезка до некоторой плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

559. Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC ,

$$AC = 3, BC = 4, SC = \sqrt{38} \text{ и } \angle ACB = 90^\circ.$$

В пирамиду вписан цилиндр площадью боковой поверхности $\frac{8\pi}{3}$: нижнее его основание лежит в плоскости ABC , а верхнее имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью. Каким может быть радиус основания этого цилиндра?

560. Чему может быть равна сумма углов, образуемых произвольной прямой с данной плоскостью и с перпендикуляром к ней?

561. Какие значения может принимать величина угла, получаемого в сечении произвольной плоскостью фиксированного двугранного угла величины α ?

562. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то плоскость, проходящая через середины отрезков AD, BD, CD , параллельна:

- а) прямой AB ;
- б) плоскости ABC .

563. Докажите, что в пространстве для любых четырех различных точек A, B, C, D середины K, L, M, N отрезков AB, BC, CD, DA соответственно служат вершинами параллелограмма $KLMN$.

564. Докажите, что если три прямые в пространстве не проходят через одну точку и попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

565. Три прямые проходят через точку A . Точки B, B' — точки одной прямой, C, C' — точки другой прямой, D, D' — точки третьей прямой. Докажите, что отношение объемов пирамид $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равно

$$(AB \cdot AC \cdot AD) : (A'B' \cdot A'C' \cdot A'D').$$

566. Докажите, что отношение площади многоугольника, расположенного в одной плоскости, к площади его проекции на другую плоскость равно $1 : \cos \varphi$, где φ — угол между плоскостями.

567. Докажите, что если S и P — площади двух граней тетраэдра, a — их общее ребро, а α — двугранный угол между ними, то объем этого тетраэдра равен

$$\frac{2SP \sin \alpha}{3a}.$$

568. Докажите, что если a и b — противоположные ребра тетраэдра, d — расстояние между ними, а α — угол между ними, то объем этого тетраэдра равен

$$\frac{abd \sin \alpha}{6}.$$

569. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

570. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных точек этой плоскости.

571. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных прямых этой плоскости.

572. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от трех попарно пересекающихся прямых этой плоскости.

573. Даны две разные точки A и B плоскости и число $\alpha \in [0; \pi]$. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ плоскости, для которых $\angle AMB = \alpha$.
574. Пусть A — фиксированная точка, не лежащая в данной плоскости, а M — произвольная точка этой плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков AM .
575. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.
576. Даны две разные точки A и B пространства. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ пространства, для которых $\angle AMB = 90^\circ$.
577. В правильной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 8\sqrt{3}$ и $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM , где M — точка пересечения медиан грани SBC .
578. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра:
- $$AB = 35, AD = 12, CC_1 = 21.$$
- Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.
579. В прямой треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ известны боковое ребро $AA_1 = 5$, ребро $AB = 4$ основания ABC и угол $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите расстояние между серединой ребра AB и прямой $B_1 C_1$.
580. Все ребра правильной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равны по 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .

581. Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α , параллельная плоскости основания пирамиды, пересекает высоту MO пирамиды в точке P так, что

$$MP : PO = 2 : 3.$$

В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α . Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.

582. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD . Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB . Найдите объем конуса.
583. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD . Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB . Объем конуса равен $72\pi\sqrt{2}$. Найдите длину ребра тетраэдра.
584. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.
585. Около прямой четырехугольной призмы описан цилиндр. Основание призмы — прямоугольник, диагональ и меньшая сторона которого образуют угол 60° . Площадь боковой поверхности призмы равна $120\sqrt{3}$,

а расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания равно $1 + \sqrt{3}$. Найдите объем цилиндра.

586. Около правильной треугольной призмы, объем которой равен 288, описан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
587. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45° , вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 120.
588. В правильную треугольную призму, объем которой равен 36, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
589. Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A . В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A , проходит через точку M . Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.
590. В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45° . Найдите объем призмы.
591. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 4,5. Прямая BA_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 45° . Найдите площадь поверхности шара.

592. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным $2\sqrt{3}$, расположен конус. Вершина конуса находится в точке D_1 , а центр его основания, точка O , лежит на диагонали BD_1 так, что

$$BO : OD_1 = 1 : 3.$$

Окружность основания конуса имеет с каждой гранью, содержащей точку B , ровно по одной общей точке. Определите объем конуса.

593. Все грани призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы. Углы BAD , BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 .

594. Основание $ABCD$ наклонной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадрат, а все боковые грани призмы — равные ромбы. Углы BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDD_1 , если сторона квадрата $ABCD$ равна 10.

595. Все ребра призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $CA_1 B_1$, если площадь грани $ABB_1 A_1$ равна $8\sqrt{3}$.

596. Дана правильная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, где AA_1 , BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1 , пересекает ребро $A_1 C_1$ в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1 . Известно, что $AB = 12$,

$$A_1 M : MC_1 = 3 : 1.$$

Найдите площадь боковой поверхности призмы.

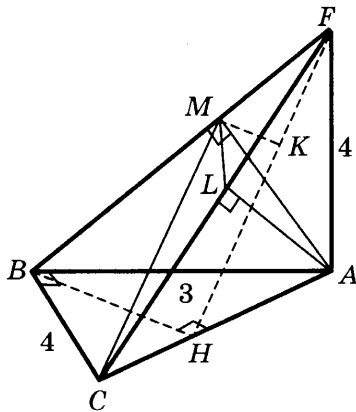
597. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN , если T — середина ребра ML .
598. Отрезок PN , равный 8, — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника KLT , где K и T — середины ребер PM и NM соответственно.
599. Отрезок AB — диаметр сферы. Точки C, D лежат на сфере так, что объем пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите косинус угла между прямыми CM и AB , если M — середина ребра BD .
600. Дана сфера радиуса 12. Сечением этой сферы плоскостью является окружность с диаметром AB . Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка D выбрана на сфере, а точка C — на окружности так, что объем пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите площадь треугольника DMN , где M и N — середины ребер AC и BC соответственно.
601. Дана сфера радиуса 6. Сечением сферы плоскостью является окружность с диаметром KT . Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 5. Точка P выбрана на сфере, а точка L — на окружности сечения так, что объем пирамиды $PKLT$ наибольший. Найдите угол между прямой LM и плоскостью PTK , если M — середина ребра KP .
602. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды $FABCD$ наибольший. Точки M, T, L — середины ребер FB, CD и AD соответственно. Площадь треугольника MLT равна $64\sqrt{5}$. Найдите радиус сферы.

603. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды $FABCD$ наибольший. Найдите синус угла между прямой AM и плоскостью BFD , если M — середина ребра FB .

604. Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC , в котором

$$\begin{aligned} \angle ABC &= 90^\circ, \\ AB &= 3, \quad BC = 4. \end{aligned}$$

Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC . Найдите объем пирамиды $AMLC$.



605. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что

$$AM : BM = 1 : 3.$$

Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Объем пирамиды $TBMC$ равен $\frac{5}{64}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

606. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды, площадь сферы равна 48π . Точка M лежит на ребре AB так, что

$$AM : MB = 3 : 5.$$

Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Найдите объем пирамиды $TACM$.

607. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что

$$AM : MB = 2 : 7.$$

Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Объем пирамиды $TBCM$ равен $\frac{154\sqrt{3}}{81}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

608. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC , тангенс угла FAC равен $\frac{16}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью FAC равен 3. Точка M лежит на ребре BC , $BM = \frac{2}{5}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C . Объем пирамиды $LAMC$ равен 48. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

609. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC , тангенс угла FAC равен $\frac{15}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен 2. Точка

M лежит на ребре BC , $BM = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Точка L лежит на

прямой AF и равноудалена от точек M и C . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды, радиус этой сферы равен 4. Найдите объем пирамиды $LAMC$.

610. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны,

$$FB : FA = 15 : 11.$$

Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 5. Точка M выбрана на ребре BC так, что

$$BM : MC = 4 : 11.$$

Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB , а площадь этой сферы равна 36π . Найдите объем пирамиды $ACMT$.

611. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны,

$$FB : FA = 20 : 7.$$

Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 3. Точка M выбрана на ребре BC так, что

$$BM : MC = 1 : 3.$$

Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Объем пирамиды $ABMT$ равен 16. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB . Найдите площадь этой сферы.

612. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

613. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На его боковых ребрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что

$$AM : MA_1 = 8 : 11, B_1 P : PB = 2 : 1.$$

Во сколько раз объем данного параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной в точке P , основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1 ?

614. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На его боковых ребрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что

$$AM : MA_1 = 7 : 5, B_1 P : PB = 4 : 3.$$

Во сколько раз объем данного параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной в точке P , основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1 ?

615. Ребра AB и AD основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 9 и 4. На боковых ребрах AA_1 и BB_1 , равных 11, лежат точки M и P соответственно так, что

$$AM : MA_1 = 3 : 4, B_1 P : PB = 8 : 3.$$

Найдите объем пирамиды с вершиной в точке P , основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1 .

616. Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны 7 и 5 соответственно, боковое ребро AA_1 равно 3. Точки L , K , M лежат на ребрах AD , $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ так, что

$$AL : AD = 3 : 5, A_1 K : A_1 B_1 = 4 : 7,$$

$$B_1 M : B_1 C_1 = 2 : 5.$$

Найдите объем пирамиды с вершиной K и основанием $AMC_1 L$.

617. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 на сторонах AD , $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ его оснований лежат соответственно точки L , K , M так, что

$$AL : LD = 2 : 5, A_1 K : KB_1 = 2 : 3, B_1 M : MC_1 = 5 : 2.$$

Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной K и основанием $LDM B_1$?

618. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC , в котором $\angle C = 60^\circ$, $AC = 14$, $BC = 8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD , является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C . Найдите объем второй пирамиды.

619. В основании первой пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC , в котором $\angle C = 45^\circ$, $BC = 6\sqrt{2}$, $AC = 18$. Боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD , является основанием второй пирамиды. Ее вершина T — основание высоты BT треугольника ABC . Во сколько раз объем первой пирамиды больше объема второй пирамиды?

620. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M , L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN , если T — середина ребра ML .

621. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

622. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $2\sqrt{6}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

623. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $6\sqrt{6}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, CMB, AMC равны α каждый, причем

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

624. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $2\sqrt{30}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, CMB, AMC равны α каждый, причем

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки A до плоскости MBF .

625. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $4\sqrt{3}$. В основание этого конуса вписан четырехугольник $ABCD$ так, что углы BMA, CMB, DMC, AMD равны 60° каждый. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , выбрана точка F так, что объем пирамиды $MABFCD$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

626. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $6\sqrt{10}$. В основание этого конуса вписан четырехугольник $ABCD$ так, что углы BMA, CMB, DMC, AMD равны α каждый, причем

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , выбрана точка F так, что объем пирамиды $MABFCD$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

627. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $2\sqrt{2}$. В основание этого конуса вписан шестиугольник $ABCDEF$ так, что углы $AMB, BMC, CMD, DME, EMF, FMA$ равны α каждый, причем

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , выбрана точка L так, что объем пирамиды $MABLCDEF$ наибольший. Найдите расстояние от точки L до плоскости ABM .

628. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{19}{5}}$$

и высота 4. Точки A, B, C лежат на окружности основания конуса так, что AB — диаметр и $\angle AMC = 60^\circ$. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , выбрана точка L так, что объем пирамиды $MABLC$ наибольший. Найдите расстояние от точки L до плоскости AMC .

629. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $2\sqrt{21}$ и высота $2\sqrt{3}$. Точки A, B, C лежат на окружности основания конуса так, что AB — диаметр и $\angle AMC = 90^\circ$. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , выбрана точка L так, что объем пирамиды $MABLC$ наибольший. Найдите расстояние от точки L до плоскости AMC .

630. Плоское сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S проходит через середину ребра SD параллельно прямой AC и делит высоту пирамиды в отношении $2 : 1$, считая от вершины S . В каком отношении это сечение делит объем пирамиды? Найдите площадь этого сечения, если стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 16.

631. Решите уравнение

$$(x + 4)(x + 5)(x + 6)(x + 7) = 1680.$$

632. Решите уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{48}{(x-1)^2} = 10 \left(\frac{x-1}{3} - \frac{4}{x-1} \right).$$

633. Решите уравнение $\sqrt{x^4 + 2x - 5} = 1 + x$.

634. Решите уравнение $\sqrt{13-x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}$.

635. Решите уравнение $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+7} - 1}$.

636. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)(x+1)} - \sqrt{x^3} = 0$.

637. Решите уравнение $\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} = x-7$.

638. Решите уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+33} - \sqrt{x+6}$.

639. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 5x + 8} - \sqrt{3x^2 - 5x + 1} = 1$.

640. Решите уравнение $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 24}} + x + 1 = 0$.

641. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \sqrt{x}$.

642. Решите уравнение $6\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x-1} = 5\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}$.

643. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1.$$

644. Решите уравнение $(5x+2)\sqrt{1-x} + (5x-7)\sqrt{x} = 0$.

645. Решите уравнение

$$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x-1.$$

646. Решите уравнение

$$\sqrt{16-8x+x^2} + \sqrt{4x^2-13x-17} = x-4.$$

647. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{4x^2-17x+15} = 2-x.$$

648. Решите неравенство $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{35}{12}$.

649. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$.

650. Решите неравенство $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2-7x} > 3$.

651. Решите неравенство $x^2 \geq x(2 + \sqrt{12-2x-x^2})$.

652. Решите неравенство $\sqrt{x + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} > \frac{2}{x}$.

653. Решите неравенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{-x-1} < 1 + \sqrt{(x+3)(-x-1)}.$$

654. Решите неравенство $\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{2}{|x+1|-2}$.

655. Решите неравенство $|2x+4| - |3x-9| > |x+1| - 6$.

656. Решите неравенство $\|x+1| - |x-1|\| < 1$.

657. Решите неравенство $|x^2+2x-3| + 3x+3 < 0$.

658. Решите неравенство $x^2 - |5x + 3| + x < 2$.
659. Решите неравенство $x^2 + 4 \geq |3x - 2| + 7x$.
660. Решите неравенство $(|x + 1| - 3)(|x - 2| - 5) < 0$.
661. Решите неравенство
 $|x^2 - x - 2| + |x - 4| \leq x^2 - 2x + 6$.
662. Решите неравенство $|x^2 + 2x - 8| + 2x > 0$.
663. Решите неравенство $x^2 - x - 10 < 2|x + 2|$.
664. Решите неравенство $2x > \frac{5x + 3}{|x + 2|}$.
665. Решите неравенство $\frac{|x - 1| + |x + 2|}{199 - x} < 1$.
666. Решите неравенство $\frac{|x + 2|}{|x + 1| - 1} \geq 1$.
667. Решите неравенство $\frac{3}{|x - 3| - 1} \geq |x - 2|$.
668. Решите неравенство $\frac{|x^2 + 3x - 1|}{|x^2 - x + 1|} < 3$.
669. Решите неравенство $\frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 + 6x + 9} < 0$.
670. Решите неравенство $\frac{|x + 3|}{x^2 + 5x + 6} \geq 2$.
671. Решите неравенство $\frac{x^2 - |x| - 12}{x + 3} \leq 2x$.

672. Решите неравенство $|x^3 + 1| \geq 1 + x$.
673. Решите неравенство $\left| \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$.
674. Решите уравнение $\left(4|x + 1| + \frac{1}{2} \right)^2 = 11(x + 1)^2 + \frac{5}{4}$.
675. Решите неравенство $\sqrt{|x - 1| - 1} \geq \sqrt{|x - 1| - 2011}$.
676. Решите неравенство $\frac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|3 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 3}$.
677. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - x + 4} \leq 2x + |3x + 2|$.
678. Решите уравнение $\sin^4 \frac{2x}{3} + \cos \frac{2x}{3} = \frac{5}{8}$.
679. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}$.
680. Решите уравнение $\frac{2 \sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 2$.
681. Решите уравнение $\cos 2x \cdot (2 \cos^2 2x - 1) = \frac{1}{4}$.
682. Решите уравнение $\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4$.
683. Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 0,5x - 6 \sin 0,5x + 9} + \sqrt{(2 \sin 0,5x - 5)^2} = 8$.
684. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = (2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x$.

685. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1$.
686. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 14x + 3 \operatorname{ctg} 7x + \sin 3x - 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$$
687. Решите уравнение

$$2 \cos x - \sqrt{2} \sin 28x = 3\sqrt{2} - 2 \cos 28x \cdot \sin x.$$
688. Решите уравнение $2 \sin^2 x + \sin(x^2) = 1$.
689. Решите уравнение $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.
690. Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$.
691. Решите уравнение $1 + \arcsin x = 0$.
692. Решите уравнение $2 \arccos^2 x - 3 \arccos x - 2 = 0$.
693. Решите уравнение $\arcsin x = \arccos x$.
694. Решите уравнение

$$\arcsin\left(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
695. Решите уравнение $\arcsin 2x = \arccos |x|$.
696. Решите неравенство

$$2 \cos^2 2x - (2 + \sqrt{2}) \cos 2x + \sqrt{2} > 0.$$
697. Решите неравенство $6 \sin x \cdot \cos x > \sin x + \cos x + 1$.
698. Решите неравенство $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$.
699. Решите неравенство

$$2 \cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) \leq 0.$$

700. Решите неравенство
 $\arcsin(\sin x) + 3 \arccos(\cos x) \geq 3x - 18.$
701. Решите уравнение $|4 \cos^2 x - 1| + |4 \cos^2 x - 3| = 2.$
702. Решите неравенство
 $\left| 2 \sin x + 2 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| \leq 2.$
703. Решите уравнение
 $81^{(\sin 2x - 1) \cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0.$
704. Решите уравнение
 $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}.$
705. Решите уравнение
 $\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 3x - \cos x) = \log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x).$
706. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0.$
707. Решите уравнение
 $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x \cos x}.$
708. Решите уравнение
 $\sqrt{\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x - 3 \cos^2 x + \cos x} + \frac{13}{4} = \sqrt{3} \sin x + \frac{1}{2}.$
709. Решите неравенство $\sqrt{5 - 2 \sin x} \geq 6 \sin x - 1.$
710. Решите неравенство $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$
711. Решите неравенство $\sqrt{2 - \sin x - \sqrt{3} \cos x} > 1.$

712. Решите уравнение

$$2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x} - (2^2 - 1)4^{\cos^2 x} = -(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}.$$

713. Решите неравенство $\log_{\lg x} \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < -1$.

714. Решите неравенство $\log_{(\sin x - \cos x)}(\sin x - 5\cos x) \geq 1$.

715. Решите неравенство $\sqrt{4\sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \frac{x-5}{2x-1} \geq 0$.

716. Решите неравенство $(5x-13) \cdot \log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geq 0$.

717. Решите неравенство $(20-11x) \cdot \log_{5x-9}(x^2-4x+5) \geq 0$.

718. Решите неравенство $(4^{x^2-x-6} - 1) \cdot \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leq 0$.

719. Решите неравенство $\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} > \sqrt{\frac{7\pi}{12}}$.

720. Решите неравенство $5^{72} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}} > 1$.

721. Решите уравнение $2^{|x-2|} - |2^{1-x} - 1| = 2^{1-x} + 1$.

722. Решите неравенство $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$.

723. Решите неравенство $\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$.

724. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+2} + 20}{3^x - 3} + \frac{9^x - 3^{x+2} + 1}{3^x - 9} \leq 2 \cdot 3^x - 6.$$

725. Решите неравенство $\frac{4^x - 2^{x-3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}$.

726. Решите уравнение

$$\sqrt{(3^x - 4)^2} + \sqrt{(3^x - 6)(3^x + 9)} = 3^x - 4.$$

727. Решите уравнение

$$\sqrt{(3 - 6^x)^2} + \sqrt{(6 + 6^x)(11 - 6^x)} = 6^x - 3.$$

728. Решите уравнение

$$\frac{1}{8} (\log_2(x - 2)^4)^2 = \frac{\lg(2 - x)}{\lg 2} \cdot 2^{2 \log_2 \sqrt{3}}.$$

729. Решите уравнение $\log_x 9x^2 \cdot \log_9^2 x = 1$.

730. Решите уравнение

$$\log_2 \sqrt{x+1} + 3 \log_2 \sqrt{1-x} = \log_2 \sqrt{1-x^2}.$$

731. Решите уравнение

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x-2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(x+4)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(6-x)^3.$$

732. Решите уравнение

$$\log_4 x - \log_{\frac{1}{2}}(13-x) = \log_2(10-x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{4}}(8-x).$$

733. Решите уравнение

$$\log_4(\log_2 x) + 3 \log_{\frac{1}{8}}(\log_2(2\sqrt{2}x)) = 1.$$

734. Решите уравнение

$$\log_4 \left(2 \log_3 \left(1 + \log_2 \left(1 + 3 \log_3 (x-1) \right) \right) \right) = \frac{1}{2}.$$

735. Решите неравенство

$$\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{2 - \log_3 x}{\log_3 x} \log_3 x.$$

736. Решите неравенство $\log_2 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 2 > 1$.

737. Решите неравенство $\log_5 \sqrt{3x+1} \cdot \log_{x-1} 5 > 1$.

738. Решите неравенство $\frac{\log_2(1-x)}{x+1} < 0$.

739. Решите неравенство $\frac{1 - \log_{0,5} x}{\sqrt{6x + 2}} < 0$.
740. Решите неравенство $\frac{(x + 0,5)(x + 3)}{\log_2 |x + 1|} < 0$.
741. Решите уравнение $9^{\log_3(1+2x)} = 5x^2 - 5$.
742. Решите неравенство $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7(x^2-1)} > 1$.
743. Решите неравенство $2^{\log_5(2/(x+2))} < 1$.
744. Решите неравенство $(0,3)^{\log_5\left(\log_1\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)\right)} < 1$.
745. Решите неравенство $\log_{0,1}(101 - 5^x) + 2 < 0$.
746. Решите уравнение $\log_2 \frac{1}{|x + 1| - 1} = 1$.
747. Решите неравенство $\log_2 \left|1 - \frac{12}{x^2}\right| < 1$.
748. Решите неравенство $|\log_3(2 - x)| > 2$.
749. Решите неравенство $2 < \left|\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 4\right| \leq 3$.
750. Решите неравенство $\sqrt{\log_{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{16}\right)}(x - 1)} \geq 1$.
751. Решите неравенство $\sqrt{\log_2\left(\frac{2x + 3}{x + 1}\right)} < 1$.
752. Решите уравнение $x^{2\lg x} = 10x^2$.
753. Решите уравнение $x \cdot x^{\lg x} = 10 \cdot x$.
754. Решите неравенство $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$.

755. Решите неравенство $x^{(\lg 10x)-2} < 100$.

756. Решите неравенство $\left(\frac{x+1}{10}\right)^{\lg(x+1)-2} < 100$.

757. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geq 2$.

758. Решите неравенство $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}} \leq \frac{x^{\frac{\log_3 x}{3}}}{3}$.

759. Решите неравенство

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \leq (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

760. Решите неравенство $(2 - \sqrt{3})^{(\log_3 4)^{3-x^2}} \leq (2 + \sqrt{3})^{-(\log_4 3)^{2-3x}}$.

761. Решите неравенство $5^{\log_x 49} - 7^{\log_x 5} - 2 \geq 0$.

762. Решите уравнение $3\sqrt{\lg x} + 2\lg \sqrt{x^{-1}} = 2$.

763. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}} x - 3 \cdot \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0.$$

764. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) + \log_{\frac{4}{25}}\left(\frac{2}{5}\right) \geq 0.$$

765. Решите уравнение $\log_5(5^x - 20) = x - 1$.

766. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(2^{x-2} - 4^x) \geq -1$.

767. Решите уравнение $\log_3(2^{-x} - 3) + \log_3(2^{-x} - 1) = 1$.

768. Решите уравнение

$$2(\lg 2 - 1) + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5).$$

769. Решите неравенство

$$2 \log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{3}} \left(3^{x^2-3} - \frac{1}{9} \right) < \log_{\sqrt{3}} 26.$$

770. Решите уравнение $\lg 2^{x+3} - \lg(5^x - 2) = x$.

771. Решите неравенство $\frac{x+1}{3 - \log_3(9 - 3^{-x})} \leq 1$.

772. Решите неравенство $\log_{(x^2-2x-3)} \frac{|x| - |x-4|}{x+1} > 0$.

773. Решите неравенство $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{8}} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{-x} - \frac{1}{2} \right) \right) \leq -1$.

774. Решите неравенство

$$\log_{-x} (\log_9 (3^{-x} - 9)) < 1.$$

775. Решите неравенство $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$.

776. Решите неравенство

$$\log_4(\sqrt{3^x} - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{3^x} - 1}{16} \right) \leq \frac{3}{4}.$$

777. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \cdot \log_2 x > \log_{(x+1)} x.$$

778. Решите неравенство

$$\log_2 x - \log_2(x+2) + \log_{\frac{x+2}{x}} 2 > 0.$$

779. Решите неравенство $1 + \log_{\frac{1}{4}}(\log_3(x+4)) > 0$.

780. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{9}}(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)) \geq 2$.

781. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_2(x^2 - 2) > 0$.

782. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \frac{x^2 - 1}{x - 2} \right) < 0$.

783. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_3 x^2 > 1$.

784. Решите неравенство

$$\log_2 \left(\log_3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right) < \log_{1/8} \left(\log_{1/9} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} \right) \right).$$

785. Решите неравенство

$$2 \cdot \log_{(x^2 - 8x + 17)^2} (3x^2 + 5) \leq \log_{(x^2 - 8x + 17)} (2x^2 + 7x + 5).$$

786. Решите неравенство $\frac{\log_9(2-x) - \log_{15}(2-x)}{\log_{15}x - \log_{25}x} \leq \log_{25}9$.

787. Решите неравенство $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} + x - 1) \geq 1$.

788. Решите неравенство $\log_{2x} 4x \leq \sqrt{\log_{2x}(16x^3)}$.

789. Решите неравенство

$$\sqrt{(\log_{1/2} 2x)^2 + 4 \log_2 \sqrt{2x}} < \sqrt{2}(4 - \log_{16} 16x^4).$$

790. Решите неравенство

$$\left(x + \frac{8}{x} \right) \cdot \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4) \right| \geq 9 \cdot \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4) \right|.$$

791. Решите неравенство

$$\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2.$$

792. Решите неравенство

$$\log_2 \left[(7^{-x^2} - 6)(7^{-x^2+9} - 1) \right] + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 6}{7^{-x^2+9} - 1} > \log_2 (7^{3-x^2} - 5)^2.$$

793. Решите неравенство

$$\frac{\log_9^{x+2} 729}{\log_{9^{x+2}}(-9x)} \leq \frac{1}{\log_9 \log_{\frac{1}{9}} 9^x}.$$

794. Решите неравенство

$$\log_4(x+5)^4 \cdot \log_{16}(x+3)^2 + \log_2 \frac{(x+3)^3}{(x+5)} - 3 < 0.$$

795. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0$.

796. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22 \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x}. \end{cases}$$

797. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2(2x^2 - y^2) = 2, \\ 6 \log_8(-x) + \log_2(y^2) = 4. \end{cases}$

798. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3 x^{-2}, \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$

799. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

800. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

801. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 + 8x^3 \sqrt{y} + y = 1. \end{cases}$

802. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

803. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{y/x+3x/y} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}. \end{cases}$$

804. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)} = 1, \\ 4^{x+y} - 2^{x+y} = 12. \end{cases}$$

805. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3 \log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3, \\ \log_5 (y - x - 2) + \log_{125} (y - x - 2)^3 = \log_5 12. \end{cases}$$

806. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$$

807. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2 \log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

808. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

809. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2 \sin 3x + 2 \cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2 \sin 7x - 2 \sin x = \sqrt{2}, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

810. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

811. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

812. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg}5y = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2})\sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

813. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0, \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7. \end{cases}$

814. а) Найдите все значения переменной x , которые удовлетворяют каждому из следующих двух неравенств;

б) Найдите все значения переменной x , которые удовлетворяют только одному из следующих двух неравенств:

$$\log_{5-2x} \frac{2x-4}{(2x-5)^{10}} \geq -10 \text{ и } 8x^3 + 32x^2 + \frac{200x^2 + 2x - 7}{2x-7} \leq 1.$$

815. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$

816. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

817. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$$

818. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10, \\ x^2 + 2y^4 = 10. \end{cases}$

819. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}(x+3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x+y) = 28. \end{cases}$

820. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$

821. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (1/4)^{-3x/2} + \log_3^3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1} \log_{\sqrt{3}} y + \log_3^2 y = 84. \end{cases}$$

822. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1 + 2 \log_{|xy|} 2) \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

823. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$$

824. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 (10 - 3y) + \log_{1/2} (2y - 5x) = 0, \\ \sqrt{x + 2y + 1} - \sqrt{11 - 3y} = \sqrt{2x + 4y - 12}. \end{cases}$$

825. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

826. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1, \\ \frac{xz}{x+z} = 2, \\ \frac{yz}{y+z} = 3. \end{cases}$

827. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$

828. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \geq 0. \end{cases}$

829. Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = -2x?$$

830. Сколько различных решений имеет неравенство

$$\sqrt{6}(x^2 + 2) + 2\sqrt{5}x \leq \sqrt[3]{35}(x^2 - 2) + 2\sqrt{7}x?$$

831. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x + 1)).$$

832. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{2} \cos 3x = 0$$

на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

833. Найдите все корни уравнения

$$\cos x + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{2}} = 0$$

на промежутке $[3\pi; 4\pi]$.

834. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,5} \frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}}.$$

835. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,25} \frac{30 + \sqrt{4 + \log_4^2 x}}{2}.$$

836. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3}{\pi} \arccos(\sqrt{0,125}(\cos x - \sin x)).$$

837. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

838. Найдите все целочисленные решения системы
- $$\begin{cases} 7875x^2 = 567y^3, \\ |x| \leq 25. \end{cases}$$
839. Найдите множество значений функции
- $$y = \frac{9}{\pi} \arccos \frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}.$$
840. Найдите множество значений функции
- $$y = \frac{12}{\pi} \arcsin \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} (\sin x + \cos x) - 0,25 \right).$$
841. Найдите множество значений функции
- $$y = \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg} (0,25(\sqrt{3} \sin x - \cos x + 2)).$$
842. Найдите множество значений функции $y = \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|}$,
если $x \geq -2$.
843. Найдите множество значений функции $y = \frac{5x}{|x|} + 3^{|x|}$,
если $x \geq -1$.
844. Найдите множество значений функции $y = 3^{|x|} - \frac{4x}{|x|}$,
если $x \leq 1$.
845. Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если
 $x \in [\operatorname{arctg} 0,5; \operatorname{arctg} 3]$.
846. Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если
 $x \in \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2 \right]$.
847. Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если
 $x \in \left[\arccos 0,8; \frac{5\pi}{12} \right]$.

848. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2} \frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}.$$

849. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,1} \frac{300}{1 + \lg(100 + x^2)}.$$

850. Найдите все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leq 6 - x.$$

851. Найдите все пары натуральных чисел x, y , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2x + 47 < 22y - 2y^2, \\ 7x + 14 \leq 4y. \end{cases}$$

852. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + x^2 + 14y. \end{cases}$$

853. При каком $x \in \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x+2}} \right) : \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 2 \right) \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+2}} \right)$$

ближе всего к 73?

854. При каком целом положительном x значение выражения

$$\frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{9 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - x^2}{x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49}$$

ближе всего к 0,7?

855. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9}$$

ближе всего к 0,66?

856. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-5}{x+2}} \cdot \frac{x^2+(2-x)\sqrt{x^2-3x-10}-4}{x^2-(x+5)\sqrt{x^2-3x-10}-25}$$

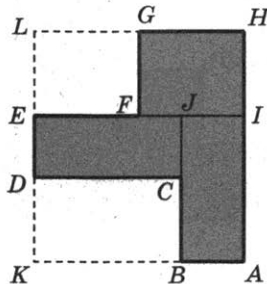
ближе всего к -0,7?

857. Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка — в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

858. Требуется разметить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 1800 м^2 , состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где

$$FG = EF = 10 \text{ м}, BC = 15 \text{ м} \text{ и } CD \geq 40 \text{ м}.$$

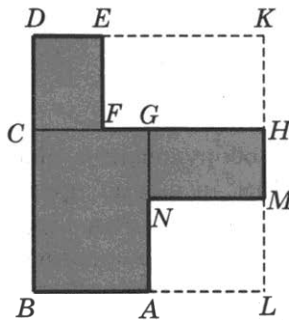
Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL , LH и CD , при которых периметр является наименьшим.



859. Требуется разметить на земле участок $ABDEFHMN$ площадью 2300 м^2 , состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где

$$EF = MN = 20 \text{ м}, FH = 35 \text{ м} \text{ и } AN \geq 30 \text{ м}.$$

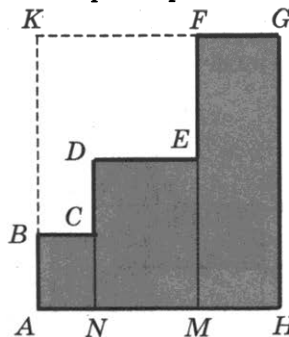
Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL , BL и AN , при которых периметр является наименьшим.



860. Требуется разметить на земле участок площадью 3700 м^2 , состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму многоугольника $ABCDEFHG$, изображенного на рисунке, где

$$BC = 25 \text{ м}, DE = 40 \text{ м}, EF = 30 \text{ м} \text{ и } CD \geq 30 \text{ м}.$$

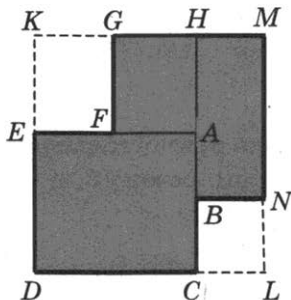
Найдите наименьший периметр такого участка и укажите какие-нибудь значения длин KG , KA и CD , при которых его периметр является наименьшим.



861. Требуется разметить на земле участок площадью 1050 м^2 , который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника $BCDEFGMN$, изображенного на рисунке, где

$$EF = FG = 20 \text{ м}, \quad BN = 10 \text{ м} \text{ и } BC \geq 15 \text{ м}.$$

Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KD , KM и BC , при которых его периметр является наименьшим.



- 862.** Найдите площадь правильного треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.
- 863.** Найдите периметр правильного треугольника, если центр описанной около него окружности удален от хорды, равной 2, на расстояние 3.
- 864.** В треугольнике ABC основание D высоты $CD = \sqrt{3}$ лежит на стороне AB . Найдите AC , если $AB = 3$, $AD = BC$.
- 865.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.
- 866.** В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена медиана CM и высота CH , причем точка H лежит между A и M . Найдите отношение $АН : AM$,
- если
- $$CM : CH = 5 : 4.$$
- 867.** Один из углов треугольника равен разности двух других, наименьшая сторона треугольника равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, вдвое больше площади описанного около треугольника круга. Найдите наибольшую сторону треугольника.
- 868.** Окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle A = 30^\circ$, касается катета AC в точке K . Найдите BK .
- 869.** Окружность радиуса 3, центр O которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника, касается катетов. Найдите площадь треугольника, если $OA = 5$.

870. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите $\angle B$, если

$$AE = 1, \quad BD = 3.$$

871. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла. Из точки D опущен перпендикуляр $DM = \sqrt{3}$ на сторону AC . Найдите BC , если $AD = 2\sqrt{3}$.

872. На стороне AB треугольника ABC с углами $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 130^\circ$ как на диаметре построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника.

873. Две равные хорды окружности образуют вписанный угол величиной 30° . Найдите отношение площади части круга, лежащей внутри угла, к площади всего круга.

874. Точка пересечения двух общих касательных к двум непересекающимся окружностям, меньшая из которых имеет радиус r , лежит на линии их центров на расстоянии $6r$ от центра большей окружности и делит отрезок касательной между точками касания в отношении $1:3$. Найдите площадь фигуры, состоящей из двух частей, ограниченных касательными и большими дугами окружностей.

875. Найдите площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями 3 и 4 , если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны.

876. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите $AM:CM$, если площадь треугольника MCN вдвое больше площади трапеции $AMNB$.

877. Прямая, параллельная стороне $AB = 5$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырехугольника $ABMN$, если $MN = 3$.
878. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что

$$AM : MB = 3 : 2 \text{ и } AN : NC = 4 : 5.$$
 В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC , делит отрезок BN ?
879. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F , причем $EF = 8$. Найдите основания трапеции, если их отношение равно 4.
880. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу прямоуг­о­го­льного треугольника с острым углом α и радиусом описанной окружности R .
881. Найдите отношение высот треугольника ABC , опущенных из вершин A и B соответственно, если $\cos \angle A = \frac{1}{5}$, $\sin \angle B = \frac{1}{2}$.
882. Найдите углы треугольника со сторонами 10, 24 и 26.
883. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и B прямые,

$$AB = BC = 3 \text{ и } BD = 5.$$
 На сторонах AD и CD взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = 1$ и $CF = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABCEF$.
884. Одно из оснований равнобедренной трапеции равно 4. Найдите расстояние между точками касания с ее боковыми сторонами вписанной в трапецию окружности радиуса 4.

885. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 5$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D в точках K и L соответственно, а биссектриса угла C пересекает те же биссектрисы в точках N и M соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.
886. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит биссектрису прямого угла в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины.
887. Найдите высоту, биссектрису и медиану, проведенные из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен R .
888. Найдите площадь треугольника со стороной a , противоположащим углом α и противоположащим углом β .
889. Найдите биссектрису прямого угла треугольника с гипотенузой c и острым углом α .
890. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник с острым углом α при основании. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
891. В окружность диаметром 25 вписан равнобедренный треугольник с боковой стороной 20. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
892. Около треугольника ABC описана окружность с диаметром $AD = 2$. Найдите BC , если $AB = 1$ и
 $\angle BAD : \angle CAD = 4 : 3$.
893. Окружность радиуса 5 с центром O , лежащим на стороне AB треугольника ABC , касается сторон AC и BC . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если
 $AO = 13$ и $BO = 7$.

894. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D , что $CD = 2$ и биссектриса CL перпендикулярна прямой DL . Найдите AL .

895. Две окружности радиусов 2 и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A . Общая касательная к ним, проведенная через точку A , пересекает другую общую касательную в точке B . Найдите AB .

896. Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A . Общая касательная к ним в точке A пересекает в точке B другую общую касательную, касающуюся в точке C меньшей окружности с центром O . Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $OABC$.

897. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите KL , если

$$AM = 2, MC = 3 \text{ и } \angle C = \frac{\pi}{3}.$$

898. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон

$$AB = 4 \text{ и } AC = 3$$

в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN , если $BC = 2$.

899. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K . Найдите площадь треугольника $ВОК$, если

$$AC = a, \angle ABC = \alpha,$$

а периметр треугольника ABC равен $2p$.

900. Прямая, касающаяся окружности в точке K , параллельна хорде $AB = 6$. Найдите радиус окружности, если $AK = 5$.

901. Диагонали вписанной в окружность трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 18, а основания относятся, как 1 : 7.
902. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$ вписана в окружность. Найдите радиус окружности, если $\angle CAD = \alpha$.

903. Окружность, проходящая через вершины C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E . Найдите AE , если

$$AD = 4 \text{ и } CE = 5.$$

904. Через точку K диаметра AB окружности проведена хорда MN . Найдите AB , если

$$\angle ABM = 30^\circ, \angle BMK = 15^\circ \text{ и } MK = 3.$$

905. Медианы BM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM , если

$$BC = a \text{ и } AC = b.$$

906. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K . Найдите расстояние от точки K до прямой BC , если

$$BC = a, \angle B = \beta \text{ и } \angle C = \gamma.$$

907. В треугольнике ABC проведена высота BH и медиана BM . Найдите угол $\angle MBH$, если

$$AB = 1, BC = 2 \text{ и } AM = BM.$$

908. Найдите углы треугольника ABC , если его медиана BM равна половине стороны AC , а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC , равен 55° .

909. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны m и n соответственно. Найдите стороны треугольника.
910. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.
911. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK . Найдите площадь круга, описанного около треугольника KBH , если
- $$AC = 1 \text{ и } \angle KCH = \alpha.$$
912. Отрезок, соединяющий основания высот, проведенных к сторонам AB и AC остроугольного треугольника ABC с углом $\angle A = \alpha$, равен l . Найдите BC .
913. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AL . Найдите AL , если
- $$BL = b \text{ и } CL = c.$$
914. В равнобедренной трапеции с боковой стороной 5 основание высоты, проведенной из вершины верхнего основания, делит нижнее основание на отрезки 12 и 3. Найдите верхнее основание трапеции, ее площадь, высоту и диагональ.
915. Найдите площадь треугольника со сторонами a , b и c , его высоту, медиану и биссектрису, проведенные к стороне c , а также радиусы вписанной и описанной окружностей.
916. В треугольник со сторонами a , b и c вписана окружность. Найдите расстояние от противоположной стороне c вершины треугольника до ближайшей точки касания.

917. Зная медианы треугольника, найдите его площадь.
918. Зная высоты треугольника, найдите его площадь.
919. Стороны треугольника равны a, b, c . В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису, проведенную к стороне a ?
920. Углы треугольника равны α, β, γ . В каком отношении точка пересечения высот делит высоту, проведенную из вершины угла α ?
921. Даны две непараллельные стороны a и b параллелограмма. Найдите его диагональ d_1 по известной другой диагонали d_2 .
922. Какова площадь треугольника со сторонами:
 а) 5, 9, 12;
 б) 2, 3, 6;
 в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$?
923. Найдите углы треугольника площадью 3, если две его стороны равны 3 и 4.
924. В треугольнике ABC со стороной $AB = 5$ и высотой $BD = 3$ найдите $\angle BAC$.
925. Две стороны треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найдите третью сторону и два других угла треугольника.
926. Существует ли треугольник с углами
 $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}, \arcsin \frac{\pi}{4}$?
927. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
 а) треугольник — правильный;
 б) все медианы треугольника равны;
 в) все высоты треугольника равны;
 г) все биссектрисы треугольника равны.

928. Докажите, что из медиан любого треугольника можно сложить треугольник. Верно ли аналогичное утверждение для высот треугольника?
929. Докажите, что угол между секущими, выходящими из точки вне круга, измеряется полуразностью двух дуг окружности, расположенных внутри угла.
930. Докажите, что вертикальные углы между пересекающимися хордами измеряются полусуммой двух дуг окружности, на которые они опираются.
931. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключенной между ними.
932. Хорды AB и CD окружности с центром в точке O радиуса R пересекаются в точке E . Докажите, что
$$AE \cdot BE = CE \cdot DE = R^2 - OE^2.$$
933. Через точку A , лежащую вне окружности с центром в точке O радиуса R , проведена секущая и касательная. Секущая пересекает окружность в точках B и C , а касательная касается окружности в точке D . Докажите, что
$$AD^2 = AB \cdot AC = AO^2 - R^2.$$
934. Пусть AD — биссектриса внутреннего или внешнего (в этом случае точка D лежит на продолжении BC) угла треугольника ABC . Докажите, что
$$BD : CD = AB : AC.$$
935. Докажите, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда
$$AB + CD = AD + BC.$$
936. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда
$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

937. Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

938. Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox , и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A . Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB , где точка O — начало координат и

$$f(x) = \sqrt{7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}.$$

939. Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox , и ее абсцисса в два раза больше ординаты точки A . Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB , где точка O — начало координат и

$$f(x) = \sqrt{(7x + 3) \sin x + 7 \cos x + 8}, \quad \frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{4\pi}{5}.$$

940. Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox , и ее абсцисса в два раза больше ординаты точки A . Найдите наименьшее значение площади треугольника AOB , где точка O — начало координат и

$$f(x) = \sqrt{6x + 3 \sin 2x - 13 \sin x + 17}, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{6\pi}{7}.$$

941. Найдите наибольшее значение площади треугольника OPK , где O — начало координат, P — точка на графике функции

$$y = 64x^5 e^{6-4x} + \frac{5}{x}, \quad 0,7 \leq x \leq 2,$$

а K — точка на оси Ox , абсцисса которой равна абсциссе точки P .

942. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю OP , где O — начало координат, а P — точка на графике функции

$$y = 30x^2 e^{3-6x} + \frac{6}{x}, \quad 0,3 \leq x \leq 2.$$

943. Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM , где O — начало координат, а M — точка на графике функции

$$y = 1 - 3 \ln(0,25x - 2), \quad 9 \leq x \leq 11,5.$$

944. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и угол $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD .

945. На стороне BA угла ABC , равного 30° , взята такая точка D , что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

946. В треугольнике ABC

$$AB = 12, \quad BC = 5, \quad AC = 10.$$

Точка D лежит на прямой BC так, что

$$BD : DC = 4 : 9.$$

Окружности, вписанные в каждый из треугольников ABD и ACD , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

947. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что

$$BM : MN = 3 : 5.$$

Найдите BC , если $AB = 12$.

- 948.** Окружности с центрами в точках O и Q радиусами 6 и 10 соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , пересекает окружность меньшего радиуса в точке B (отличной от точки A), а окружность большего радиуса в точке C (отличной от точки A). Найдите высоту треугольника BCQ , проведенную из вершины B , если $\angle AOB = 150^\circ$.
- 949.** Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.
- а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
- б) Найдите $\angle OHI$, если $\angle ABC = 40^\circ$.
- 950.** Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.
- а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
- б) Найдите $\angle OIH$, если $\angle ABC = 40^\circ$.
- 951.** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
- а) Докажите, что $EH \parallel AC$.
- б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 60^\circ$.
- 952.** В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что $CD \perp CE$.
- а) Докажите, что $BH \parallel ED$.
- б) Найдите отношение $BH : ED$, если $\angle BCD = 135^\circ$.

- 953.** Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .
- Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.
 - Найдите отношение $CK : KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.
- 954.** Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.
- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 - В каком отношении его высота делит сторону BC ?
- 955.** В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, а CH — высота.
- Докажите, что $MH \perp NH$.
 - Найдите площадь треугольника PQM , где P — точка пересечения прямых AC и NH , а Q — точка пересечения прямых BC и MH , если $AH = 4$ и $BH = 2$.
- 956.** В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .
- Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.
 - Найдите отношение их площадей, если $\cos \angle BAC = 7/25$.

- 957.** Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2015 г., если в январе 2014 г. она составляла 6250 руб.?
- 958.** В результате проведенного в школе конкурса юных талантов 58% участников получили призы. Довольными итогами конкурса остались 95% участников, причем 60% из них получили призы. Какая часть недовольных результатами конкурса участников получила призы?
- 959.** В банк кладется некоторая сумма денег. В каком случае на счете окажется больше денег: если банк начисляет 6% от имеющейся суммы один раз в год или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1,5%?
- 960.** В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных – от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?
- 961.** В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в таком классе?
- 962.** За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем 12, $11\frac{1}{9}$ и, наконец, 12,5% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$ %. Определите, сколько месяцев вклад хранился в банке?

- 963.** Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продаж по 4402 руб. каждый. Определите цену продажи одной акции видов А и Б.
- 964.** Для заготовки сена фермер 3 раза с интервалом в неделю скашивал на лугу одно и то же количество травы. После 3 покосов масса травы на лугу уменьшилась на 78,3% по сравнению с ее значением до начала покосов. Определите, сколько процентов составляет масса всей скошенной травы от первоначальной массы, если еженедельный прирост травы составляет 10%.
- 965.** Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Найдите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции (без скидок) составляла 1000 рублей.
- 966.** Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех разных магазинах, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?
- 967.** Имеются 3 пакета акций. Общее суммарное количество акций первых 2 пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной

акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете?

968. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

969. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет нужно взять кредит, чтобы общая сумма выплат после его полного погашения составила 38 млн руб.?

970. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет 10% на оставшуюся сумму долга, затем Сергей переводит в банк определенную сум-

му ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

- 971.** В конце года Петр взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: в конце каждого следующего года банк увеличивает оставшуюся сумму долга на определенное количество процентов, затем Петр переводит очередной транш. Петр выплатил кредит за 2 транша, переведя сначала 51 000 руб., а потом — 66 600 руб. Под какой процент банк выдал кредит Петру?
- 972.** По вкладу А в конце каждого года банк увеличивает сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, на 10% в течение 3 лет, а по вкладу Б — на 11%, но только в течение первых 2 лет. Найдите наименьшее целое число процентов за 3-й год по вкладу Б, при котором за все 3 года этот вклад все еще останется выгоднее вклада А.
- 973.** 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца имеющийся на этот момент долг взявшего кредит возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма долговых выплат после полного погашения кредита будет на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .
- 974.** Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?

975. Положительные числа x и y таковы, что 3% от x меньше, чем 2% от y . Какое из чисел меньше: $\frac{y}{x}$ или $\sqrt{2}$?
976. Две подруги отправились в магазин, имея одинаковые суммы на счетах своих кредитных карт. Одна из подруг израсходовала на одну покупку 40% своих денег, вторая израсходовала на первую покупку 20% своих денег, а на вторую покупку 25% оставшихся у нее денег после первой покупки. Какая из подруг израсходовала больше денег?
977. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% влаги. Каков процент влаги в свежих грибах?
978. На плодоовощной базе хранились ягоды, влажность которых составляла 99%. За время хранения влажность ягод уменьшилась на 1% (стала 98%). На сколько процентов уменьшилась масса хранившихся ягод?
979. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле под овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?
980. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 л 40%-го и 6 л 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получили 39%-й раствор кислоты. Сколько литров чистой воды было добавлено?
981. На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — лишь 4%. Найдите средний процент отличников по всем трем

факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X , а на факультете Z — вдвое меньше, чем на факультете X .

982. Популярность продукта A за 2012 г. выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2014 г. сравнялась с популярностью продукта B . Популярность продукта B в 2012 г. снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2014 г. выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта A за 2014 г., если в начале 2012 г. она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта B ?
983. Число 51,2 трижды увеличили на одно то же самое число процентов, а затем трижды уменьшили на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали исходное число?
984. Кооператив на изготавливаемые им изделия первоначально назначил цену выше государственной на определенное число процентов. Через некоторое время кооператив уценил изделия на то же число процентов, в результате чего цена изделия стала на 1% меньше государственной. На какое число процентов кооперативная цена первоначально превышала государственную?
985. Магазин продал книгу со скидкой 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально предполагал получить магазин?
986. В двух мешках вместе находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, находящейся в первом мешке, то в мешках окажется одинаковое количество муки. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

- 987.** Гонорар за сценарий был распределен между тремя соавторами в отношении $8 : 6 : 5$. Если бы этот же гонорар был распределен в отношении $7 : 5 : 4$, то один из соавторов получил бы на 25 у.е. больше, чем он получил на самом деле. Чему равна сумма гонорара?
- 988.** Имеются два слитка золота массой 300 г и 400 г с различным процентным содержанием золота. Каждый слиток нужно разделить на две части таким образом, чтобы из получившихся четырех кусков можно было изготовить два слитка массой 200 г и 500 г с равным процентным содержанием золота. На какие части следует разделить каждый слиток?
- 989.** Алиса и Базилио поделили между собой 39 золотых монет. Число монет, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа монет, доставшихся другому. Квадрат трети числа монет, доставшихся Базилио, меньше числа монет, доставшихся Алисе. Сколько монет досталось каждому?
- 990.** Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе — на 25%, на втором этапе — на 20%, на третьем этапе — на 10%, на четвертом этапе — на 8%. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?
- 991.** Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объем торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август превысить в 3 раза, то суммарный объем торгов, проводимых в течение этих 2 месяцев, возрастет в 2 раза. Найдите отношение объемов торгов, запланированных на июль и на август, и выясните, во сколько раз надо увеличить

план на июль, оставляя неизменным план на август, чтобы суммарный объем торгов, проводимых за эти 2 месяца, возрос в 3 раза.

- 992.** Длину одной из диагоналей выпуклого четырехугольника увеличили на 50%, а длину другой диагонали уменьшили на 10%, оставив угол между диагоналями неизменным. Как изменилась площадь четырехугольника и на сколько процентов?
- 993.** На экзамене по математике 15% сдававших не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число остальных сдававших, верно решивших все задачи, относится к числу не решивших ничего как 5 : 3. Сколько человек сдавали экзамен?
- 994.** В банк был положен вклад под банковский процент 10%. Через год хозяин вклада снял со счета 2000 руб., а еще через год снова внес 2000 руб. Однако вследствие этих действий через 3 года со времени первоначального вложения вклада он получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы получил в итоге вкладчик?
- 995.** 15 января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в % от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях оказалась больше суммы самого кредита?

- 996.** Вклад в целое число миллионов рублей планируется открыть на 4 года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале 3-го и 4-го годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн руб. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через 4 года вклад будет больше 10 млн руб.
- 997.** Наталья хочет взять в кредит 1 000 000 руб. под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет может Наталья взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?
- 998.** Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на оплату телефона?
- 999.** Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?
- 1000.** Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,05, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,04. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,06?

- 1001.** На двух заводах производятся одинаковые товары, но на первом — с помощью более совершенной технологии: все рабочие первого завода за один рабочий день, трудясь суммарно $t \geq 1$ ч, производят суммарно $4\sqrt{t}$ единиц товара, а второго завода — только $3\sqrt{t}$. Владелец этих двух заводов планирует выделять на оплату труда рабочих по 5 000 000 руб. в день, платя каждому из них по 500 руб. в ч. Производство какого наибольшего количества единиц товара в день владелец может организовать на этих двух заводах, установив на каждом из них свое суммарное время работы в день?
- 1002.** На двух заводах производятся одинаковые товары, но на первом — с помощью более дешевой рабочей силы. За один рабочий день все рабочие одного (любого) завода, трудясь суммарно $t \geq 1$ ч, производят суммарно \sqrt{t} единиц товара. Владелец этих двух заводов планирует выделять на оплату труда рабочих по 900 000 руб. в день, платя каждому рабочему первого завода по 200 руб. в ч, а второго — по 250. Производство какого наибольшего количества единиц товара в день владелец может организовать на этих двух заводах, установив на каждом из них свое суммарное время работы в день?
- 1003.** Для охраны объекта в течение одной рабочей недели (5 суток) заказчик заключил договор с бригадой охранников. По договору каждый член бригады указывает один промежуток времени своего предполагаемого дежурства (в данную рабочую неделю) так, чтобы в итоге объект всегда находился под охраной, после чего заказчик оставляет любую часть охранников, которая обеспечивает круглосуточную охрану, и оплачивает их работу из расчета 500 руб. в час каждому. Какую наименьшую сумму денег достаточно подготовить заказчику заранее для гарантированной возможности расплатиться с бригадой?

- 1004.** На охрану объекта заказчик выделил 80 000 руб., заключив договор с бригадой охранников. По договору заказчик заранее задает весь период (отрезок) времени охраны, а каждый член бригады указывает один промежуток времени своего предполагаемого дежурства (в заданный период) так, чтобы в итоге объект всегда находился под охраной, после чего заказчик оставляет любую часть охранников, которая обеспечивает постоянную охрану, и оплачивает их работу из расчета 250 руб. в час каждому. Какой наибольший период времени охраны заказчик сможет гарантированно оплатить?
- 1005.** Клиент 31 декабря взял в банке кредит в размере S руб. под фиксированный процент (годовых). Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает имеющийся на этот момент долг на $p\%$, затем клиент переводит в банк фиксированную сумму в a руб. в качестве частичного (или полного) погашения долга. В итоге клиент ровно за 2 года выплатил долг полностью. Если бы он платил каждый год не по a руб., а по b руб., то выплатил бы долг ровно за 4 года. Зная произвольные две из трех величин a , b и p , найдите третью, а также величину S .

1006. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

1007. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} (a + 1)x - y = a + 1, \\ x + (a - 1)y = 2 \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

1008. Найдите все значения a , при каждом из которых сис-

$$\text{тема } \begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases} \text{ имеет бесконечно много решений.}$$

1009. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases} \text{ не имеет решений.}$$

1010. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

1011. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} (a - 4)x + 2y = 4, \\ (a - 4)^3 x + 4ay = 16. \end{cases}$$

1012. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases} \text{ имеет решения и всякое решение}$$

удовлетворяет неравенству $x > y$.

1013. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} 3x - y = a, \\ 6x - ay = 4, \\ x > 0 > y \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

1014. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases} \text{ имеет ровно три различных}$$

решения.

1015. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax \end{cases} \text{ имеет ровно три различных}$$

решения.

1016. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 2y - 8) = |x|(2y - 8), \\ y = x + a \end{cases} \text{ имеет ровно три раз-}$$

личных решения.

1017. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

1018. Найдите наименьшее целое значение a , при котором уравнение

$$x^2 - 2(a+2)x + 12 + a^2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

1019. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$$

не имеет корней.

1020. Найдите все целые значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$$

не имеет корней.

1021. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + 2(a + 1)x + (a + 3) = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

1022. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет два корня, сумма которых равна нулю.

1023. Найдите все значения a , при каждом из которых один корень уравнения

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$$

вдвое больше другого.

1024. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a$ имеет ровно три различных решения.

1025. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма квадратов чисел, составляющих решение системы $\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1, \end{cases}$ будет наименьшей.

1026. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трехчлена

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$$

принимает наименьшее значение.

1027. Для каждого значения a решите уравнение

$$4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0.$$

1028. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2 \cos 2x - 4a \cos x + a^2 + 2 = 0$$

не имеет корней.

1029. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a - 2 \cos x = x^2$ имеет ровно один корень.

1030. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2 + 1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$$

имеет ровно два различных корня.

1031. Для каждого значения a решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2.$$

1032. Для каждого значения a решите неравенство

$$3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0.$$

1033. Найдите все значения a , при каждом из которых область значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$$

содержится в интервале $(-3; 2)$.

1034. Найдите все значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \geq \frac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$$

содержит какой-нибудь луч на числовой прямой.

1035. Для каждого значения a решите уравнение

$$|x + 3| - a|x - 1| = 4.$$

1036. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2|x - 2| + a + x = 4$$

имеет хотя бы один корень, причем все его корни лежат на отрезке $[0; 4]$.

1037. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - (a + 1)x + 3(a - 2)) \log_{a-x}(2a - x - 1) = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

1038. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases} \text{ имеет решения и всякое}$$

решение удовлетворяет неравенству $y > 1 - x$.

1039. Найдите все значения a , при каждом из которых для любого b найдется c такое, что система

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

1040. Найдите все значения a , при каждом из которых для

$$\text{любого } b \text{ система } \begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8z = 8 \end{cases} \text{ имеет хотя}$$

бы одно решение.

1041. Найдите все тройки (a, b, c) при которых уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственный корень $x = -1$, причем

$$a + b + c = 1.$$

1042. Известно, что уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

не имеет корней, и

$$a + b + c < 0.$$

Найдите знак c .

1043. Числа $a < 0$ и b таковы, что $x = 7$ является корнем уравнения

$$ax^2 + bx + 2 = 0.$$

Решите неравенство

$$ax^4 + bx^2 + 2 > 0.$$

1044. Найдите все значения a , при каждом из которых графики функций

$$y = \frac{3x + 1}{x} \text{ и } y = \frac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$$

разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

1045. Для каждого значения a решите уравнение

$$\log_a(x^2 - 3a) = \log_a(ax^2 - 3x).$$

1046. Найдите все значения a , при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$$

удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

1047. Для данных чисел $a = \log_y x$ и $b = \log_z x$ найдите

$$\log \sqrt[3]{xyz} \left(\frac{yz}{x^3} \right)^2.$$

1048. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}} \left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x + a - 5}{5} \right) > 0$$

выполняется для всех x .

1049. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} a(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

1050. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \\ x^2 + y^2 \leq a \end{cases}$ имеет единственное решение.

1051. Для каждого значения a определите, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

1052. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - x^2 = |x^2 - \frac{3}{2}x - 1|, \\ y + 4x = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1053. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

1054. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{a^2x+2a}{ax+a^2-2} \geq 0, \\ ax+a > \frac{5}{4} \end{cases}$$

не имеет решений.

1055. Найдите все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

1056. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно три различных корня.

1057. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = a(2 \sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, больших 3.

1058. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8} \sin x - a)$$

определена при всех x .

1059. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$$

выполняется при всех x .

1060. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$5 \cos x + \sin x + \cos(x - b) = a$$

имеет решение:

а) хотя бы при одном b ;

б) при любом b .

1061. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2 \cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет хотя бы один корень.

1062. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a + 3 \leq 4 \sin y - 3 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1063. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x + y + z = x^2 + 4y^2, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

1064. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1065. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} 4x = a + 3 - y^2 + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

1066. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1067. Найдите все натуральные n , при каждом из которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по ее семнадцатому члену и сумме первых n членов.

1068. Найдите наибольшее значение a , при котором уравнение

$$x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$$

с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2 .

1069. При каких значениях параметра n уравнение

$$15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$$

не имеет корней?

1070. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$4 \sin x + 9 = p(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

имеет хотя бы один корень.

1071. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$7 - 2 \cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

имеет хотя бы один корень.

1072. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$3 - 2 \cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

имеет хотя бы один корень.

1073. При каких значениях p уравнение

$$\cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -7$$

имеет решения?

1074. При каких значениях p уравнение

$$3 \cos 2x + \frac{2p}{\sin x} = -17$$

имеет решения?

1075. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$4 \cos^3 x + p = 7 \cos 2x$$

не имеет корней.

1076. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$4 \sin^3 x = p - 3 \cos 2x$$

не имеет корней.

1077. При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x ?

1078. При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x + 2)$ и $\log_a(\sin x + 3)$ равна 1 хотя бы при одном значении x ?

1079. При каких значениях a сумма $\log_a \frac{3 + 2x^2}{1 + x^2}$ и $\log_a \frac{5 + 4x^2}{1 + x^2}$ будет больше единицы при всех x ?

1080. При каких значениях a сумма $\log_a \frac{4+3|x|}{1+|x|}$ и

$\log_a \frac{6+5|x|}{1+|x|}$ будет больше единицы при всех x ?

1081. При каких значениях a сумма

$\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ не равна единице ни при

каких значениях x ?

1082. При каких значениях a сумма $\log_a (\sqrt{1-x^2} + 1)$ и

$\log_a (\sqrt{1-x^2} + 7)$ будет меньше единицы при всех допустимых значениях x ?

1083. При каких значениях a выражение

$$1 + \sin x (3 \sin x + a \cos x)$$

не равно нулю ни при каких значениях x ?

1084. При каких значениях a выражение

$$3 + \cos x (a \cos x + 4 \sin x)$$

не равно нулю ни при каких значениях x ?

1085. При каких значениях a выражение

$$3 + \sin x (2 \sin x + a \cos x)$$

будет равно -1 хотя бы при одном значении x ?

1086. При каких значениях a выражение

$$2 + \cos x (5 \cos x + a \sin x)$$

будет равно 1 хотя бы при одном значении x ?

1087. При каких значениях a выражение $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$

больше выражения $0,25^{1-|a|-\log_2 \sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x ?

1088. При каких значениях a выражение $(1 - |x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0,2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x ?
1089. При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\lg \sin x - a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x) + \log_7 a}$ при всех допустимых значениях x ?
1090. При каких значениях a выражение $(\cos x)^{\log_3(\cos x) - |a|}$ больше выражения $3^{\log_9(1-\sin^2 x) + a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x ?
1091. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 9^a + 3^{2+a} - 1$ и $c = 3^{2-a} - 9^{-a} - 5$ меньше 9.
1092. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 4^a + 2^{3+a} - 3$ и $c = 2^{3-a} - 4^{-a} - 9$ меньше 6.
1093. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 9^{-a} + 3^{2-a} - 4$ и $c = 3^{2+a} - 9^a - 8$ не превосходит 6.
1094. Найдите положительные значения a , при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b = 6a^2(2a^{-2} - a) - a^6$ и $c = a^{-6} - 6a^{-3} + 1$ не меньше -4 .
1095. Найдите положительные значения a , при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b = a^4(1 - 5a^{-2}) - 1$ и $c = a^{-3}(5a - a^{-1}) - 1$ больше -7 .

1096. Найдите все значения a , бóльшие 1, при каждом из которых наименьшее из двух чисел
 $b = 2 \log_a 27a - \log_a^2 3 + 1$ и $c = \log_3^2 a - \log_3 9a^6 + 6$
больше -4 .

1097. Найдите все значения a , бóльшие 1, при каждом из которых наименьшее из двух чисел
 $b = \log_3^2 a - \log_3 (9a^5) - 1$
и $c = 8 - \log_a (243a) - \log_a^2 3$
не меньше -7 .

1098. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству

$$(2a - 1)x^2 < (a + 1)x + 3a$$

при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(1; 2)$.

1099. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения
 $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2 .

1100. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-2; -1)$ значение выражения $x^4 - 2x^2$ не равно значению выражения $ax^2 + 5$.

1101. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-3; -1)$ значение выражения
 $x^4 - 7x^2 - 3$ не равно значению выражения ax^2 .

1102. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-5; -1)$ значение выражения $x^2 - 3$ не равно значению выражения $(a + 4)|x|$.

- 1103.** Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-5; -2]$ значение выражения $x^2 - 4|x|$ не равно значению выражения $a|x| + 4$.
- 1104.** Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(4; 8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a - 1)\log_2 x$.
- 1105.** Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(3; 9]$ значение выражения $\log_3^2 x + 3\log_3 x$ не равно значению выражения $9 + a\log_3 x$.
- 1106.** Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[1; 2)$ значение выражения $4^x - 2 \cdot 2^x - 6$ не равно значению выражения $a2^x$.
- 1107.** Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2 .

- 1108.** Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{(2^x + 3\sqrt{2} \cdot 2^{-x} - 5) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x-1} - 3)} \leq 0$$

не имеет решений.

- 1109.** Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (2^x + 2\sqrt{6} \cdot 2^{-x} - 5)}{(3 \sin \sqrt{x-1} - 4) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

1110. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (2x^7 + \sqrt{6}x^{-7} - 5)}{(3 \sin \sqrt{x-1} - 4) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

1111. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (3 \cos \sqrt{x-1} - 1)}{(3x^6 + \sqrt{10}x^{-6} - 4) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

1112. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{(\log_2 x + 3\sqrt{3} \cdot \log_x 2 - 6) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x-4} - 4)} \leq 0$$

не имеет решений.

1113. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (\log_3 x + 2\sqrt{6} \cdot \log_x 3 - 5)}{(3 \cos \sqrt{x-9} - 4) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

1114. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (4 \sin \sqrt{x-1} - 1)}{(3\sqrt[5]{x^3} + \sqrt{10}\sqrt[5]{x^{-3}} - 3) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

1115. Найдите все значения a , при каждом из которых из неравенств $0 \leq x \leq 1$ следует неравенство

$$(a^2 + a - 2)x^2 - (a + 5)x - 2 \leq 0.$$

1116. Найдите все значения a , при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leq a$ следует неравенство

$$(|x| + 3)(|y| + 3)x \leq 25.$$

1117. Для каждого значения a найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a.$$

1118. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{(2\sqrt[4]{x^5} + \sqrt{7}\sqrt[4]{x^{-5}} - 7) - a}{a - (\cos \sqrt{x-1} - 4)} \leq 0$$

не имеет решений.

1119. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{a - (x^{\frac{1}{4}} + 2\sqrt{5} \cdot x^{-\frac{1}{4}} - 5)}{(3 \sin \sqrt{x-16} - 4) - a} \leq 0$$

не имеет решений.

1120. Найдите все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции

$y = (a^x - a^{ax+2})^{-0.5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

1121. Найдите все положительные значения a , при которых область определения функции

$$y = \left((\sqrt{a})^{2x+1} + \sqrt{x} \cdot a^3 - x^{0,5+x \log_x a} - (\sqrt{a})^7 \right)^{0,5}$$

содержит не более двух целых чисел.

1122. Найдите все значения a , при которых область определения функции

$$y = \left(a^{x+0,5} + \sqrt{a}^{8+\log_a x} - x^{0,5+x \log_x a} - a^{4,5} \right)^{0,5}$$

содержит ровно два целых числа.

1123. Найдите все положительные, не равные 1, значения a , при которых область определения функции

$$y = \left(a^{x+3} \cdot a^2 + a^{3+5 \log_a x} - x^{5+x \log_x a} - (\sqrt{a})^{16} \right)^{0,5}$$

не содержит двузначных натуральных чисел.

1124. Найдите все значения a , при которых область определения функции

$$y = \left(a^{x+1} \cdot x^{4 \log_x a} + a^{3+5 \log_a x} - (\sqrt{x})^{10+2x \log_x a} - \sqrt{a^{16}} \right)^{-0,5}$$

содержит ровно три целых числа.

1125. Найдите все значения a , при которых область определения функции

$$y = \lg \left(a^{x+2} \cdot x^{3 \log_x a} + a^4 \cdot x^5 - (\sqrt{x})^{10+2x \log_x a} - (\sqrt{a})^{18} \right)$$

содержит ровно одно целое число.

1126. Из области определения функции

$$y = \log_3 \left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} \right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a , при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

1127. Из области определения функции

$$y = \log_7 \left(a^a - a^{\frac{7x+4}{x+4}} \right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения a , при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

1128. Из области определения функции

$$y = \log_7 \left(a^a - a^{\frac{6x+1}{x+1}} \right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения a , при которых такая сумма будет больше 4, но меньше 7.

1129. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$x(x-2) \leq (a+1)(|x-1|-1)$$

содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

1130. Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства

$$x(x-2a-4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$$

нельзя расположить два отрезка длиной 1,5 каждый, которые не имеют общих точек.

1131. Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства

$$x(x-2a-6) + a^2 < \frac{6a^2}{x} - 12a$$

можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

- 1132.** Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{36 - (a + 12)x}{x^2} < \frac{12a}{x^2} \left(\frac{3}{x} - 1 \right) - 1$$

содержит число 7, а также содержит два непересекающихся отрезка, каждый из которых длиной 7.

- 1133.** Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x} \left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2} \right)$$

содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

- 1134.** Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$x^2 - \frac{25a}{x} + 10a < (10 + a)x - 25$$

содержит какой-нибудь отрезок длиной 7, но не содержит никакого отрезка длиной 9.

- 1135.** Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$3(2a + 3) - x(a - x) < 3 \left(\frac{3a}{x} + 2x \right)$$

содержит какой-нибудь отрезок длиной 5, но не содержит никаких двух непересекающихся отрезков, каждый из которых длиной 3.

- 1136.** Известно, что уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p , при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x + 1}{21 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 3}.$$

1137. Даны два уравнения

$$\log_5(x(p^2 + 6)) = p + 5 - 2x$$

$$\text{и } x + \frac{3}{x} = \frac{x^2(5p + 1) + (4 - 3p)x + 3}{x(3p + 2)}.$$

Значение параметра p выбирается так, что $3p + 2 \neq 0$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p - 3$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1138. Даны два уравнения

$$\log_7(x(12 + \sqrt{-p})) = p(p - 1) - 6x + 3$$

$$\text{и } 2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p - 3)x + 15}{x(p + 1)}.$$

Значение параметра p выбирается так, что $p \leq 0$, $p \neq -1$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p + 5$ дает число различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1139. Даны два уравнения

$$\log_2(x\sqrt{17 - 4p}) = 3 - 4p - 5x$$

$$\text{и } 3x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2(p - 1)x + 3}{x(1 + p)}.$$

Значение параметра p выбирается так, что $17 - 4p > 0$, $p \neq -1$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $5 + 3p$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1140. Даны два уравнения

$$\frac{x^3 + (6p + 13)x + 4}{x - 1} = x^2 + p$$

$$\text{и } 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x+6}\right) = 14 - (3 + 4(p+1)^{-2})x.$$

Значение параметра p выбирается так, что $p \neq -1$ и при умножении числа различных корней первого уравнения на число различных корней второго уравнения получается число $p + 3$. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1141. Даны два уравнения

$$\frac{x^4 + 4(2 - p)x + (p^2 - 3p + 10)}{x^2 + p} = x^2 - p - 4$$

$$\text{и } 4 \cos\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right) = (3 + \sqrt{p+3})x - 5.$$

Значение параметра p выбирается так, что $p \geq -3$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $3 + p$ дает число различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1142. Даны два уравнения

$$\sqrt{54p + 73 - 3(24 + 19p)x} = 3x - 3 - 2p$$

$$\text{и } \left(1 + 9^{\frac{p+2}{p+3}}\right)^x = 37 - x.$$

Значение параметра $p \neq -3$ выбирается так, что число различных корней первого уравнения равно сумме

числа $p + 2$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1143. Даны два уравнения

$$\sqrt{8(p+2)x - (16p+31)} = 2x + p - 2$$

$$\text{и } \left(3 + 3^{\frac{p+3}{p-1}} \right)^x = 26 - 5x.$$

Значение параметра $p \neq 1$ выбирается так, что число различных корней первого уравнения равно произведению числа $0,5(p+3)$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1144. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4 \sin a - 3$ и $8 \cos 2a + 16 \sin a + 1$ являются решениями неравенства

$$\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3 |x-9| - 2} \geq 0.$$

1145. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4 \cos a + 4$ и $8 \cos 2a - 32 \cos a + 23$ являются решениями неравенства

$$\frac{1 - \log_5 |x-4|}{(114 - x - 3x^2)\sqrt{x+3}} \leq 0.$$

1146. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $3 \sin a + 5$ и $9 \cos 2a - 36 \sin a - 18$ являются решениями неравенства

$$\frac{(25x - 3x^2 + 18)\sqrt{x-1}}{\log_4 |x-7| - 1} \geq 0.$$

1147. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-2}$ и $3a \cdot 2^a - 4a^2 \cdot 4^{a-3} - 27$ являются решениями неравенства

$$\log_{x-5,5} \left(\log_4 \frac{x-13}{x-10} \right) \geq 0.$$

1148. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a \cdot 4^a$ и $143 - 3a \cdot 4^{a+1,5} + a^2 \cdot 16^a$ являются решениями неравенства

$$\log_{12,5-x} \left(\log_4 \frac{x+5}{x+2} \right) \geq 0.$$

1149. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-2} - 5$ и $2a^2 + 24a\sqrt{a-2} - a^3 - 131$ являются решениями неравенства

$$\log_{2x-12} \left(\log_5 (2x^2 - 41x + 200) \right) \geq 0.$$

1150. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-6} - 13$ и $6a^2 + 40a\sqrt{a-6} - a^3 - 388$ являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-2} \left(\log_3 (x^2 - 20x + 99) \right) \geq 0.$$

1151. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{3a-11} - 5$ и $11a^2 + 20a\sqrt{3a-11} - 3a^3 - 93$ являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-2} \left(\log_4 \frac{12}{\sqrt{3x-12}} \right) \leq 0.$$

1152. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{2a-5} - 2$ и $5a^2 + 6a\sqrt{2a-5} - 2a^3 - 5$ являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x} \left(\log_2 \frac{10}{\sqrt{5x+5}} \right) \leq 0.$$

1153. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

1154. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$$

выполняется для любого x .

1155. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15| \text{ больше } 1.$$

1156. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1157. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1158. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ y = 2 + ax \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

1159. Решите уравнение $f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30$, если известно, что

$$f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 25, & x \geq 4, \\ 2^x + \frac{9}{5-x}, & x < 4. \end{cases}$$

1160. Для каждого значения a укажите число решений уравнения

$$2ax - 10a = 2 - \sqrt{-x^2 - 6x - 5}.$$

1161. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 29$. Найдите $a_{10} - a_{11}$, если известно, что $a_{30} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 7 + \frac{7}{x-7}, & \text{если } x < 7, \\ 5 - \frac{41}{x} + \log_2 \left(8 - \frac{77}{x+3} \right), & \text{если } x \geq 7. \end{cases}$$

1162. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{28} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 27$. Найдите $a_4 - a_7$, если известно, что

$$a_{28} = 0, \text{ а } f(x) = \begin{cases} 5^x + 4^{1-x} - 6, & \text{если } x \leq -2, \\ \frac{26}{x+2} - 2, & \text{если } x > -2. \end{cases}$$

1163. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{39} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 38$. Найдите a_4 , если известно, что $a_{39} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 3^x + 5^{-\frac{8}{x+1}} - 10, & \text{если } x \leq -5, \\ \frac{105}{x+5} - 5, & \text{если } x > -5. \end{cases}$$

1164. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{28} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 27$. Найдите $a_9 + a_7 - a_6$, если известно, что

$$a_{28} = 0, \text{ а к } f(x) = \begin{cases} \frac{3x-3}{x-3}, & \text{если } x < 3, \\ \sqrt[5]{\frac{x-4}{x-2}} + \sqrt{\frac{27x-17}{3x+7}}, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

1165. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{19} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 18$. Найдите $a_4 + a_5 + a_6$, если известно, что

$$a_{19} = 0, \text{ а } f(x) = \begin{cases} \frac{5x-5}{x-5}, & \text{если } x < 5, \\ \sqrt[7]{\frac{x-6}{x-4}} + \sqrt{\frac{25x-124}{x-1}}, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$$

1166. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{29} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 28$. Найдите $a_{10} + a_{16} + a_{26}$, если известно,

$$\text{что } a_{29} = 0, \text{ а } f(x) = \begin{cases} 5 \sin(0,05\pi x) + 5, & \text{если } x < 5, \\ 5 - 30 \cdot (x-1)^{-0,5}, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$$

1167. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 29$. Найдите $a_6 + a_7 + a_{27}$, если известно,

$$\text{что } a_{30} = 0, \text{ а } f(x) = \begin{cases} 10 \sin(0,02\pi x) + 10, & \text{если } x < 10, \\ 10 - 140 \cdot (x+6)^{-0,5}, & \text{если } x \geq 10. \end{cases}$$

1168. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{31} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 30$. Найдите $a_8 + a_{18} + a_{28}$, если известно, что $a_{31} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+12}{6-x}, & \text{если } x < 2, \\ 2 \sin(0,1\pi x + 1,3\pi) - 2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

1169. Перед каждым из чисел 14, 15, ..., 20 и 6, 7, ..., 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
1170. Множество чисел назовем «красивым», если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
- а) Является ли множество $\{200, 201, 202, \dots, 299\}$ «красивым»?
- б) Является ли множество $\{2, 4, 8, \dots, 2^{100}\}$ «красивым»?
- в) Сколько «красивых» четырехэлементных подмножеств в множестве $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$?
1171. Множество чисел назовем «красивым», если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.
- а) Является ли множество $\{100, 101, 102, \dots, 199\}$ «красивым»?
- б) Является ли множество $\{2, 4, 8, \dots, 2^{2016}\}$ «красивым»?
- в) Сколько «красивых» четырехэлементных подмножеств в множестве $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$?
1172. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанные на доске, заменяются двумя числами: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить или 3 и 5, или 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

1173. Каждое из чисел 4, 5, ..., 10 умножают на каждое из чисел 10, 11, ..., 18 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 63 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1174. На доске написано более 50, но менее 60 чисел. Все числа — целые, а их среднее арифметическое равно 2. Среднее арифметическое всех неположительных из них равно -5 , а всех неотрицательных 10. Сколько чисел написано на доске? Каких чисел написано больше: неположительных или неотрицательных? Какое наименьшее количество неотрицательных чисел может быть среди них?

1175. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

- 1176.** Первый член геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем равен 5, а разность между утроенным вторым членом и половиной третьего — больше 20. Найдите знаменатель прогрессии.
- 1177.** После деления двузначного числа на сумму его десятичных цифр в частном получилось 7, а в остатке 6. После деления того же числа на произведение его цифр в частном получилось 3, а в остатке 11. Найдите это число.
- 1178.** Ученик перемножил два данных натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик правильно получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.
- 1179.** Мастер делает в час целое число деталей, большее 5, а каждый из его учеников — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе на 1 ч быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?
- 1180.** На факультет подано от немедалистов на 600 заявлений больше, чем от медалистов. Девушек среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в 5 раз, а юношей среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в n раз, где n — натуральное число и $6 \leq n \leq 13$. Найдите общее число заявлений, если среди медалистов юношей на 20 больше, чем девушек.
- 1181.** Имеется два проекта застройки микрорайона. По первому проекту предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12 096 квартир. По второму проекту предполагается построить на 8 домов больше, причем домов также одинаковых, но с большим числом квартир в каждом, и содержащих в общей сложности 23 625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

1182. Авиалинию, связывающую два города, обслуживают самолеты только трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолетов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

1183. На клетчатой бумаге выделен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно простые и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

1184. А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

1) Какая буква в циклически повторяющемся наборе встречалась наиболее часто?

2) Может ли циклически повторяющийся набор при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

1185. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$3(x - 3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33.$$

1186. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$3x = 5y^2 + 4y - 1$$

и докажите, что для любого такого решения (x, y) число $x^3 + y^3$ — нечетное.

1187. Найдите наименьшее нечетное натуральное число, кратное 9 и дающее остаток 7 при делении на 13.
1188. Первая бригада изготовила деталей на 15% больше, чем вторая. Все детали уложили в два ящика: в первый ящик — менее 1000 деталей, а во второй — более 1000. Сколько деталей положили в первый ящик, если в нем оказалось $\frac{2}{3}$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $\frac{1}{7}$ изготовленных второй?
1189. Найдите число студентов, сдавших экзамен, если шестая их часть получила оценку «удовлетворительно», 56% — «хорошо», а 14 человек — «отлично», причем отличники составили более 4%, но менее 9% от общего числа экзаменовавшихся студентов.
1190. Студенты сдавали экзамены в два потока в нескольких аудиториях. В каждом потоке число студентов, экзаменовавшихся в каждой аудитории, было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их пришлось бы провести в три потока, причем в каждом потоке в каждой аудитории студентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Какое наименьшее число студентов могло быть проэкзаменовано при этих условиях?
1191. В двух коробках лежали карандаши: в первой — красные, во второй — синие, причем красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из переложённых карандашей составляли синие. В итоге красных ка-

рандашей в первой коробке оказалось на 46 больше, чем во второй. Найдите общее количество синих карандашей.

1192. Найдите все пары целых чисел a и b , для каждой из которых уравнение

$$\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} - a \cdot 2^{\sin \pi a x} - \left| \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \cdot 2^{\sin \pi a x} \right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных корней.

1193. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$a^3 |y| \leq \sqrt{2}(a^2 - x^2)$$

имеет наименьшее количество целочисленных решений.

1194. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$x^2 - 3x + 3 |x + a| + a \leq 0$$

имеет наибольшее количество целочисленных решений.

1195. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

1196. Найдите все целые a , при каждом из которых графики функций

$$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 2a) \text{ и } y = \log_2(x - 2a^3 - 3a^2)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

1197. Найдите все a , при каждом из которых уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2} \right)^x + \left(\frac{3}{2} \right)^{a-x} - \frac{3}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^a - \frac{5}{8} \right) \times \\ \times \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-2x-3} - 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-5} + 2 \right) = 0$$

имеет хотя бы один корень и все его корни — целочисленные.

1198. Первые 80 км пути из одного пункта в другой автобус идет по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге, на два часа дольше. Совершив более четырех рейсов по маршруту туда и обратно, он затратил менее 168 ч, включая стоянки в конечных пунктах. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге, если за время, которое автобус провел в движении, он со скоростью, равной среднему арифметическому этих двух скоростей, проехал бы 2100 км.

1199. Когда груз разложили в вагоны по 80 т, один вагон оказался недогружен. Если бы груз разложили в вагоны по 60 т, то понадобилось на 8 вагонов больше, причем один вагон опять оказался недогруженным. Если же груз разложили в вагоны по 50 т, то понадобилось еще на 5 вагонов больше, причем все вагоны оказались полными. Найдите вес груза.

1200. В саду было подготовлено четное число ям для посадки деревьев. После посадки яблонь, груш и слив оказалось, что использовано менее трети ям, груш посажено на 6 больше, чем яблонь, а свободных ям оказалось втрое больше, чем посажено слив. Если бы яблонь посадили втрое больше, то свободных осталось бы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено?

1201. Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

- 1202.** В двух ящиках содержится в общей сложности более 29 деталей. Число деталей, содержащихся в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем втрое превышает число деталей, содержащихся во втором ящике. Утроенное число деталей, содержащихся в первом ящике, превышает удвоенное число деталей, содержащихся во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей содержится в каждом ящике?
- 1203.** Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили вдвое больше денег, чем у него было, после покупки двух игрушек у них еще осталось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп. больше, чем у первого?
- 1204.** Число двухкомнатных квартир в доме вчетверо больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить впятеро, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100?
- 1205.** Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$
- 1206.** Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0.$$
- 1207.** Найдите все целочисленные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1.$$

1208. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = 7^{|y|-1}(z+2), \\ \sin \frac{3\pi z}{2} = 1. \end{cases}$$

1209. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ axy + ayz + azx > xyz \end{cases}$$

имеет ровно пять различных решений в натуральных числах.

1210. Решите уравнение

$$\cos(\pi(x + 7\sqrt{x})) \sin\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})\right) = 1.$$

1211. Найдите все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие равенству

$$\begin{aligned} &\sqrt{3x^2 - 2z^2 + 2y^2 + 2z - 6y + \frac{\sqrt{2}}{4}x - 41} + \\ &+ \sqrt{2x^2 - 4\sqrt{2}(\cos \pi y + \cos \pi z)} = 0. \end{aligned}$$

1212. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 1953^{100}xy - 1995^{100}y^2 = 0.$$

1213. В ящике находится 13 черных шаров и 17 белых. Разрешается:

- увеличить на 1 число черных шаров и одновременно увеличить на 4 число белых;
- увеличить на 2 число черных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;
- уменьшить на 4 число черных шаров и одновременно увеличить на 5 число белых;

г) уменьшить на 5 число черных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая в каком-либо порядке и количестве описанные действия, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 черных шаров и 43 белых?

1214. Две бригады землекопов одинаковой производительности каждая вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найдите число землекопов в каждой бригаде.

1215. Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако не все прибывшие солдаты смогли участвовать в параде. Оставшийся для парада состав перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы построить в виде квадрата. Сколько солдат было в роте?

1216. Три фермера привели баранов для продажи на ярмарке: первый — 10, второй — 16, третий — 26. В первый день они установили одинаковую цену (в целое число рублей), и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый фермер выручил от продажи по 3500 руб.?

1217. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала по 5%, затем по $11\frac{1}{9}\%$, по $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, по 12%. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился

целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

1218. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n - m}{5n + 2m}$, если известно, что она сократима?

1219. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в классе?

1220. Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трех типов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого вида и 100 второго, для сборки 16-квартирного дома — 110 деталей первого типа и 150 второго, а для сборки 21-квартирного дома — 150 деталей первого типа и 200 второго. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

1221. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 19 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого — 3,6 т, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

1222. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства

$$4 \cdot 3^{2x+1} + 3^x < 1.$$

1223. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1,5 у.е., роза — 2 у.е. На покупку гвоздик и роз можно затратить не более 30,5 у.е. При этом число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

1224. Множество состоит из более семи различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 210, а произведение — делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа, причем наибольший общий делитель любых двух из них больше единицы. Найдите все числа, составляющие это множество.

1225. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$ и графиком функции $y = \log_2 x$?

1226. Найдите все целые значения n , для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2 + 2)$ является рациональным.

1227. Сократите дробь

$$\frac{1234567 \overbrace{88 \dots 87}^{2000} 7654321}{12345678 \overbrace{99 \dots 9}^{2000} 87654321}$$

до несократимой.

1228. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в одной из команд было ровно 4 мальчика и 3 девочки?

1229. Билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет считается «счастливым», если первые три его цифры нечетны и различны, а вторые — четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров «счастливых» билетов?

1230. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

1231. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-1} \left(\log_4 \frac{x-11}{x-8} \right) \geq 0,$$

а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

1232. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32} (0,125y^2) - 7. \end{cases}$$

1233. Задумывают несколько натуральных чисел (среди задуманных могут быть и одинаковые). Затем выписывают эти числа и всевозможные их суммы по 2, по 3 и т. д. в порядке неубывания, причем если какое-то

число повторяется несколько раз, то оставляют только одно такое число (остальные числа, равные ему, стирают). Например, если задуманы числа 1, 2, 2 и 3, то будут выписаны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

а) Всегда ли по выписанным числам можно однозначно восстановить задуманные?

б) Могут ли быть выписаны числа: 2, ... , 19, 22?

в) Может ли в задуманном наборе быть не меньше, чем шесть чисел, если выписаны числа: 7, 9, ..., 34, 41?

1234. Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причем каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 60.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 8$?

1235. На доске пишут несколько двузначных чисел (не обязательно различных, без нулей в десятичной записи) общей суммой 363. Затем в каждом числе переставляют цифры (например, число 17 заменяют числом 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше исходной суммы.

б) Может ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше исходной суммы?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

1236. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 6x^3 + 22x^2 + 21x + 6 = 0 \\ \sin \pi x + \cos((6x + 5)y) = \\ = -4y \left(y + \frac{2}{x} + 4 \right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 8 - 3x(1 + 3x)} \cdot \cos 2y \end{cases}$$

не имеет решений.

1237. Найдите все корни уравнения

$$10x^3 - 63x^2 + 48x - 9 = 0,$$

при подстановке каждого из которых в уравнение

$$\begin{aligned} (7x - 1, 1) \sin y + \frac{3}{x} - 9 = \\ = (x + 3, 7) y^2 + \sqrt{\frac{169}{x+1} - 100x^2 + 160x - 169} \cdot \cos 2y \end{aligned}$$

получится уравнение относительно y , имеющее более одного корня.

1238. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 16x^3 + 40x^2 + 29x + 6 = 0 \\ \log_{13+4x} \left(5y + 10 + \frac{3}{x} \right) - 7 = \\ = y(5 + 12x) + \sqrt{\frac{9}{x} - 8x(2x + 1) + 15} \cdot \log_7 y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1239. Найдите все корни уравнения

$$6x^3 + 28x^2 + 39x + 15 = 0,$$

при подстановке каждого из которых в уравнение

$$\begin{aligned} 5 \log_{10+3x} \left(y + 8 + \frac{5}{x} \right) - 3 = \\ = \frac{(13 + 6x)y}{4} + \sqrt{\frac{25}{x} - 3x(7 + 3x) + 5} \cdot \ln(y + 5) \end{aligned}$$

получится уравнение относительно y , имеющее более одного корня.

1240. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 10x^3 + 47x^2 + 52x + 12 = 0 \\ \log_{8+5x} \left(y + \frac{6}{x} + 6 \right) = \\ = \frac{y + 10(x+1)}{y-1} + \sqrt{\frac{36}{x} - 5x(7+5x) + 24} \cdot \lg(y+1) \end{cases}$$

не имеет решений.

1241. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x^3 + 13x^2 + 20x + 14 = 0 \\ (6x + 17)^y - 5 = \frac{7y}{x} + 2^{x+y} \cdot \sqrt{9x(x+3)^2 - 3x^2 + 10x + 49} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1242. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 8x^3 + 18x^2 + 15x + 14 = 0 \\ (10 + 4x)^y - 2 = \\ = y\left(5 + \frac{7}{x}\right) + 7^{x+y} \cdot \sqrt{16x(x+1)^2 + 40x^2 + 89x + 49} \end{cases}$$

имеет хотя бы два различных решения.

1243. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 9x^3 + 18x^2 + 17x + 20 = 0 \\ 2 + (3x + 10)^{y-1} \left(y + 2 + \frac{5}{x} \right) = \\ = y + 11^{x-2y} \cdot \sqrt{9x^2(x+4) + 3(x+7)^2 + 13x - 122} \end{cases}$$

не имеет решений.

1244. Найдите все пары натуральных чисел $m \leq n$ разной четности, удовлетворяющие уравнению $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$.

1245. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b , что если к десятичной

записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

1246. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

1247. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2000, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

1248. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0 \\ 9 \sin \frac{\pi}{x} + \cos((5x + 1)y) = \\ = y \left(y + \frac{2}{x} - 1 \right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1 - 5x)} \cdot \sin y \end{cases}$$

не имеет решений.

Решения с комментариями

13

277. Решите уравнение

$$2 - 3x + x^2 = 2(x - 1)\sqrt{x}.$$

Данное уравнение после возведения в квадрат будет иметь четвертую степень. Ничего не упрощает и обозначение корня через новую переменную, создающее в уравнении четвертую степень прямо сразу, безо всякого возведения.

Зато левая часть уравнения раскладывается на множители, один из которых совпадает с множителем, стоящим перед корнем в правой части. И этим обстоятельством, конечно, надо воспользоваться.

Решение.

$$2 - 3x + x^2 = 2(x - 1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 2(x - 1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = (1 + \sqrt{3})^2 (= 4 + 2\sqrt{3}), \quad \text{т. к. } 1 < \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, 4 + 2\sqrt{3}$.

314. а) Решите уравнение $2 \cos 2x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-5\pi/2; -\pi]$.

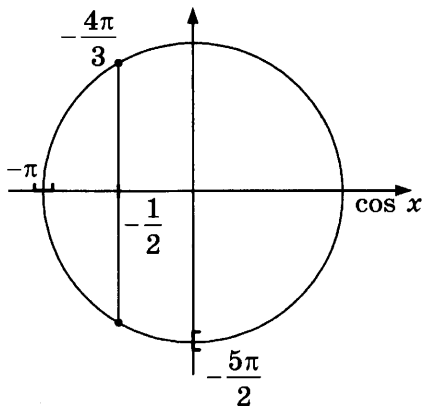
Решение.

$$\text{а) } 2 \cos 2x = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 2 = 4 \cos x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{3}{2} \right) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x \in [-5\pi/2; -\pi] \Leftrightarrow x = -\pi - \frac{\pi}{3} \text{ (см. рис.)}.$$



$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{4\pi}{3}.$$

320. Решите уравнение

$$|\sin x| = \sin x \cdot \cos x.$$

Имеющийся в уравнении модуль раскроем по определению, причем наиболее приятный случай его равенства нулю рассмотрим отдельно.

Решение.

Рассмотрим три случая:

$$1) \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x = \sin x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ 1 = \cos x \ (\Rightarrow \sin x = 0) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$3) \begin{cases} \sin x < 0 \\ -\sin x = \sin x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ -1 = \cos x \ (\Rightarrow \sin x = 0) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

О т в е т : $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

321. Решите уравнение

$$4 \cos x \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} x + \sin x = 0.$$

Представив котангенс в виде дроби, приведем левую часть уравнения к общему знаменателю.

Р е ш е н и е .

$$4 \cos x \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cos^2 x + 4 \cos x + \sin^2 x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \left(\cos x + \frac{1}{3} \right) \left(\cos x + \frac{3}{3} \right) = 0 \\ \cos x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т : $x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

322. Решите уравнение

$$\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 + x^2.$$

Это уравнение упрощается по тому же принципу, что и предыдущие, правда, в результате получается не квадратное, а тригонометрическое уравнение.

Решение.

$$\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 1 - x^2 + x^2 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, \\ -1 \leq x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow -7 \leq 7x \leq 7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{7}n, \text{ где } n = 0, \pm 1 \text{ (т. к. } 6 < 2\pi < 7 \text{)}.$$

Ответ: $x = 0, \pm \frac{2\pi}{7}$.

325. Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x$.

Первое слагаемое в данном уравнении упрощается за счет его сокращения на выражение $\cos x$, неявно фигурирующее и в числителе, и в знаменателе. После этого уравнение становится квадратным относительно переменной $\sin x$.

Решение.

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \left(\sin x - \frac{2}{2} \right) = 0 \\ \sin x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{О т в е т: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

326. Решите уравнение

$$\sin^2 \frac{2x}{5} - 10 \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{x}{5} + 25 = 25 \cos^2 \frac{x}{5}.$$

Это уравнение с помощью основного тригонометрического тождества сводится к однородному уравнению второй степени относительно переменных $\sin \frac{2x}{5}$ и $\sin \frac{x}{5}$. Более того, его коэффициенты неспроста напоминают полный квадрат.

Р е ш е н и е .

$$\sin^2 \frac{2x}{5} - 10 \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{x}{5} + 25 = 25 \cos^2 \frac{x}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \frac{2x}{5} - 10 \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{x}{5} + 25 \sin^2 \frac{x}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{2x}{5} - 5 \sin \frac{x}{5} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} - 5 \sin \frac{x}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{5} \left(\cos \frac{x}{5} - \frac{5}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{5} = 0, \text{ т.к. } \cos \frac{x}{5} < \frac{5}{2},$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{5} = \pi n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Leftrightarrow x = 5\pi n.$$

$$\text{О т в е т: } x = 5\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

329. Решите уравнение

$$x^2 + 1 = 0,5 \left(2 + 6x + 4\sqrt{2x^2 - 6x + 5} \right).$$

Стандартный способ решения уравнений такого типа состоит в том, чтобы, уединив корень квадратный в одной части уравнения, возвести обе части в квадрат. Однако в данном случае описанный способ сопряжен с определенными трудностями, т.к. после возведения уравнения в квадрат получается многочлен четвертой степени.

Присмотримся к выражениям, стоящим под корнем и вне его. Их сравнение, после небольшой перегруппировки слагаемых, показывает, что коэффициенты как при x^2 , так и при x внутри корня вдвое больше, чем снаружи. Это наблюдение позволяет понизить степень введением новой переменной.

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0,5 \left(2 + 6x + 4\sqrt{2x^2 - 6x + 5} \right) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x &= 2\sqrt{2x^2 - 6x + 5} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 4\sqrt{2x^2 - 6x + 5} &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 &= 0, \text{ где } y = \sqrt{2x^2 - 6x + 5} \geq 0, \\ \Leftrightarrow (y - 5)(y + 1) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 5} = 5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5 &= 25 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 5. \end{aligned}$$

Ответ: $x = -2, 5$.

330. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения $\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$ и $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\operatorname{tg} 2x}$ принимают равные значения.

Решение.

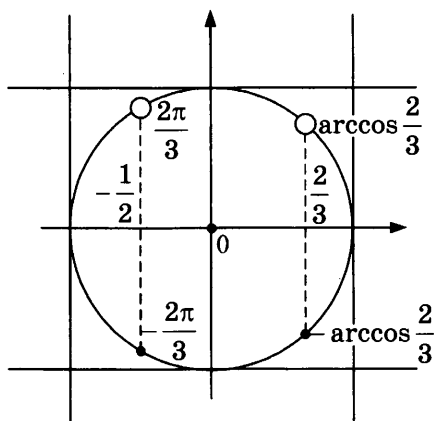
$$\begin{aligned} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} &= \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\operatorname{tg} 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin 2x \cos 2x - (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\operatorname{tg} 2x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0 \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin 2x - 1/2) \cos 2x = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow \cos 2x \neq 0, \text{ т. к. } \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1) \\ \Leftrightarrow 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n. \end{aligned}$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

332. Решите уравнение $\frac{6 \cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0.$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{6 \cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \\ -\sin x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \left(\cos x - \frac{2}{3}\right) = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases} & \text{(см. рис.)} \end{aligned}$$



О т в е т : $x = -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$

335. а) Решите уравнение $8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[3/2; 2]$.

Р е ш е н и е .

$$\text{а) } 8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 3)(4^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3)(2^x - 1)(2^x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1, 3 \Leftrightarrow x = 0, \log_2 3.$$

$$\text{б) } 0 < 3/2 < \log_2 3 < 3, \text{ так как } 3 < 2^3 < 3^2.$$

О т в е т : а) $0, \log_2 3$; б) $\log_2 3$.

367. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = (6^{\sqrt{1-x}} + 7)^2 - 4x^2 - 36^{\sqrt{1-x}} - 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 0,5x^4.$$

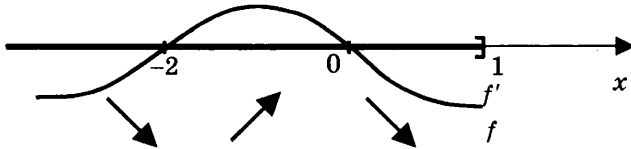
Уничтожив часть слагаемых в формуле для данной функции, мы значительно расширим ее область допустимых значений. И это последнее обстоятельство необходимо учесть.

Решение.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(6^{\sqrt{1-x}} + 7\right)^2 - 4x^2 - 36^{\sqrt{1-x}} - 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 0,5x^4 = \\ &= 36^{\sqrt{1-x}} + 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 49 - 4x^2 - 36^{\sqrt{1-x}} - 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 0,5x^4 = \\ &= 0,5x^4 - 4x^2 + 49 \end{aligned}$$

а) $D(f) : 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1,$

б) $f'(x) = (0,5x^4 - 4x^2 + 49)' = 2x^3 - 8x$
 $\sim x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$
 $\sim -x(x+2), \text{ т.к. } x-2 < 0,$



в) $x = -2$ — единственная точка минимума.

Ответ: -2 .

370. Найдите все значения x , при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$$f(x) = 0,5 \cdot 7^{4x+9} \text{ и } g(x) = 2$$

меньше, чем $1,5$.

Решение.

$$\begin{aligned} 2 - 1,5 &< 0,5 \cdot 7^{4x+9} < 2 + 1,5 \\ \Leftrightarrow 1 &< 7^{4x+9} < 7 \Leftrightarrow 0 < 4x + 9 < 1 \Leftrightarrow -9 < 4x < -8 \\ \Leftrightarrow -\frac{9}{4} &< x < -2. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{9}{4} < x < -2$.

389. Найдите нули функции

$$y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}.$$

Напомним, что нули функции y — это, по определению, корни уравнения $y(x) = 0$.

Поэтому задание состоит в том, чтобы, приравняв правую часть данного равенства к нулю, решить полученное уравнение.

Решение.

$$y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2 - 3x - 9) = 0 \\ x^3 - 8x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$(\text{т.к. } \ln^2(x^2 - 3x - 9) \geq 0 \text{ и } \sqrt{x^3 - 8x - 8} \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 9 = 1 & (\Leftrightarrow (x+2)(x-5) = 0) \\ x^3 - 8x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -2, \text{ т.к. } (-2)^3 - 8 \cdot (-2) - 8 = 0$$

$$\text{и } 5^3 - 8 \cdot 5 - 8 \neq 0.$$

Ответ: $x = -2$.

390. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции

$$f(x) = 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Решение.

Найдем явно область значений данной функции, и тогда станет понятно, сколько в ней целых чисел.

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{16}{-4} \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + 3 \right) = \\ &= -4 \log_2 (\sin(x + \varphi) + 3), \text{ где } \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad E(\sin(x + \varphi)) &= [-1; 1] \\
\Rightarrow E(\sin(x + \varphi) + 3) &= [2; 4] \\
\Rightarrow E(\log_2(\sin(x + \varphi) + 3)) &= [1; 2] \\
\Rightarrow E(f) = E(-4 \log_2(\sin(x + \varphi) + 3)) & \\
&= [-8; -4].
\end{aligned}$$

3. Количество целых чисел в $[-8; -4]$:
 $8 - 3 = 5$.

О т в е т : 5.

391. Решите уравнение

$$7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1.$$

На первый взгляд, совершенно непонятно, как решать такое уравнение — слишком много в нем самых разных тригонометрических функций. А значит, прежде всего, нужно попытаться уменьшить их количество. Для этого распишем тангенс через синус и косинус. То же сделаем с синусом двойного угла, а заодно и с единицей (через основное тригонометрическое тождество).

Р е ш е н и е .

$$7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 3 \cdot 2 \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \quad (= \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (7 + 6 \cos^2 x - \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0, \text{ т.к. } 7 + 6 \cos^2 x \geq 7 > 1 \geq \sin x \cos x,$$

$$\Leftrightarrow x = \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т : $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

394. Решите уравнение

$$32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}.$$

Основная наша цель такова:

- привести уравнение к виду, в котором и левая, и правая части представляют собой степени одного и того же фиксированного числа,
- благополучно отбросить полученные (одинаковые) основания этих степеней.

А пока мы можем лишь отметить, что в обеих частях данного уравнения основания всех степеней порождаются числами 2, 3, 5 или их комбинациями.

Решение.

$$32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$$

$$\Leftrightarrow 2^{5(x+3)} \cdot 3^{3x+1} \cdot 5^{4(x+2)} = (2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)^{x+7}$$

$$\Leftrightarrow 2^{5x-3x} \cdot 3^{3x-x} \cdot 5^{4x-2x} = 2^{21-15} \cdot 3^{7-1} \cdot 5^{14-8}$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^{2x} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^6$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

397. Решите уравнение

$$\sqrt{9 - 4x|x - 4|} - 4x = 3.$$

Решение.

$$\sqrt{9 - 4x|x - 4|} - 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9 - 4x|x - 4|} = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3 \geq 0 \\ 9 - 4x|x - 4| = (4x + 3)^2. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x - 4 \geq 0 & (\Leftrightarrow 4x + 3 \geq 0) \\ 9 - 4x(x - 4) = 16x^2 + 24x + 9 & (\Leftrightarrow 20x^2 + 8x = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x(x + 0,4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset,$$

$$2) \begin{cases} x - 4 \leq 0 \\ x \geq -3/4 \\ 9 + 4x(x - 4) = 16x^2 + 24x + 9 & (\Leftrightarrow 12x^2 + 40x = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3/4 \leq x \leq 4 \\ x(x + 10/3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

О т в е т : $x = 0$.

400. Решите уравнение

$$2 \log_{12} \left(x + \frac{6}{x-5} \right) = \log_{12} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \right) + 3.$$

Если привести к общему знаменателю каждое из двух выражений, стоящих под логарифмами, то можно заметить, что они очень похожи. Лучше сказать, одно из них получается из второго перевертыванием дроби. А это означает, что сами логарифмы в уравнении представляют собой просто *подобные члены*.

Р е ш е н и е .

$$2 \log_{12} \left(x + \frac{6}{x-5} \right) = \log_{12} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \right) + 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_{12} \frac{x(x-5) + 6}{x-5} = \log_{12} \frac{3(x-3) - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_{12} \frac{(x-2)(x-3)}{x-5} = \log_{12} \left(\frac{(x-2)(x-3)}{x-5} \right)^{-1} + 3$$

$$\Leftrightarrow (2+1) \log_{12} \frac{(x-2)(x-3)}{x-5} = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{12} \frac{(x-2)(x-3)}{x-5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x-5} = 12 \quad (> 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 12(x-5)$$

$$(\Rightarrow x \neq 5, \text{ иначе } 6 = 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 17x + 66 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x-11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6, 11.$$

О т в е т : $x = 6, 11.$

461. Решите уравнение

$$4 \log_2 \left(2 + \frac{6}{2x-5} \right) - 8 = 3 \log_2 \left(2 - \frac{3}{x-1} \right).$$

В результате приведения к общему знаменателю под знаками логарифмов в уравнении появляются подобные члены.

Р е ш е н и е .

$$4 \log_2 \left(2 + \frac{6}{2x-5} \right) - 8 = 3 \log_2 \left(2 - \frac{3}{x-1} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_2 \frac{2(2x-5) + 6}{2x-5} = 3 \log_2 \frac{2(x-1) - 3}{x-1} + 8$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_2 \frac{4(x-1)}{2x-5} = 3 \log_2 \frac{2x-5}{x-1} + 8$$

$$\Leftrightarrow 4(2+l) = -3l + 8, \text{ где } l = \log_2 \frac{x-1}{2x-5},$$

$$\Leftrightarrow 7l = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x-1}{2x-5} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-5} = 1 \quad (> 0)$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 2x - 5 \quad (\neq 0, \text{ иначе } \frac{5}{2} = x = 1)$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

О т в е т : $x = 4$.

404. Решите уравнение

$$\sqrt{13 + \frac{4}{\log_x 3}} = 2 \log_3 (3\sqrt{x}).$$

В этом уравнении довольно быстро угадывается новая переменная $l = \log_3 x$.

Р е ш е н и е .

$$\sqrt{13 + \frac{4}{\log_x 3}} = 2 \log_3 (3\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13 + 4 \frac{1}{\frac{1}{l}}} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} l \right), \text{ где } l = \log_3 x,$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13 + 4l} = 2 + l \quad (\Rightarrow l \neq 0, \text{ иначе } \sqrt{13} = 2)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{13 + 4l} = (13 + 4l) - 5$$

$$\Leftrightarrow 4y = y^2 - 5, \text{ где } y = \sqrt{13 + 4l} \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y - 5)(y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13 + 4l} = 5 \Leftrightarrow 13 + 4l = 25$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27.$$

О т в е т : $x = 27$.

409. Решите уравнение

$$\log_{81} (15 - 7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1.$$

Наиболее существенное упрощение данного уравнения дает переход к новому основанию — лучше всего к основанию 3.

Решение.

$$\log_{81} (15 - 7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 (15 - 7x)}{\log_3 81} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 (3 - x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (15 - 7x) = 2 \log_3 (3 - x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 (15 - 7x) = \log_3 (3 - x)^2 \\ 1 \neq 3 - x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 7x = (3 - x)^2 \quad (\Leftrightarrow 15 - 7x = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0) \\ 1 \neq 3 - x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 2) = 0 \\ 2 \neq x < 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: $x = -3$.

413. Решите уравнение

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 31 = (\sqrt{25 - x^2})^2 + x^2.$$

Возведенный в квадрат квадратный корень дает подкоренное выражение. В результате этого уравнение резко упрощается и становится квадратным относительно переменной $\log_2 x$.

Решение.

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 31 = (\sqrt{25 - x^2})^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 31 = 25 - x^2 + x^2 \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0 \\ x^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 3) = 0 \\ -5 \leq x \leq 5 \quad (\Rightarrow \log_2 x < 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

О т в е т : $x = 4$.

416. Решите уравнение

$$\log_{3-4x^2} (9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2 (3 - 4x^2)}.$$

Сразу видно, что выражение, стоящее в правой части уравнения, преобразуется в логарифм по тому же основанию, что и в левой. Этим надо воспользоваться, но без спешки.

Р е ш е н и е .

$$\log_{3-4x^2} (9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2 (3 - 4x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2} ((3 + 4x^2)(3 - 4x^2)) = 2 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2} (3 + 4x^2) + 1 = 2 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2} (3 + 4x^2) = \log_{3-4x^2} (3 - 4x^2) + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-4x^2} (3 + 4x^2) = \log_{3-4x^2} (2(3 - 4x^2))$$

$$\Leftrightarrow 3 + 4x^2 = 2(3 - 4x^2) \quad (\Rightarrow 3 - 4x^2 > 1, \text{ т.к. } 3 + 4x^2 > 2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

О т в е т : $x = \pm \frac{1}{2}$.

419. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2+3x} \text{ и } 3x^2 + 2x$$

принимают равные значения.

Решение.

$$3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2+3x} = 3x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \cdot \frac{1/3}{-1} \log_3(2+3x) = 3x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 + 2x)(\log_3(2+3x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x+2)(\log_3(2+3x) - \log_3 3) = 0 \quad (\Rightarrow 2+3x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\Rightarrow 2+3x > 0) \\ 2+3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 0, \frac{1}{3}$.

434. Найдите все значения x , для которых точки графика функции

$$y = \frac{\log_7(10-2x)}{3-x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции

$$y = \frac{2}{3-x}.$$

Требование этой необычной, как будто бы графической задачи записывается в виде самого обычного неравенства, исследование которого к тому же упрощается тем, что знаменатели обеих его частей одинаковы.

Правда, в связи с данной постановкой задачи возникает весьма тонкий вопрос: куда девать те значения x , для кото-

рых одна функция определена, а другая — нет или, того хуже, обе не определены? Брать такие значения в ответ или нет? Например, можно ли сказать, что несуществующая точка лежит выше какой-то другой, данной точки?

- С одной стороны, кажется, что нет, выше не лежит, т. к. ее просто нет.
- Но, с другой стороны, и ниже-то она ведь тоже не лежит. Не лежит и прямо в данной точке. Значит, выходит, все-таки выше?

Чтобы отметить получившийся логический казус, толковать требование задачи, по-видимому, нужно так: ищутся такие значения x , для каждого из которых значение первой функции *определено* и при этом больше значения второй функции (которое, кстати, тогда тоже определено, что видно из сравнения двух данных формул друг с другом).

Решение 1.

$$\frac{\log_7(10 - 2x)}{3 - x} > \frac{2}{3 - x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7(10 - 2x) - \log_7 49}{3 - x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(10 - 2x) - 49}{3 - x} > 0 \\ 10 - 2x > 0 \end{cases}, \text{ т. к. } (\log_7 u - \log_7 v) \sim (u - v)$$

при $u, v > 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x + 19,5}{x - 3} > 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -19,5 \\ 3 < x < 5. \end{cases}$$

Ответ: $x < -19,5$, $3 < x < 5$.

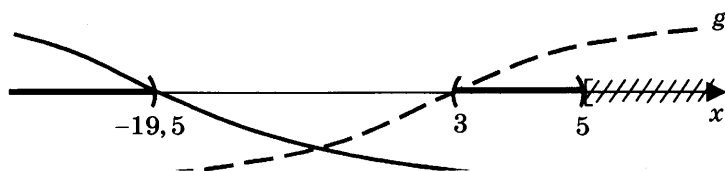
Решение 2.

$$1) \frac{\log_7(10-2x)}{3-x} > \frac{2}{3-x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_7(10-2x)-2}{x-3} < 0.$$

$$2) f(x) = \log_7(10-2x) - 2,$$
$$g(x) = x - 3:$$

$$a) \log_7(10-2x) = 2 \Leftrightarrow 10-2x = 49 \Leftrightarrow x = -19,5;$$

$$b) 10-2x > 0 \Leftrightarrow x < 5.$$



Ответ: изображен на рисунке жирными линиями на оси.

Решение 3.

$$\frac{\log_7(10-2x)-2}{3-x} > 0$$

$$1) \begin{cases} 3-x > 0 \\ \log_7(10-2x) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 10-2x > 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -19,5;$$

$$2) \begin{cases} 3-x < 0 \\ \log_7(10-2x) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 0 < 10-2x < 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < x < 5.$$

Решение оказалось совсем несложным, но будь задача потруднее — преимущества других методов были бы убедительнее (а мы, конечно, должны рассчитывать и на более серьезные задачи).

439. При каких значениях x соответственные значения функций

$$f(x) = \log_2 x \text{ и } g(x) = \log_2(3 - x)$$

будут отличаться меньше, чем на 1?

Задача легко переводится на язык неравенств: тот факт, что два числа отличаются меньше, чем на 1, означает, что их разность по модулю меньше 1.

Решение.

$$|\log_2 x - \log_2(3 - x)| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \log_2 x - \log_2(3 - x) < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < \log_2(3 - x) + 1 \\ \log_2 x + 1 > \log_2(3 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < \log_2(2(3 - x)) \\ \log_2(2x) > \log_2(3 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2(3 - x) \quad (\Rightarrow 3 - x > 0) \\ 2x > 3 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $1 < x < 2$.

444. Найдите значение функции

$$f(x) = 10^{\lg \frac{x^3 - 3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$$

в точке максимума.

Решение.

$$f(x) = 10^{\lg \frac{x^3 - 3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$$

$$= 10^{\lg \frac{x^3 - 3x}{x+5} + \lg(x+5)}$$

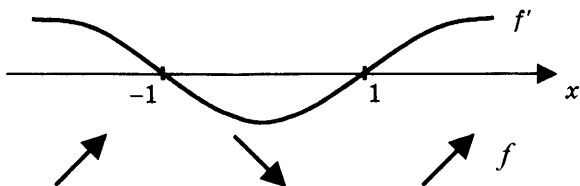
$$= 10^{\lg(x^3 - 3x)}$$

$$= x^3 - 3x$$

а) $D(f)$:

$$\begin{cases} \frac{x^3 - 3x}{x + 5} > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x(x^2 - 3) > 0, \end{cases}$$

б) $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$



в) $-1 \in D(f)$, т. к. $-1 > -5$ и $-1 \cdot ((-1)^2 - 3) > 0$,

г) $x = -1$ — единственная точка максимума,

д) $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.

О т в е т : 2 .

445. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = 48x^2 - 3x^4 - 9x^3 + 0,1^{-\lg(x^3+8)}.$$

Р е ш е н и е .

$$\begin{aligned} f(x) &= 48x^2 - 3x^4 - 9x^3 + 0,1^{-\lg(x^3+8)} \\ &= -3x^4 - 9x^3 + 48x^2 + 10^{\lg(x^3+8)} \\ &= -3x^4 - 9x^3 + 48x^2 + (x^3 + 8) \\ &= -3x^4 - 8x^3 + 48x^2 + 8 \end{aligned}$$

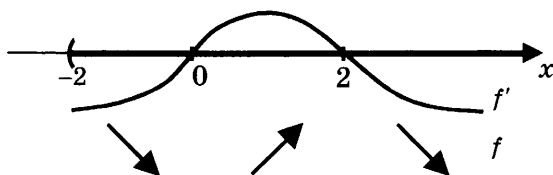
а) $D(f)$:

$$x^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow x^3 > (-2)^3 \Leftrightarrow x > -2,$$

б) $f'(x) = (-3x^4 - 8x^3 + 48x^2 + 8)' = -12x^3 - 24x^2 + 96x$

$$\sim -x(x^2 + 2x - 8) = -x(x + 4)(x - 2)$$

$$\sim -x(x - 2), \text{ т. к. } x + 4 > 0,$$



в) $x = 2$ — единственная точка максимума.

О т в е т : 2 .

448. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = \frac{6 - 6 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^2 + 2x^3 - 15x^4.$$

Заметим, что область допустимых значений данной формулы неизбежно расширяется при сокращении дроби.

Р е ш е н и е .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6 - 6 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^2 + 2x^3 - 15x^4 \\ &= \frac{6 \cos^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^2 + 2x^3 - 15x^4 \\ &= -15x^4 + 2x^3 + 6x^2 \end{aligned}$$

а) $D(f)$:

$$\cos(\pi x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

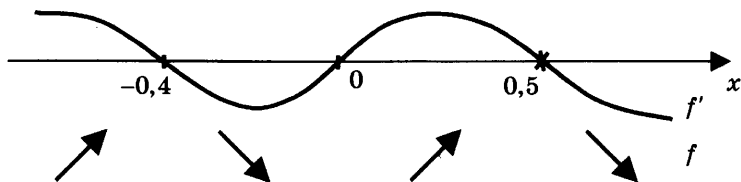
$$\Leftrightarrow x \neq n + \frac{1}{2},$$

б) $f'(x) = (-15x^4 + 2x^3 + 6x^2)'$

$$= -60x^3 + 6x^2 + 12x$$

$$\sim -x(10x^2 - x - 2)$$

$$\sim -x(x - 0,5)(x + 0,4),$$



- в) $x = -0,4$ — единственная точка максимума, т. к. $0,5 \notin D(f)$ и $-0,4 \in D(f)$.

О т в е т : $-0,4$.

451. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \left| \sqrt{1-x^2} - 2 \right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2.$$

Р е ш е н и е 1 .

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| \sqrt{1-x^2} - 2 \right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2 \\ &= 2 - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2, \\ \text{т. к. } \sqrt{1-x^2} &\leq 1 < 2, \\ &= x^3 - 3x^2 + 2. \end{aligned}$$

а) $D(f)$:

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1,$$

б) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x$

$$\sim x(x-2)$$

$$\sim -x, \text{ т. к. } x < 2,$$

в) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, причем в точке 0 производная меняет знак с плюса на минус,

г) $f_{\text{наиб}} = f(0) = 2$.

О т в е т : 2.

Решение 2.

1. Функция f определена только при $-1 \leq x \leq 1$. При этих значениях $x \sqrt{1-x^2} \leq 1$, и поэтому $\sqrt{1-x^2} - 2 < 0$. Следовательно,

$$f(x) = \left| \sqrt{1-x^2} - 2 \right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2 = x^3 - 3x^2 + 2.$$

2. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $-1 \leq x \leq 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = 2. \end{cases}$$

Но $x = 2$ не лежит на отрезке $-1 \leq x \leq 1$.

Сравним числа

$$f(-1) = -2, f(0) = 2 \text{ и } f(1) = 0.$$

Наибольшее из них 2. Значит, $\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = 2$.

О т в е т : 2.

452. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (2x+4)^5 - 4(2x+4)^4 \text{ при } |x+2| \leq 1.$$

Решение.

а) $|x+2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x+2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1,$

б) $f'(x) = ((2x+4)^5 - 4(2x+4)^4)'$
 $= 5(2x+4)^4 \cdot 2 - 4 \cdot 4(2x+4)^3 \cdot 2$
 $= 4(5x+2)(2x+4)^3$
 $\sim -(2x+4)^3,$
т. к. $5x+2 \leq -5+2 < 0,$
 $\sim -(x+2),$

в) $x = -2$ — единственная критическая точка, точка максимума (т. к. в ней производная меняет знак с плюса на минус),

$$г) f(-1) = (-2 + 4)^5 - 4(-2 + 4)^4 = 32 - 64 = -32,$$

$$д) f(-3) = (-6 + 4)^5 - 4(-6 + 4)^4 = -32 - 64 = -96.$$

О т в е т : -96 .

481. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22 \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x}. \end{cases}$$

Анализ данной системы показывает следующее.

- Во-первых, второе уравнение системы является квадратным относительно переменной

$$p = 5^{-2y-5x}.$$

- Во-вторых, в результате решения этого уравнения могут образоваться максимум два положительных значения переменной p .
- В-третьих, не факт, что оба эти значения дадут решения системы, поскольку какое-то из них может выйти за пределы ОДЗ первого уравнения, которая задается неравенством

$$-2y - 5x \neq 0.$$

Р е ш е н и е .

$$\begin{cases} \frac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22 \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x} \quad (\Leftrightarrow (5^{-2y-5x})^2 - 26 \cdot 5^{-2y-5x} + 25 = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5^{-2y-5x} - 1)(5^{-2y-5x} - 5^2) = 0 \\ \frac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22 \quad (\Rightarrow -2y - 5x \neq 0 \Rightarrow 5^{-2y-5x} \neq 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 5x = 2 \\ \frac{-y + 2 \cdot 5x + 11}{2} = -5y - 3 \cdot 5x + 22 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -2y - 2 \\ -y + 2(-2y - 2) + 11 = 2(-5y + 3(2y + 2) + 22) \quad (\Leftrightarrow -7y = 49) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ 5x = 12 \quad (\Leftrightarrow x = 2,4). \end{cases}$$

О т в е т : $x = 2,4$, $y = -7$.

484. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy + 7x}{y + 5} = x + 2 \\ 0,5 \log_3 \frac{25x - x^3 - 81}{y + 3} = 2 - \log_9(2 - x). \end{cases}$$

Зацепкой к решению данной системы может послужить тот факт, что если в первом уравнении избавиться от знаменателя, то слагаемое вида xy исчезнет, а останутся только линейные по x и по y слагаемые, что позволит выразить одну неизвестную через другую.

Р е ш е н и е .

$$\begin{cases} \frac{xy + 7x}{y + 5} = x + 2 \quad (\Rightarrow xy + 7x = (x + 2)(y + 5) \Rightarrow 2x = 2y + 10) \\ 0,5 \log_3 \frac{25x - x^3 - 81}{y + 3} = 2 - \log_9(2 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 5 \neq 0 \\ \log_9 \frac{25x - x^3 - 81}{x - 2} + \log_9(2 - x) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 5 = x \neq 0 \\ \log_9 \left(\frac{25x - x^3 - 81}{x - 2} \cdot (2 - x) \right) = 2 \quad (\Leftrightarrow \log_9 (x^3 - 25x + 81) = \log_9 81) \\ 2 - x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ x^3 - 25x + 81 = 81 \quad (\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5)x = 0) \\ 0 \neq x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -10. \end{cases}$$

О т в е т : $x = -5, y = -10$.

487. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{0,9}(2y - 3x + 1) = 0 \\ 0,5 \log_2(3y - x - 1,5) + \log_4(8x) = 0. \end{cases}$$

Напрашивается следующий план действий:

- в каждом уравнении системы избавиться от логарифмов,
- с помощью первого уравнения исключить одну из двух неизвестных.

Р е ш е н и е .

$$\begin{cases} \log_{0,9}(2y - 3x + 1) = 0 \\ 0,5 \log_2(3y - x - 1,5) + \log_4(8x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 3x + 1 = 1 \\ \log_4(3y - x - 1,5) + \log_4(8x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x \\ \log_4((3y - x - 1,5) \cdot 8x) = 0 \quad (\Leftrightarrow \log_4(2y \cdot 12x - 8x^2 - 12x) = 0) \\ 8x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x > 0 \\ \log_4(3x \cdot 12x - 8x^2 - 12x) = 0 \quad (\Leftrightarrow 28x^2 - 12x = 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 28x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x > 0 \\ 28\left(x - \frac{14}{28}\right)\left(x + \frac{2}{28}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

О т в е т : $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$.

488. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sin x = 0 \\ (3\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 6) = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е .

$$\begin{cases} y + \sin x = 0 \\ (3\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sin x \\ \left(\sqrt{\sin x} - \frac{1}{3}\right)(y - (-3)) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} y = -\sin x \\ \sqrt{\sin x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{9} \\ y = -\frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{9} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = -\sin x \\ y = -3 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ — решений нет.}$$

О т в е т : $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{9}$.

491. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2 \sin x = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е .

1. Решим первое уравнение системы:

$$16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0 \Leftrightarrow (4^{\cos x} - 2) \cdot (4^{\cos x} - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4^{\cos x} = 2 \text{ (так как } 4^{\cos x} \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Рассмотрим два случая:

а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n \Rightarrow \sin x > 0$:

уравнение $\sqrt{y} + 2 \sin x = 0$ решений не имеет;

б) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\sqrt{y} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = 3.$$

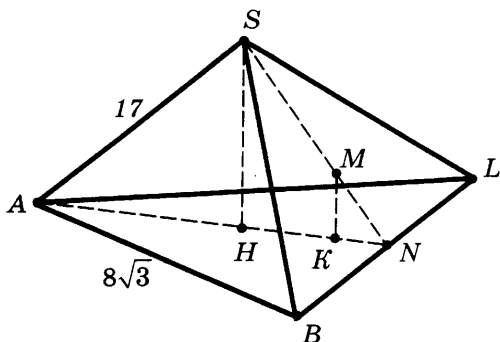
О т в е т : $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 3.$

14

577. В правильной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра

$$AB = 8\sqrt{3} \text{ и } SC = 17.$$

Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM , где M — точка пересечения медиан грани SBC .



Решение: (см. рис.).

Пусть SN — медиана треугольника SBC , а H и K — проекции точек S и M на основание ABC . Тогда

1) $AN, SN \perp BC$, поэтому $H, K \in AN$;

$$2) AN = AB \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AN = 8$$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (теорема Пифагора, $\triangle ASH$);

3) $MK : SH = KN : HN = MN : SN = 1 : 3$ (по свойству медианы и из подобия $\triangle NMK \sim \triangle NSH$)

$$\Rightarrow MK = \frac{1}{3} SH = 5,$$

$$AK = AN - KN = \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) AN = \frac{8}{9} \cdot 12 = \frac{32}{3}$$

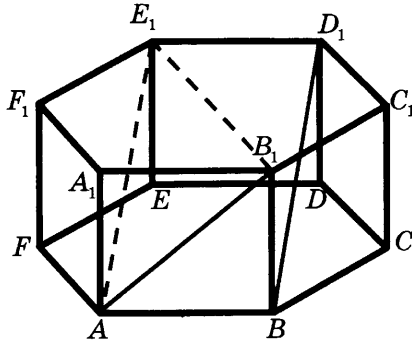
$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle MAN = \frac{MK}{AK} = \frac{5}{\frac{32}{3}} = \frac{15}{32}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{15}{32}$.

580. Все ребра правильной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равны по 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .

Решение.

1. Угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BD_1 равен углу между пересекающимися прямыми AB_1 и AE_1 , так как $AE_1 \parallel BD_1$ (см. рис.).



2. Найдем косинус угла B_1AE_1 :

а) $AB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (прямоугольный $\triangle AEE_1$);

б) $AE = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ (равнобедренный $\triangle AFE$);

в) $AE_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ (прямоугольный $\triangle ABB_1$);

г) $B_1E_1 = B_1O_1 + O_1E_1 = 2$ (O_1 — центр описанной окружности около правильного шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$), поэтому $B_1E_1 = AE_1$;

д) $\cos \angle B_1AE_1 = \frac{AB_1 / 2}{AE_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (равнобедренный $\triangle AB_1E_1$).

О т в е т : $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

581. Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α , параллельная

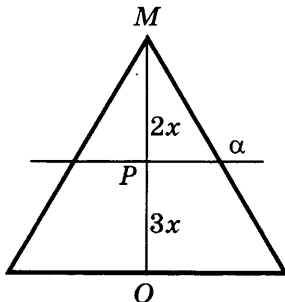
плоскости основания пирамиды, пересекает высоту MO пирамиды в точке P так, что

$$MP : PO = 2 : 3.$$

В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α . Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.

Решение.

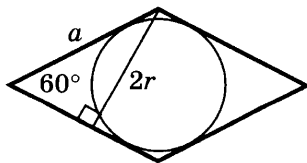
1. α отсекает от $MABCD$ пирамиду Δ :



$MABCD \sim \Delta$, т. к. $\alpha \parallel ABCD$,

$$\begin{aligned} k &= \frac{MO}{MP} \text{ (коэффициент подобия)} \\ &= \frac{2x + 3x}{2x} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

2. Основание пирамиды Δ — ромб:



a — сторона,

r — радиус вписанной окружности

$$\Rightarrow \begin{cases} 2r = a \sin 60^\circ & (\text{высота ромба}) \\ 9\pi\sqrt{3} = \pi r^2 \cdot 3x & (\text{объем цилиндра}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4r}{\sqrt{3}} \\ r^2 x = 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$3. V_{MABCD} = V\Delta \cdot k^3$$

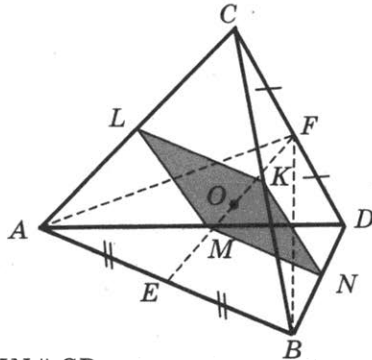
$$= \frac{1}{3} \cdot (a \cdot 2r) \cdot (2x) \cdot k^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot 2r \cdot 2x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{r^2 x \cdot 5^3 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}} = 250.$$

О т в е т : 250.

582. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD . Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB . Найдите объем конуса.

Р е ш е н и е .

1. Сечение $KLMN$:



- а) $KL, MN \parallel AB$, $LM, KN \parallel CD$
 $\Rightarrow KLMN$ — параллелограмм,
- б) $AF, BF \perp CD$ (медианы и высоты в $\triangle ACD$, $\triangle BCD$)
 $\Rightarrow ABF \perp CD$
 $\Rightarrow AB \perp CD$
 $\Rightarrow KLMN$ — прямоугольник,
- в) K, L, M, N — середины ребер (теорема Фалеса), т. к. K — середина BC ,

$$\text{г) } KL = MN = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \quad (\text{т.к. } AB = CD) = LM = KN$$

$$\Rightarrow KLMN \text{ — ромб,}$$

д) $KLMN$ — квадрат:

$$a = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ — сторона,}$$

$$r = \frac{a}{2} = 3 \text{ — радиус вписанной окружности.}$$

2. $EF \perp CD$ (т. к. $ABF \perp CD$), $EF \perp AB$ (аналогично)
 $\Rightarrow EF$ — общий перпендикуляр к AB и CD
 $\Rightarrow FO \perp KLMN$ (ось конуса)
 $\Rightarrow FO = h$ — высота конуса.

3. $AF = AC \cdot \sin 60^\circ$ ($\triangle ACF$) $= 6\sqrt{3}$,
 $EF = \sqrt{AF^2 - AE^2}$ ($\triangle AEF$) $= \sqrt{6^2 \cdot 3 - 6^2} = 6\sqrt{2}$,
 $h = \frac{EF}{2} = 3\sqrt{2}$.

4. $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 9\pi\sqrt{2}$.

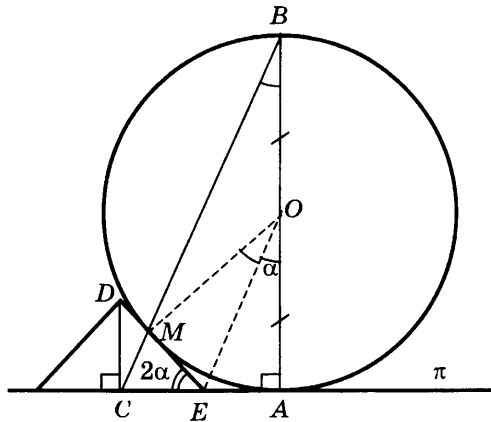
О т в е т : $9\pi\sqrt{2}$.

589. Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A . В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A , проходит через точку M . Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.

Р е ш е н и е .

1. AB — диаметр сферы, CD — ось конуса:
 $AB, CD \perp \pi$ (— данная плоскость)
 $\Rightarrow AB \parallel CD$,

поэтому можно провести сечение плоскостью $ABCD$.



2. $\angle ABM = \frac{1}{2} \angle AOM$ (вписанный и центральный углы)
 $= \angle AOE = \alpha$ ($\triangle AOE = \triangle MOE$),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$AE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \quad (\text{т. к. } OE \parallel BC).$$

3. $\angle CED = \angle AOM$ (т. к. $OM \perp ED$ и $OA \perp EC$) $= 2\alpha$

$$\Rightarrow CD = CE \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{4}{15}.$$

Ответ: $\frac{4}{15}$.

590. В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABC_1A_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45° . Найдите объем призмы.

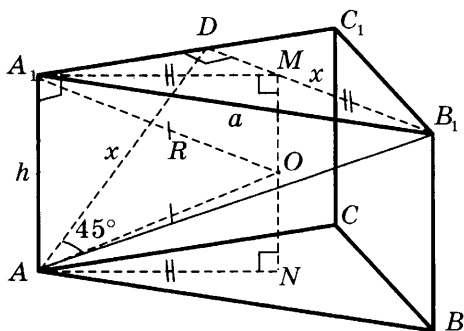
Решение.

1. D — середина A_1C_1 :

$$B_1D \perp ACC_1 \quad (\text{т. к. } B_1D \perp A_1C_1, CC_1)$$

$$\Rightarrow \angle B_1AD = 45^\circ \Rightarrow AD = B_1D = x.$$

2. $AB = a$, $AA_1 = h$, $R = \sqrt{11}$:



$$\begin{cases} h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 \quad (\Delta AA_1D) \\ x = \sin 60^\circ a \quad (A_1B_1D) \\ \left(\frac{2}{3} \cdot x\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \text{ из } \Delta A_1MO \text{ (= } \Delta ANO \text{ по гипотенузе и катету)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \\ \frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2h^2 \\ \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = 12 \\ a^2 = 24 \end{cases}$$

3. $V_{ABCA_1B_1C_1} = \left(\frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot h = \frac{24\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{4} = 36$.

О т в е т : 36.

596. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1 , BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1 , пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1 . Известно, что $AB = 12$,

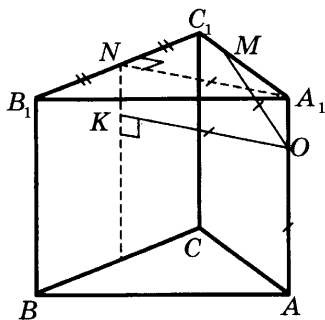
$$A_1M : MC_1 = 3 : 1.$$

Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение.

1. A_1N — высота в $\Delta A_1B_1C_1$:

$$A_1N \perp AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow A_1N \perp CBB_1.$$



2. K — точка касания сферы с плоскостью CBB_1 :

$$\begin{cases} OK \perp CBB_1 \\ OA_1 \parallel CBB_1 \end{cases} \Rightarrow OKNA_1 \text{ — прямоугольник}$$

$$\Rightarrow A_1N = OK = OM = OA = r \text{ — радиус сферы}$$

(т. к. $OA \perp ABC$).

3. $a = 12$ — сторона основания:

$$r = a \sin 60^\circ (\Delta A_1B_1N) = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OA_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3a}{4}\right)^2} (\Delta OA_1M)$$

$$= \sqrt{6^2 \cdot 3 - 9^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AA_1 = AO + OA_1$$

$$= 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} = h \text{ — высота призмы.}$$

4. $S_{\text{бок}} = 3ah = 3 \cdot 12 \cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}$.

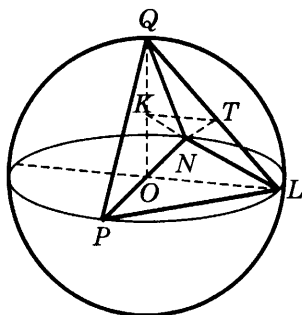
Ответ: $324\sqrt{3}$.

597. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший.

Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN , если T — середина ребра ML .

Решение.

1. O и R — центр и радиус сферы:



$$а) V \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot PN \cdot OL \right) \cdot OM = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R \right) \cdot R,$$

б) неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$OL \perp PN \text{ и } OM \perp PNL.$$

2. K — середина OM :

$$KT = \frac{OL}{2} \text{ (средняя линия в } \triangle LOM) = \frac{R}{2},$$

$$KT \parallel LO \perp PMN, MN = LN = LM = R\sqrt{2}$$

($\triangle MON = \triangle LON = \triangle LOM$ — равнобедренные прямоугольные),

$$NT = LN \sin 60^\circ \text{ (} \triangle LMN) = R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

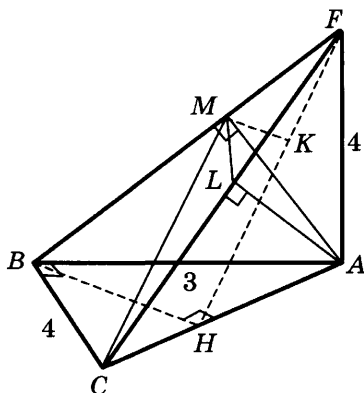
$$3. \sin \angle TNK = \frac{KT}{NT} \text{ (} \triangle TNK) = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

604. Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC , в котором

$$\angle ABC = 90^\circ, AB = 3, BC = 4.$$

Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC . Найдите объем пирамиды $AMLC$.



Для нахождения объема вложенной пирамиды можно принять за основание ее грань ALC , площадь которой ищется несложно. Высоту же этой пирамиды, опущенную из вершины M , можно найти, сравнив с предварительно вычисленной высотой исходной пирамиды, опущенную из вершины B .

Решение.

1. $\triangle ABC$ — прямоугольный:

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, BH = \frac{3 \cdot 4}{5} \text{ (высота).}$$

2. $\triangle AFC$ — прямоугольный:

$$FC = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}, AL = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{41}}, LC = \frac{5^2}{\sqrt{41}}.$$

3. $\triangle AFB$ — прямоугольный:

$$BF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad MF = \frac{4^2}{5}.$$

4. $MK \perp ACF$; $BH \perp AC$, AF (т. к. $AF \perp ABC$)

$$\Rightarrow BH \perp ACF \Rightarrow MK \parallel BH \Rightarrow \triangle BHF \sim \triangle MKF,$$

где коэффициент подобия равен

$$k = \frac{MF}{BF} = \frac{\frac{4^2}{5}}{5} = \frac{4^2}{5^2},$$

$$\Rightarrow MK = k \cdot BH = \frac{4^2}{5^2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{3 \cdot 4^3}{5^3}.$$

$$5. V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACL} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{41}} \cdot \frac{5^2}{\sqrt{41}} \right) \cdot \frac{3 \cdot 4^3}{5^3} = \frac{128}{41}.$$

О т в е т : $\frac{128}{41}$.

605. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что

$$AM : BM = 1 : 3.$$

Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек

M и B . Объем пирамиды $TBMC$ равен $\frac{5}{64}$. Найдите

радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

Р е ш е н и е .

1. $AB = 8x$:

$$AM = 2x, \quad MB = 6x \quad (\text{т. к. } AM : BM = 1 : 3),$$

$$AE = BE = 4x \quad (\text{т. к. } AF = BF),$$

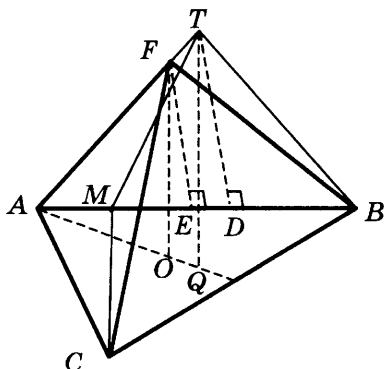
$$BD = MD = 3x \quad (\text{т. к. } BT = MT).$$

2. $TQ, FO \perp ABC (\Rightarrow TQ \parallel FO)$:

$$TQ : FO = TA : FA \text{ (т. к. } \triangle ATQ \sim \triangle AFO \text{)}$$

$$= DA : EA \text{ (т. к. } \triangle ATD \sim \triangle AFE \text{)}$$

$$= \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$



3. $AO = FO = R$:

$$V_{TVMC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot TQ$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} AB \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{4} FO$$

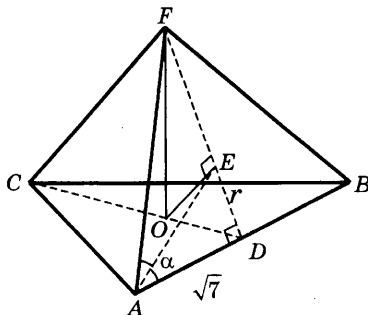
$$= \frac{5\sqrt{3}}{64} (R\sqrt{3})^2 \cdot R = \frac{5}{64} (R\sqrt{3})^3 = \frac{5}{64} \text{ (по условию)}$$

$$\Rightarrow (R\sqrt{3})^3 = 1 \Rightarrow R\sqrt{3} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

612. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение.



- O — центр $\triangle ABC$ (правильного):
 $AD = \sqrt{7}$ (CD — медиана и высота)
 $\Rightarrow OD = AD \operatorname{tg} 30^\circ$ ($\triangle AOD$) = $\frac{\sqrt{7}}{3}$.
- E — центр вписанной окружности в $\triangle ABF$ (равнобедренный):
 FE, AE — биссектрисы
 $\Rightarrow E \in FD$ (— медиана и высота)
 $\Rightarrow ED = r$ — радиус вписанной окружности.
- $OF \perp ABC$ (пирамида правильная),
 $OE \perp ABF$ (ось и основание конуса)
 $\Rightarrow OD^2 = DE \cdot FD$ (OE — высота к гипотенузе $\triangle AOF$)
 $\Rightarrow FD = \frac{7}{3r}$.
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, где $\operatorname{tg} \alpha = \frac{ED}{AD}$ ($\triangle EAD$) = $\frac{r}{\sqrt{7}}$,
 $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{FD}{AD}$ ($\triangle FAD$) = $\frac{7}{3r\sqrt{7}}$,
 $\Rightarrow \frac{7}{3r\sqrt{7}} = \frac{2 \frac{r}{\sqrt{7}}}{1 - \frac{r^2}{7}} \Rightarrow \frac{1}{3r} = \frac{2r}{7 - r^2}$
 $\Rightarrow 7 - r^2 = 6r^2 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$.

Ответ: 1.

613. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На его боковых ребрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что

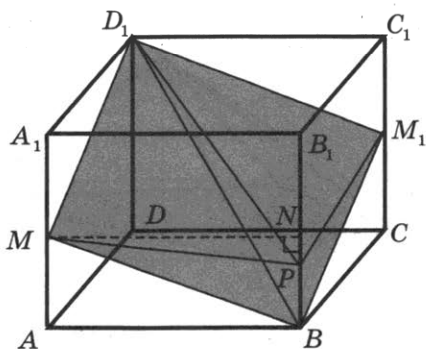
$$AM : MA_1 = 8 : 11,$$

$$B_1 P : PB = 2 : 1.$$

Во сколько раз объем данного параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной в точке P , основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1 ?

Решение.

1. Сечение — параллелограмм $BMD_1 M_1$ (т. к. $BM \parallel D_1 M_1$ и $MD_1 \parallel B M_1$).



2. $MN \perp BB_1$: $V_{PBMD_1 M_1} = 2V_{PBMD_1}$, т. к. $S_{BMD_1 M_1} = 2S_{BMD_1}$.
- $$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot S_{MPB} \cdot A_1 D_1 \right), \text{ т. к. } A_1 D_1 \perp AA_1 B_1,$$
- $$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot MN \cdot PB \right) \cdot A_1 D_1$$
- $$= \frac{1}{3} \cdot A_1 B_1 \cdot \frac{1}{3} BB_1 \cdot A_1 D_1, \text{ т. к. } NMA_1 B_1 \text{ — прямоугольник,}$$
- $$= \frac{1}{9} V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1}.$$

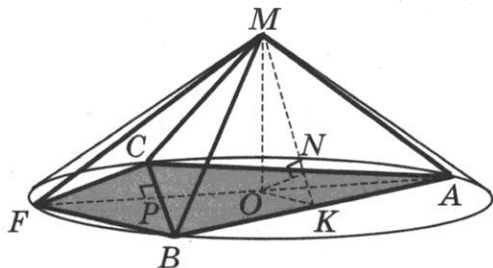
Ответ: 9.

621. Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .

Прежде всего, неплохо было бы определить местоположение точки F : коль скоро все остальные вершины пирамиды фиксированы, то ее объем максимален, когда эта точка на окружности наиболее удалена от хорды BC .

Далее, исходная пирамида — конечно, правильная, и она полностью задана. Значит, остальное — дело техники (точнее, арифметики).

Решение.



1. Объем V_{MABFC} — максимален, когда F — середина дуги BC , т. к.:

$$\begin{aligned} \text{а) } V_{MABFC} &= \frac{1}{3} \cdot MO \cdot (S_{ABC} + S_{BCF}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot MO \cdot \left(S_{ABC} + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FP \right), \end{aligned}$$

б) высота FP — максимальна, когда FP — срединный перпендикуляр к хорде BC .

2. $\triangle AMB = \triangle AMC = \triangle CMB$

(т. к. $MA = MB = MC$ и $\angle AMB = \angle AMC = \angle CMB = 90^\circ$)
 $\Rightarrow \triangle ABC$ — правильный.

3. K — середина AB ($\Rightarrow \triangle AOK$ — прямоугольный):

а) $OK = AO \cdot \sin 30^\circ = \frac{6}{2} = 3$,

б) $AB = 2AK = 2 \cdot AO \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$.

4. $ON \perp MK$:

$OK, MK \perp AB \Rightarrow ON \perp ABM$.

5. FH — перпендикуляр к плоскости ABM :

$FH : ON = FA : OA$ ($\triangle AFH \sim \triangle AON$)

$= 2 : 1$, т. к. FA — диаметр, OA — радиус.

6. $\triangle ABM$, $\triangle AMO$, $\triangle OKM$ — прямоугольные:

а) $MA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}$,

б) $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{9 \cdot 6 - 6 \cdot 6} = 3\sqrt{2}$,

в) $MK = \sqrt{OM^2 + OK^2} = \sqrt{9 \cdot 2 + 9} = 3\sqrt{3}$,

г) $ON = \frac{OK \cdot OM}{MK} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$,

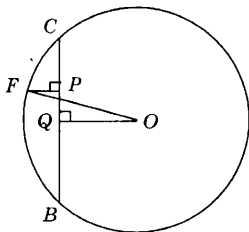
д) $FH = 2 \cdot ON = 2\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

В нашем решении голословно заявлено, что *высота FP — максимальна, когда FP — серединный перпендикуляр к хорде BC* . Можно ли обосновать этот факт? Да, например, с помощью следующих двух соображений:

- если OQ — серединный перпендикуляр к хорде BC , то справедлива оценка

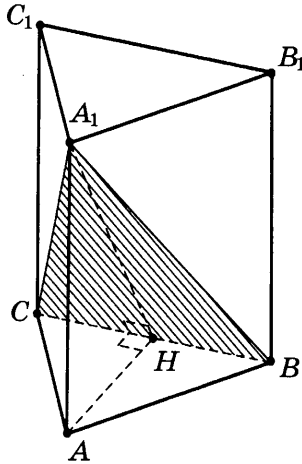
$$FP + OQ \leq OF \Leftrightarrow FP \leq OF - OQ (= \text{const}),$$



- равенство в полученной оценке достигается тогда и только тогда, когда

$$P, Q \in OF \Leftrightarrow OF \perp BC.$$

630. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



Решение.

Обозначим H середину ребра BC (см. рисунок). Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC — равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC . Следовательно, $\angle A_1HA$ — линейный угол двугранного угла с гранями

B_1CA и B_1CA_1 .

Из треугольника A_1AB найдем:

$$AA_1 = 1.$$

Из треугольника A_1HB найдем:

$$A_1H = \sqrt{3}.$$

Из треугольника HAA_1 найдем:

$$\operatorname{tg} \angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол равен 30° .

О т в е т : 30° .

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

645. Решите уравнение

$$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x-1.$$

Под знаком первого корня стоит полный квадрат, причем того самого выражения, которое записано в правой части уравнения. Поэтому корень можно извлечь, получив модуль этого выражения с надеждой на его последующее взаимное уничтожение с правой частью.

Р е ш е н и е .

$$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x-1 \quad (\Leftrightarrow x-1 \geq 0, \text{ т. к. } \sqrt{a} \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow \sqrt{1-2x+x^2} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1) \\ x-1 + \sqrt{26+3x-5x^2} = x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^2 - 3x - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5\left(x - \frac{13}{5}\right)\left(x + \frac{10}{5}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, 6.$$

О т в е т : $x = 2, 6$.

682. Решите уравнение

$$\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4.$$

В этом уравнении оба корня извлекаются, поскольку под ними (где открыто, а где и завуалировано) записаны полные квадраты. Правда, если их извлечь, то, возможно, придется повозиться с раскрытием образующихся при этом модулей.

Решение.

$$\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(s - 2)^2} - \sqrt{(3s - 4)^2} = -4, \text{ где } s = \sin 3x,$$

$$\Leftrightarrow |s - 2| - |3s - 4| = -4$$

$$\Leftrightarrow (2 - s) - (4 - 3s) = -4, \text{ т.к. } s < 2 \text{ и } 3s < 4,$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

791. Решите неравенство

$$\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2.$$

Решение.

$$\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+3}(x + 3)(3 - x) - \frac{4}{16} \log_{x+3}^2|x - 3| \geq 2 \quad (\Leftrightarrow 3 - x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_{x+3}(3 - x) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3 - x) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 4l + 4 \leq 0, \text{ где } l = \log_{x+3}(3 - x),$$

$$\Leftrightarrow (l - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \log_{x+3}(3 - x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = (x + 3)^2 \\ 1 \neq x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 6)(x + 1) = 0 \\ -2 \neq x > -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

О т в е т : $x = -1$.

792. Решите неравенство

$$\log_2 [(7^{-x^2} - 6)(7^{-x^2+9} - 1)] + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 6}{7^{-x^2+9} - 1} > \log_2 (7^{3-x^2} - 5)^2.$$

Р е ш е н и е .

$$\log_2 (7^{-x^2} - 6)(7^{-x^2+9} - 1) + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 6}{7^{-x^2+9} - 1} > \log_2 (7^{3-x^2} - 5)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (7^{-x^2} - 6)^2 > \log_2 (7^{3-x^2} - 5)^2 \\ (7^{-x^2} - 6)(7^{9-x^2} - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (6 - 7^{-x^2}) > \log_2 |7^{3-x^2} - 5| \\ 7^{9-x^2} < 1 \quad (\Leftrightarrow 7^{3-x^2} < 7^{9-x^2} < 1 < 5) \end{cases}$$

так как $7^{-x^2} < 7^0 = 1 < 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 7^{-x^2} > 5 - 7^{3-x^2} \\ 9 - x^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7^{3-x^2} + 1 > 7^{-x^2} & \text{— верно, так как } 7^{3-x^2} + 1 > 1 \geq 7^{-x^2}, \\ x^2 > 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3. \end{cases}$$

О т в е т : $x < -3, x > 3$.

795. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0.$$

Решение.

$$\log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg x - \lg 3}{\frac{1}{3}(\lg(2x^2 - 7x + 6) - \lg 1)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{(2x^2-7x+6)-1} > 0 \\ x > 0 \\ 2x^2-7x+6 > 0 \end{cases}$$

(так как выражение $\lg u - \lg v$ имеет тот же знак, что и $u - v$ при $u, v > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-1)} > 0 \\ x > 0 \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(1; \frac{5}{2}\right) \cup (2; \infty) \\ x > 0 \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{3}{2} \\ 2 < x < \frac{5}{2} \\ x > 3. \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$, $x > 3$.

836. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3}{\pi} \arccos(\sqrt{0,125}(\cos x - \sin x)).$$

Для исследования множества значений выражения под знаком арккосинуса понадобится его преобразовать с помощью *вспомогательного угла*.

Решение.

$$\begin{aligned} 1. \quad y &= \frac{3}{\pi} \arccos(\sqrt{0,125}(\cos x - \sin x)) \\ &= \frac{3}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)\right) \\ &= \frac{3}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{2}(\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x)\right), \text{ где } \varphi = \frac{\pi}{4}, \\ &= \frac{3}{\pi} \arccos \frac{\cos(x + \varphi)}{2}. \end{aligned}$$

$$2. E(\cos(x + \varphi)) = [-1; 1]$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\cos(x + \varphi)}{2}\right) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow E\left(\arccos \frac{\cos(x + \varphi)}{2}\right) = \left[\arccos \frac{1}{2}; \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{3}{\pi} \arccos \frac{\cos(x + \varphi)}{2}\right) = \left[\frac{3}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3}; \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3}\right] = [1; 2].$$

О т в е т : $[1; 2]$.

842. Найдите множество значений функции $y = \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|}$,
если $x \geq -2$.

В этом варианте задачи, в отличие от предыдущих, формулу для данной функции не удается представить в виде такой последовательности функций, по которой сразу вычислялась бы ее область значений.

Р е ш е н и е .

$$1. y = \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|} = \begin{cases} 3 + 2^x, & x > 0, \\ -3 + 2^{-x}, & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

2. Рассмотрим два случая:

а) $x > 0$:

$$E(2^x) = (2^0; \infty) = (1; \infty) \Rightarrow E(3 + 2^x) = (3 + 1; \infty) = (4; \infty);$$

б) $-2 \leq x < 0$:

$$E(2^{-x}) = (2^0; 2^2] = (1; 4]$$

$$\Rightarrow E(-3 + 2^{-x}) = (-3 + 1; -3 + 4] = (-2; 1].$$

$$\Rightarrow E(y) = (-2; 1] \cup (4; \infty).$$

О т в е т : $(-2; 1] \cup (4; \infty)$.

845. Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in [\arctg 0,5; \arctg 3]$.

Решение.

1. $x \in [\arctg 0,5; \arctg 3]$

$$\Leftrightarrow \arctg 0,5 \leq x \leq \arctg 3 \Leftrightarrow 2 \arctg 0,5 \leq 2x \leq 2 \arctg 3.$$

2. $0 < \arctg 0,5 < \arctg 1 = \frac{\pi}{4} < \arctg 3 < \frac{\pi}{2}$

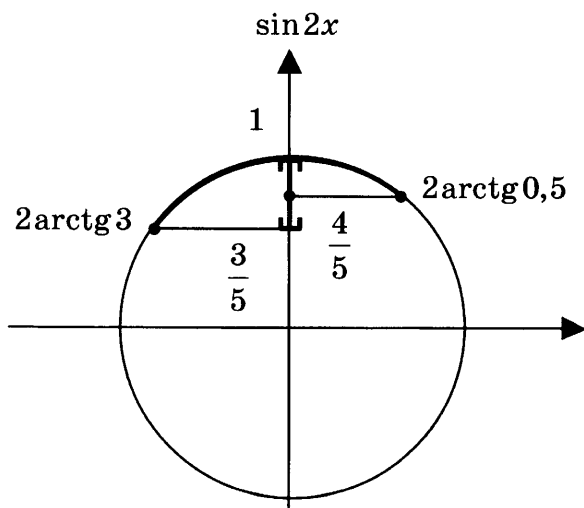
$$\Rightarrow 0 < 2 \arctg 0,5 < \frac{\pi}{2} < 2 \arctg 3 < \pi.$$

3. $y(x) = \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

а) $y(\arctg 0,5) = \frac{2 \cdot 0,5}{1 + 0,5^2} = \frac{4}{5}$,

б) $y(\arctg 3) = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{3}{5}$,

в) $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1$,



г) $E(y) = [0, 6; 1]$.

О т в е т : $[0, 6; 1]$.

848. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2} \frac{80}{13 + \log_5 (125 + x^4)}.$$

Р е ш е н и е .

$$\begin{aligned} 1. \quad y(x) &= \log_{0,2} \frac{80}{13 + \log_5 (125 + x^4)} \\ &= \log_{5^{-1}} \left(\frac{13 + \log_5 (125 + x^4)}{80} \right)^{-1} = \log_5 \frac{13 + \log_5 (125 + x^4)}{80}. \end{aligned}$$

2. $E(x^4) = [0; \infty)$

$$\Rightarrow E(125 + x^4) = [125; \infty)$$

$$\Rightarrow E(\log_5 (125 + x^4)) = [\log_5 125; \infty) = [3; \infty)$$

$$\Rightarrow E(13 + \log_5 (125 + x^4)) = [13 + 3; \infty) = [16; \infty)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{13 + \log_5 (125 + x^4)}{80}\right) = \left[\frac{16}{80}; \infty\right) = \left[\frac{1}{5}; \infty\right)$$

$$\Rightarrow E(y) = E\left(\log_5 \frac{13 + \log_5 (125 + x^4)}{80}\right) = \left[\log_5 \frac{1}{5}; \infty\right)$$

$$= [-1; \infty).$$

О т в е т : $[-1; \infty)$.

853. При каком $x \in \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x+2}} \right) : \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 2 \right) \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+2}} \right)$$

ближе всего к 73?

Можно заметить, что в данном выражении во всех числителях и во всех знаменателях участвуют только две устойчивые комбинации x и $x+2$, кстати, положительные (правда, только при данном в задаче ограничении на x). Так что квадратные корни из них имеет смысл обозначить новыми буквами, после чего выражение будет выглядеть существенно проще.

Решение.

1. $x \in \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x+2}} \right) : \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 2 \right) \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+2}} \right) \\ &= \left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+2}} \right) : \left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 2 \right) \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+2}} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)}{\left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \right) \left(1 + \frac{b}{a} \right)}, \end{aligned}$$

где $a = \sqrt{x+2}$, $b = \sqrt{x}$, причем $a > b > 0$,

$$\begin{aligned} &= \frac{a(a^2 - b^2)}{(a^2 - 2ab + b^2)(a+b)} = \frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)^2(a+b)} = \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{x+2 + \sqrt{(x+2)x}}{(x+2) - x} = \frac{x+2 + \sqrt{x^2 + 2x}}{2}. \end{aligned}$$

2. $x^2 < x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+1 &= \frac{x+2+x}{2} < f(x) = \\ &= \frac{x+2 + \sqrt{x^2 + 2x}}{2} < \frac{x+2+x+1}{2} = x+1,5 \\ \Rightarrow x+1 &< f(x) < x+1,5. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим три случая:

а) $x = 72$:

$$73 < f(x) = f(72) < 73,5$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) - 73 < 0,5 \Rightarrow |f(x) - 73| < 0,5;$$

б) $x < 72$:

$$f(x) \leq f(71) < 72,5$$

$$\Rightarrow f(x) - 73 < -0,5 \Rightarrow |f(x) - 73| > 0,5;$$

в) $x > 72$:

$$f(x) \geq f(73) > 74$$

$$\Rightarrow f(x) - 73 > 1 \Rightarrow |f(x) - 73| > 1.$$

О т в е т : 72.

854. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - x^2}{x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49}$$

ближе всего к 0,7?

Заданное выражение содержит устойчивые комбинации, которых здесь набирается целых четыре $x \pm 3$ и $x \pm 7$.

Однако для того чтобы упростить это выражение целиком, желательно заранее знать, что каждая из этих комбинаций принимает только неотрицательные значения.

Р е ш е н и е .

1. $x \in \mathbb{N}$ ($\Rightarrow x + 3 > 0$):

$$F(x) = \sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - x^2}{x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49}$$

$$= \sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{(x-3)\sqrt{(x+3)(x-7)} - (x-3)(x+3)}{(x+7)(x-7) - (x+7)\sqrt{(x+3)(x-7)}}$$

$$(\Rightarrow x \geq 7, \text{ т. к. } \frac{x-7}{x+3} \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{x-3}{x+7} \cdot \frac{\sqrt{x-7}\sqrt{x+3} - (x+3)}{(x-7) - \sqrt{x-7}\sqrt{x+3}} \\
&= \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{x-3}{x+7} \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-7}} \cdot \frac{\sqrt{x-7} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x-7} - \sqrt{x+3}} \\
&= \frac{x-3}{x+7} = 1 - \frac{10}{x+7} = f(x).
\end{aligned}$$

2. $x \geq 7$: $f_1(x) = x + 7$ — положительна и возрастает

$$\Rightarrow f_2(x) = \frac{10}{x+7} \text{ — убывает}$$

$$\Rightarrow f_3(x) = -\frac{10}{x+7} \text{ — возрастает}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{10}{x+7} \text{ — возрастает.}$$

3. Рассмотрим три случая:

а) $x = 26$ ($\in D(F)$):

$$\begin{aligned}
0,7 - F(x) &= 0,7 - f(26) = 0,7 - \left(1 - \frac{10}{26+7}\right) \\
&= \frac{10}{33} - \frac{3}{10} = \frac{100 - 99}{330} = \frac{1}{330};
\end{aligned}$$

б) $26 > x \in D(F)$:

$$0,7 - F(x) > 0,7 - f(26) = \frac{1}{330};$$

в) $27 \leq x \in D(F)$:

$$\begin{aligned}
F(x) - 0,7 &\geq f(27) - 0,7 = \left(1 - \frac{10}{27+7}\right) - 0,7 = \frac{3}{10} - \frac{10}{34} \\
&= \frac{102 - 100}{340} = \frac{1}{170} > \frac{1}{330}.
\end{aligned}$$

О т в е т : $x = 26$.

857. Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет

вмонтировано в пол, а ее задняя стенка — в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

Попробуем, обозначив буквами размеры подставки и связав их данной величиной ее объема, выразить через них длину сварочного шва и исследовать полученную функцию на минимум.

Решение.

1. Пусть x и y — сторона основания и высота подставки (в дм).

Тогда ее объем равен

$$x^2 y = 1296 \Rightarrow y = \frac{1296}{x^2},$$

а общая длина сварки равна

$$L = 3x + 2y = 3x + 2 \cdot \frac{1296}{x^2} = 3 \left(x + \frac{2 \cdot 432}{x^2} \right) = L(x), \quad x > 0:$$

$$\text{а) } L'(x) = 3 \left(x + \frac{2 \cdot 432}{x^2} \right) = 3 \left(1 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 432}{x^3} \right)$$

$$\sim x^3 - 12^3 \quad (\text{т. к. } x > 0)$$

$$\sim x - 12,$$

$$\text{б) } L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12,$$

причем в точке 12 производная меняет знак с минуса на плюс,

$$\text{в) } L(x) = L_{\text{мин}} \Leftrightarrow x = 12.$$

2. $x = 12$:

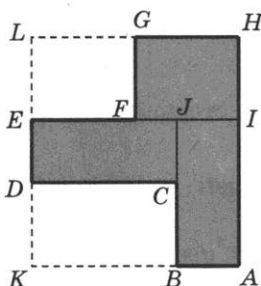
$$y = \frac{1296}{x^2} = \frac{12 \cdot 108}{12^2} = 9.$$

Ответ: 12 дм, 12 дм и 9 дм.

858. Требуется разметить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 1800 м^2 , состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где

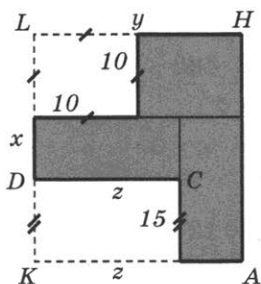
$$FG = EF = 10 \text{ м}, BC = 15 \text{ м} \text{ и } CD \geq 40 \text{ м}.$$

Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL , LH и CD , при которых периметр является наименьшим.



Решение 1.

1. Пусть $KL = x$, $LH = y$, $CD = z$.



Тогда $z \geq 40$ и площадь прямоугольника $KLHA$ равна

$$xy = 1800 + 10 \cdot 10 + 15z$$

$$\geq 1800 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 2500 \Rightarrow y \geq \frac{2500}{x},$$

а периметр участка равен

$$P = P_{KLHA} = 2(x + y) \geq 2\left(x + \frac{2500}{x}\right).$$

$$2. \quad p(x) = x + \frac{2500}{x}, \quad x > 0:$$

$$а) \quad p'(x) = \left(x + \frac{2500}{x} \right)' = 1 - \frac{2500}{x^2}$$

$$\sim x^2 - 50^2 \quad (\text{т. к. } x > 0)$$

$$= (x - 50)(x + 50)$$

$$\sim x - 50 \quad (\text{т. к. } x > 0);$$

б) $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50$, причем в точке 50 производная меняет знак с минуса на плюс;

$$в) \quad p_{\text{наим}} = p(50) = 50 + \frac{2500}{50} = 100.$$

$$\Rightarrow P \geq 2p_{\text{наим}} = 200.$$

$$3. \quad x = 50, \quad z = 40:$$

$$y = \frac{2500}{50} = 50, \quad P = 2(50 + 50) = 200.$$

Поэтому $P_{\text{наим}} = 200$.

О т в е т : 200 м; 50 м, 50 м, 40 м.

Р е ш е н и е 2.

Если $KL = x$, $LH = y$, $CD = 40 + d$, $d \geq 0$,

то

$$xy = 1800 + 10 \cdot 10 + 15(40 + d) = 2500 + 15d$$

$$\Rightarrow y = \frac{2500 + 15d}{x}$$

$$\Rightarrow P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{2500 + 15d}{x}\right)$$

$$= 2\left(\frac{(x - 50)^2}{x} + 100\right) \geq 200,$$

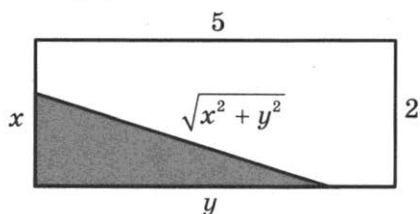
причем последнее неравенство обращается в равенство при $d = 0$, $x = y = 50$, поэтому $P_{\text{наим}} = 200$.

О т в е т : 200 м; 50 м, 50 м, 40 м.

937. Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

Решение 1.

1. x и y — стороны треугольника Δ :



$$\begin{aligned}
 P_{\Delta} &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 8 \\
 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} &= 8 - x - y \\
 \Rightarrow x^2 + y^2 &= 8^2 - 2 \cdot 8(x + y) + (x + y)^2 \\
 \Rightarrow x^2 + y^2 &= 64 - 16x - 16y + x^2 + 2xy + y^2 \\
 \Rightarrow 2xy - 16y &= 16x - 64 \\
 \Rightarrow y &= \frac{16x - 64}{2x - 16} = \frac{8(x - 4)}{x - 8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. S_{\Delta} &= \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} x \cdot \frac{8(x - 4)}{x - 8} = \frac{4x(x - 4)}{x - 8} \\
 &= \frac{4(x^2 - 4x)}{x - 8} = S(x) \text{ при } 0 < x \leq 2:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } S'(x) &= \left(\frac{4(x^2 - 4x)}{x - 8} \right)' \\
 &= 4 \cdot \frac{(x^2 - 4x)' \cdot (x - 8) - (x^2 - 4x) \cdot (x - 8)'}{(x - 8)^2}
 \end{aligned}$$

$$= 4 \cdot \frac{(2x-4)(x-8) - (x^2 - 4x)}{(x-8)^2} \sim 2x^2 - 20x + 32 - x^2 + 4x$$

$$= x^2 - 16x + 32 = (x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{где } x_{1,2} = 8 \pm 4\sqrt{2}, \quad 8 - 4\sqrt{2} \quad (> 8 - 4 \cdot 1,5 = 2),$$

$$\sim 1,$$

б) $S'(x) > 0, \Rightarrow S$ — возрастает,

$$\text{в) } S_{\text{наиб}} = S(2) = \frac{4 \cdot 2(2-4)}{2-8} = \frac{8}{3}.$$

3. $x = 2$:

$$y = \frac{8(2-4)}{2-8} = \frac{8}{3} < 5.$$

$$4. S_{\text{иском}} = S_{\text{прямоуг}} - S_{\text{наиб}} = 2 \cdot 5 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{22}{3}.$$

Р е ш е н и е 2 .

Задача допускает решение и полным *сведением к планиметрии*, основанным на следующих двух идеях.

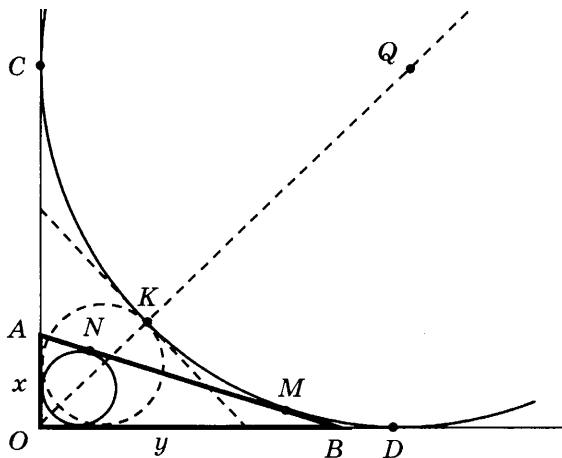
- Все треугольники AOB фиксированного периметра, отсекаемые от данного угла COD , касаются некоторой фиксированной окружности с центром Q , вписанной в данный угол, но *вневыписанной* по отношению к каждому из этих треугольников. Действительно, на рисунке, пользуясь свойством касательных, проведенных из одной точки, имеем

$$AM = AC, \quad BM = BD, \quad OC = OD$$

$$\Rightarrow P_{OAB} = OA + OB + AB$$

$$= (OA + AM) + (OB + BM)$$

$$= OC + OD = 2 OC,$$



поэтому периметр треугольника AOB постоянен тогда и только тогда, когда постоянна длина касательной OC , иными словами, когда постоянен центр Q внеписанной окружности.

- Площадь S треугольника AOB фиксированного полупериметра p тем больше, чем больше радиус r вписанной в него окружности, т. к.

$$S = pr.$$

В частности, эта площадь максимальна, когда вписанная окружность касается внеписанной, т. е. когда точки M и N сливаются в одну точку K . Но пока выполнено неравенство

$$x < y,$$

с увеличением радиуса вписанной окружности увеличивается и величина x .

В нашем случае:

- угол AOB — прямой, что облегчает выражение периметра треугольника AOB через его катеты,
- периметр треугольника AOB равен 8, следовательно, радиус внеписанной окружности равен 4,

- максимальное значение площади треугольника AOB , при отсутствии искусственных ограничений на переменную x , достигалось бы, только когда

$$x = y \Rightarrow x + x + \sqrt{x^2 + x^2} = 8 \Rightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{2 + \sqrt{2}} = \frac{8(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 4(2 - \sqrt{2})$$

(кстати, последнее значение совпадает с найденной ранее точкой экстремума функции $S(x)$),

- в силу ограничения $x \leq 2$ наибольшее значение площади треугольника AOB достигается при $x = 2$.

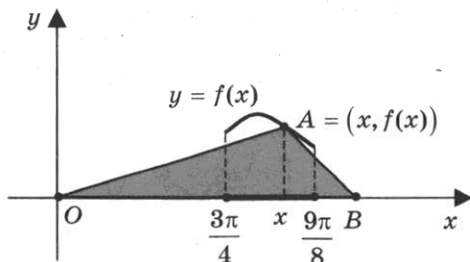
Таким образом, использование геометрических идей позволило решить ту же задачу почти без вычислений.

- 938.** Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox , и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A . Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB , где точка O — начало координат и

$$f(x) = \sqrt{7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x},$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}.$$

Решение.



$$1. S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot 4f(x) = 2(f(x))^2$$

$$= 2(7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x) = S(x), \text{ где } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{8}:$$

а) $S'(x) = 2(7 + 3 \sin x - (3x + 1) \cos x)'$
 $= 2(3 \cos x - 3 \cos x + (3x + 1) \sin x) = 2(3x + 1) \sin x$
 $\sim \sin x$, т.к. $3x + 1 > 0$,

б) $S'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$,

причем в точке π производная меняет знак с плюса на минус.

2. $S_{наиб} = S(\pi) = 2(7 + (3\pi + 1)) = 6\pi + 16$.

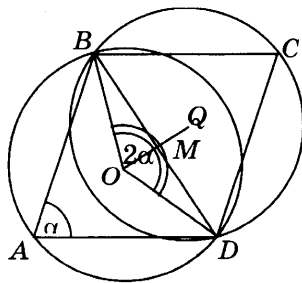
О т в е т : $6\pi + 16$.

944. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD .

Р е ш е н и е .

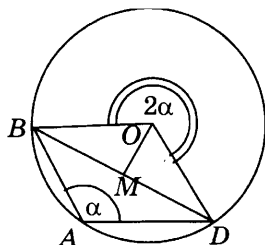
1. Треугольники $\triangle BAD = \triangle BCD$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой BD . Поэтому также по разные стороны от нее расположены и центры O и Q описанных около них окружностей, лежащие на серединном перпендикуляре OQ к их общей стороне BD , следовательно, $OQ = 2OM$, где M — середина BD .
2. Возможны три случая:

а) $\alpha < 90^\circ$,



тогда $\angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOD = \alpha$ (теорема о вписанном угле),

б) $\alpha > 90^\circ$,



тогда $\angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOD = 180^\circ - \alpha$ (теорема о вписанном

угле),

в) $\alpha = 90^\circ$, тогда точки O и M совпадают.

Во всех рассмотренных случаях имеем

$$OM = BM \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|.$$

3. Найдем OQ :

$$\begin{aligned} \text{а) } BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \end{aligned}$$

(теорема косинусов для $\triangle BAD$),

$$\text{б) } BM = \frac{1}{2} BD,$$

$$\begin{aligned} OQ = 2OM &= 2BM \cdot |\operatorname{ctg} \alpha| = BD \cdot |\operatorname{ctg} \alpha| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|. \end{aligned}$$

$$\text{О т в е т : } \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|.$$

945. На стороне BA угла ABC , равного 30° , взята такая точка D , что

$$AD = 2 \text{ и } BD = 1.$$

Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

Решение 1.

Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AD . Обозначим P середину отрезка AD , Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC , E — точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой BC (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой BC следует, что отрезки OA , OD и OQ равны радиусу R окружности.

Заметим, что точка O не может лежать по ту же сторону от прямой AB , что и точка E , так как в этом случае расстояние от точки O до прямой BC меньше, чем расстояние от нее до точки A .

Из прямоугольного треугольника BPE с катетом $BP = 2$ и $\angle B = 30^\circ$ находим, что $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Так как $OA = R$ и $AP = 1$, получаем:

$$OP = \sqrt{R^2 - 1}$$

и, следовательно,

$$OE = \sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника OQE , в котором $\angle E = 60^\circ$, находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

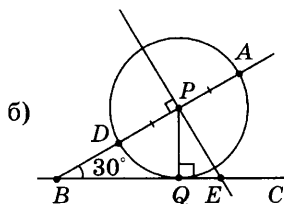
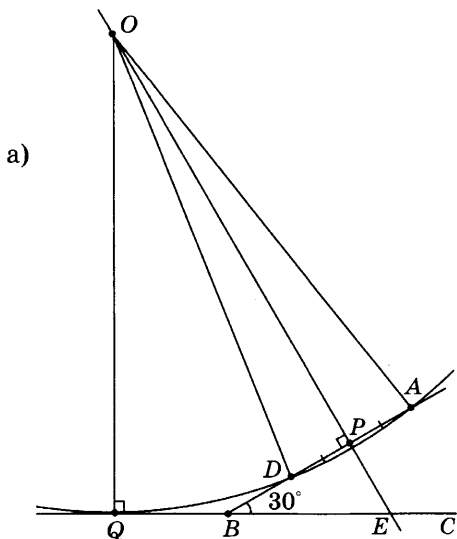
В результате получаем уравнение для R :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

Возведем в квадрат обе части этого уравнения и приведем подобные члены. Получим уравнение

$$R^2 - 8R + 7 = 0,$$

решая которое находим два корня $R_1 = 1$, $R_2 = 7$. Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рисунок б).



Ответ: 1 или 7.

Решение 2.

Пусть точка Q касания окружности с прямой BC лежит на луче BC (см. рисунок а). По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2 = BA \cdot BD = (BD + DA) \cdot BD = (1 + 2) \cdot 1 = 3,$$

откуда $BQ = \sqrt{3}$.

Пусть O — точка пересечения луча BA и перпендикуляра к BC , проведенного через точку Q . Из прямоугольного треугольника BQO находим:

$$BO = \frac{BQ}{\cos 30^\circ} = 2,$$

тогда

$$AO = OD = 1 \text{ и } OQ = \frac{1}{2} BO = 1.$$

Таким образом, точка O удалена от точек A , D и Q на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно, O — центр искомой окружности, а ее радиус равен 1.

Пусть теперь точка Q_1 касания окружности с прямой BC лежит на продолжении BC за точку B (см. рисунок б), а прямая, проходящая через точку Q_1 перпендикулярно BC , пересекает прямую AB в точке H , а окружность вторично — в точке T . Тогда

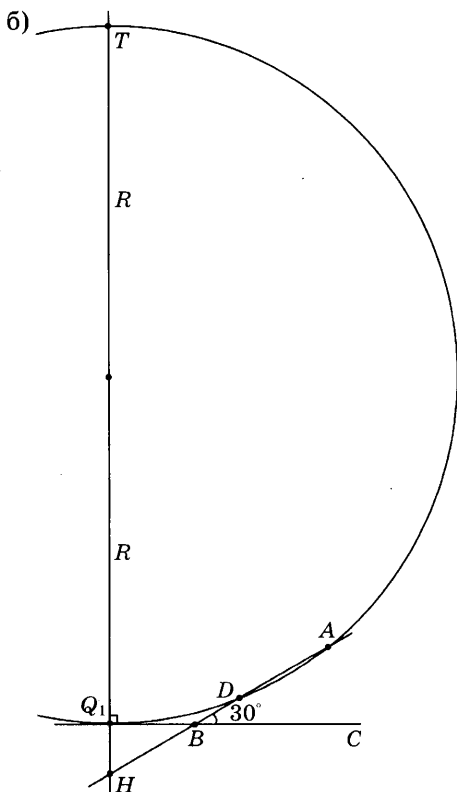
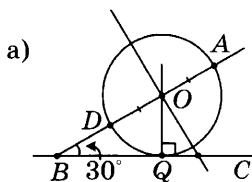
$$BQ_1 = \sqrt{BA \cdot BD} = \sqrt{3}, \quad \angle HBQ_1 = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$BH = \frac{BQ_1}{\cos 30^\circ} = 2, \quad HQ_1 = \frac{1}{2} BH = 1.$$

Если R — радиус окружности, то $Q_1T = 2R$. По теореме о двух секущих

$$HQ_1 \cdot HT = HA \cdot HD,$$

то есть $1 \cdot (1 + 2R) = (2 + 3) \cdot 3$, откуда находим, что $R = 7$.



Ответ: 1 или 7.

946. В треугольнике ABC

$$AB = 12, BC = 5, AC = 10.$$

Точка D лежит на прямой BC так, что

$$BD : DC = 4 : 9.$$

Окружности, вписанные в каждый из треугольников ABD и ACD , касаются стороны AD в точках E и F .
Найдите длину отрезка EF .

Решение. (см. рис.).

$$1. \quad BD = \frac{4}{4+9} BC = \frac{20}{13} = a,$$

$$CD = \frac{9}{4+9} BC = \frac{45}{13} = b.$$

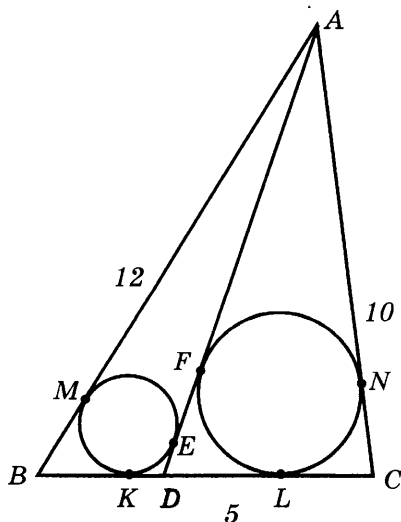
2. Обозначим $DE = x$, $DF = y$, $DA = z$.

Тогда по свойству касательных имеем

$$2x = DE + DK = DA + DB - BK - AE = z + a - 12$$

и, аналогично,

$$2y = z + b - 10.$$



3. Поэтому

$$2(y - x) = b - a + 12 - 10 = \frac{45}{13} - \frac{20}{13} + 2 = 2 + \frac{25}{13}$$

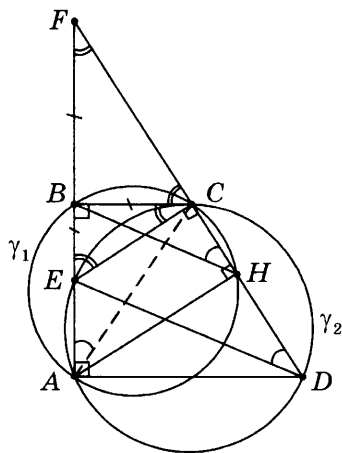
$$\Rightarrow EF = y - x = 1\frac{25}{26}.$$

Ответ: $1\frac{25}{26}$.

952. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что $CD \perp CE$.

а) Докажите, что $BH \parallel ED$.

б) Найдите отношение $BH : ED$, если $\angle BCD = 135^\circ$.



Решение (см. рис.).

а) Так как $\angle ABC = 90^\circ = \angle AHC$, то точки A, B, C, H лежат на окружности γ_1 с диаметром AC , а вписанные углы $\angle BHC = \angle BAC$ опираются на дугу \widehat{BC} . Так как $\angle EAD = 90^\circ = \angle ECD$, то точки A, D, C, E лежат на окружности γ_2 с диаметром DE , а вписанные углы $\angle EAC = \angle EDC$

опираются на дугу \widehat{EC} . Значит, $\angle BAC = \angle EAC = \angle EDC$, поэтому $BH \parallel DE$.

б) Продолжим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке F . Равнобедренные прямоугольные треугольники BFC и BEC , с общим катетом BC , равны. Значит, точка B — середина FE , а BH — средняя линия в треугольнике DEF , поэтому $BH : DE = 1 : 2$.

О т в е т : 1 : 2.

17

957. Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2015 г., если в январе 2014 г. она составляла 6250 руб.?

Р е ш е н и е .

Цена товара в декабре 2015 г. (после двух повышений и двух понижений на 20%) составит $6250 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} = 5760$.

О т в е т : 5760 руб.

958. В результате проведенного в школе конкурса юных талантов 58% участников получили призы. Довольными итогами конкурса остались 95% участников, причем 60% из них получили призы. Какая часть недовольных результатами конкурса участников получила призы?

Р е ш е н и е .

Обозначим количество участников конкурса через k . Тогда из числа довольных итогами конкурса призы получили $0,6 \cdot 0,95 \cdot k = 0,57 \cdot a$ участников. Значит, среди недоволь-

ных результатами конкурса $0,05 \cdot a$ участников призы получили $0,58 \cdot a - 0,57 \cdot a = 0,01 \cdot a$ школьников, т.е. одна пятая часть.

О т в е т : 20%.

959. В банк кладется некоторая сумма денег. В каком случае на счету окажется больше денег: если банк начисляет 6% от имеющейся суммы один раз в год или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1,5?

Р е ш е н и е .

Пусть сумма вклада равна 1. Тогда в первом случае через год на счету окажется $s = 1 + \frac{6}{100}$, во втором -

$$S = \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^4 = \left(1 + \frac{3}{100} + \left(\frac{1,5}{100}\right)^2\right) > \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 > 1 + \frac{6}{100} = s.$$

О т в е т : во втором случае.

960. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных - от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

Р е ш е н и е .

Пусть M и m - вес свежих и сушеных грибов соответственно, а x - вес сухого вещества (неизменный), тогда доля сухого вещества в свежих и сушеных грибах колеблется соответственно в пределах

$$\begin{cases} 0,01 = 1 - 0,99 \leq \frac{x}{M} \leq 1 - 0,90 = 0,10, \\ 0,55 = 1 - 0,45 \leq \frac{x}{m} \leq 1 - 0,30 = 0,70. \end{cases}$$

Значит, наибольшее количество раз, в которое уменьшится вес грибов, равно

$$\frac{M}{m} = \frac{x/m}{x/M} = \frac{0,70}{0,01} = 70.$$

О т в е т : 70.

961. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в таком классе?

Р е ш е н и е .

Пусть n — число учеников в классе, а m из них повысили успеваемость. Тогда

$$2,9 \leq \frac{m}{n} 100 \leq 3,1 \Rightarrow n \geq \frac{1000}{31} m \geq \frac{1000}{31} > 32 \Rightarrow n \geq 33,$$

а при $n = 33$, $m = 1$ все условия задачи выполнены.

О т в е т : 33.

962. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $12, 11\frac{1}{9}$ и, наконец, 12,5% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите, сколько месяцев вклад хранился в банке.

Р е ш е н и е .

Пусть под действием первой ставки вклад находился m_1 месяцев, под действием второй — m_2 , третьей — m_3 , чет-

вертой — m_4 месяцев. Примем первоначальный размер вклада за 1. Тогда

$$1 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{28}{25}\right)^{m_2} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^{m_3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{m_4} = 1 \cdot \frac{49}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21^{m_1} \cdot 28^{m_2} \cdot 10^{m_3} \cdot 9^{m_4} \cdot 24 = 20^{m_1} \cdot 25^{m_2} \cdot 9^{m_3} \cdot 8^{m_4} \cdot 49.$$

Раскладывая основания множителей в произведение простых, получаем

$$2^{2m_2+m_3+3} \cdot 3^{m_1+2m_4+1} \cdot 5^{m_3} \cdot 7^{m_1+m_2} = 2^{2m_1+3m_4} \cdot 3^{2m_3} \cdot 5^{m_1+2m_2} \cdot 7^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_2 + m_3 + 3 = 2m_1 + 3m_4 \\ m_1 + 2m_4 + 1 = 2m_3 \\ m_3 = m_1 + 2m_2 \\ m_1 + m_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 3, m_4 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 7.$$

О т в е т : 7.

963. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продаж по 4402 руб. каждый. Определите цену продажи одной акции видов А и Б.

Р е ш е н и е .

Обозначим через x, y, z количество акций вида А в начале дня у первого, второго и третьего брокеров соответственно, а через p и q — цены на акции видов А и Б. Тогда

$$\begin{cases} px + q(11 - x) = 4402, & (p - q)x + 11q = 4402, \\ py + q(21 - y) = 4402, & \Leftrightarrow (p - q)y + 21q = 4402, \\ pz + q(29 - z) = 4402 & (p - q)z + 29q = 4402. \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первого и второго, получаем

$$\begin{cases} (p - q)(x - z) = 18q, \\ (p - q)(y - z) = 8q. \end{cases}$$

Разделив почленно уравнения последней системы одно на другое, получаем $4(x - z) = 9(y - z)$, а так как $p > q > 0$, то $x - z > 0, y - z > 0$. Значит, $x - z = 9n, n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $x \leq 10, z \geq 1$, поэтому $9 \geq x - z > 0$. Откуда $x - z = 9, y - z = 4$. Значит, $x = 10, z = 1, y = 5$. Подставляя эти значения в исходную систему, получаем $p = 426, q = 142$.

О т в е т : 426 и 142.

964. Для заготовки сена фермер 3 раза с интервалом в неделю скашивал на лугу одно и то же количество травы. После 3 покосов масса травы на лугу уменьшилась на 78,3% по сравнению с ее значением до начала покосов. Определите, сколько процентов составляет масса всей скошенной травы от первоначальной массы, если еженедельный прирост травы составляет 10%.

Р е ш е н и е .

Пусть m — масса травы на лугу перед первым покосом, x — масса травы, скашиваемой за один раз, $3x$ — масса всей скошенной травы. За неделю масса травы увеличивается в $1 + \frac{10}{100} = 1,1$ раза. Тогда масса травы на лугу после третьего покоса составляет

$$((m - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = (1 - 0,783)m = 0,217m.$$

Отсюда

$$x = \frac{1,1^2 - 0,217}{1,1^2 + 1,1 + 1} \cdot m = \frac{0,993}{3,31} \cdot m = 0,3m.$$

Поэтому искомый процент равен $\frac{3x}{m} \cdot 100 = 90$.

О т в е т : 90%.

965. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае если на

одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Найдите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции (без скидок) составляла 1000 рублей.

Решение.

Среди чисел от 1 до 1000 на 13 делятся 76 чисел, на 5 делятся 200 чисел, а на 5 и 13 одновременно делятся 15 чисел. Значит, со скидкой в размере 25% было продано 76 акций, а со скидкой в 10% было продано $200 - 15 = 185$ акций. Поэтому общая выручка от продаж составила $1000 \cdot 1000 - 250 \cdot 76 - 185 \cdot 100 = 962500$ руб.

О т в е т : 962 500 руб.

966. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех разных магазинах, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?

Решение.

Через первый магазин было продано $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ товара, а через второй — $\frac{40}{100} \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{25}$ всего товара. Значит, через третий магазин было продано $1 - \frac{3}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$ всего товара.

Пусть прибыль от продаж в третьем магазине составила $p\%$, тогда

$$30 \cdot \frac{3}{5} + 25 \cdot \frac{4}{25} + p \cdot \frac{6}{25} = 26,8, \text{ откуда } p = 20.$$

О т в е т : 20%.

967. Имеются 3 пакета акций. Общее суммарное количество акций первых 2 пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете?

Решение.

Пусть k, m и n – количества акций в первом, втором и третьем пакетах соответственно; x, y и z – цены (в тыс. руб.) одной акции в этих пакетах соответственно. Нужно найти пределы изменения величины

$$p = \frac{k}{k+n+m} \cdot 100,$$

при условиях:

$$\begin{cases} k+m=n, kx+my=nz, 4kx=my, \\ 16 \leq y-x \leq 20, 42 \leq z \leq 60, \\ k, m, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Положив $q = \frac{m}{k}$, получаем $x = \frac{qy}{4}, z = \frac{5qy}{4(1+q)}, p = \frac{50}{1+q}$.

Тогда неравенства исходной системы принимают вид

$$\begin{cases} \frac{64}{4-q} \leq y \leq \frac{80}{4-q}, \\ 168 \cdot \frac{1+q}{5q} \leq y \leq 240 \cdot \frac{1+q}{5q}. \end{cases}$$

Эта система имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{64}{4-q} \leq 240 \cdot \frac{1+q}{5q}, \\ 168 \cdot \frac{1+q}{5q} \leq \frac{80}{4-q}. \end{cases}$$

Значит, $\frac{7}{3} \leq q \leq 3$, откуда для $p = \frac{50}{1+q}$ получаем $12,5 \leq p \leq 15$.

О т в е т : 12,5% и 15%.

968. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

Р е ш е н и е .

В течение 9 лет ежегодно долг перед банком (в млн руб.) по состоянию на июль уменьшается на $4,5 : 9 = 0,5$, поэтому последовательность размеров долга в июле такова: 4,5, 4, ..., 0,5, 0. А поскольку в каждом январе он увеличивается на $r\%$, то есть умножается на $k = 1 + \frac{r}{100}$, то последовательность размеров долга в январе такова: $4,5k$, $4k$, ..., k , $0,5k$. Следовательно, наибольший платеж составит $4,5k - 4$, а наименьший платеж — $0,5k - 0$ млн рублей, откуда имеем

$$\begin{cases} 4,5k - 4 \leq 1,4 \\ 0,5k \geq 0,6 \end{cases} \Rightarrow 1,2 \leq k \leq 1,2 \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = 1,2 \Rightarrow r = 20\%.$$

О т в е т : 20.

972. По вкладу А в конце каждого года банк увеличивает сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, на 10% в течение 3 лет, а по вкладу Б — на 11%, но только в

течение первых 2 лет. Найдите наименьшее целое число процентов за 3-й год по вкладу Б, при котором за все 3 года этот вклад все еще останется выгоднее вклада А.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма. На вкладе А каждый год сумма увеличивается на 10%, поэтому через 3 года она увеличится в $1,1^3$ раз. Аналогично, на вкладе Б сумма через 3 года увеличится в $1,11^2 \left(1 + \frac{n}{100}\right)$ раз, где n — натуральное число. Искомое наименьшее целое решение неравенства

$$1,11^2 \left(1 + \frac{n}{100}\right) S > 1,1^3 S \Leftrightarrow n > 100 \frac{13310 - 12321}{12321} = 8,02\dots$$

есть $n = 9$.

Ответ: 9.

973. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца имеющийся на этот момент долг взявшего кредит возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма долговых выплат после полного погашения кредита будет на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . Тогда сумма долговых выплат сверх кредита равна

$$\frac{r}{100} \left(\frac{19}{19} S + \frac{18}{19} S + \dots + \frac{1}{19} S \right) = \frac{3}{10} S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{190 \cdot 3}{19 + 18 + \dots + 1} = \frac{190 \cdot 3 \cdot 2}{19(19 + 1)} = 3.$$

О т в е т : 3.

974. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?

Р е ш е н и е .

Пусть указанный вкладчик в общем вкладе, составляющем y млн руб., вначале имел x млн руб., а добавил и еще собирается добавить он в общей сложности z млн руб. Тогда искомая величина равна $z - 2$, а из условия задачи получаем

$$\begin{cases} 0,04 = \frac{x+1}{y+1} - \frac{x}{y} = \frac{y-x}{y(y+1)}, \\ 0,06 = \frac{x+2}{y+2} - \frac{x}{y} = \frac{2(y-x)}{y(y+2)}, \\ 0,10 = \frac{x+z}{y+z} - \frac{x}{y} = \frac{z(y-x)}{y(y+z)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,04 = \frac{y+2}{2(y+1)}, \\ 0,04 = \frac{y+z}{z(y+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y + 4 = 3y + 6, \\ 2z(y+1) = 5y + 5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = 10. \end{cases}$$

О т в е т : 8 млн р.

975. Положительные числа x и y таковы, что 3% от x меньше, чем 2% от y . Какое из чисел меньше: $\frac{y}{x}$ или $\sqrt{2}$?

Р е ш е н и е .

Из условия задачи $0,03x < 0,02y$. Значит, $\frac{y}{x} > \frac{3}{2} > \sqrt{2}$.

О т в е т : $\sqrt{2}$.

976. Две подруги отправились в магазин, имея одинаковые суммы на счетах своих кредитных карт. Одна из подруг израсходовала на одну покупку 40% своих денег, вторая израсходовала на первую покупку 20% своих денег, а на вторую покупку 25% оставшихся у нее денег после первой покупки. Какая из подруг израсходовала больше денег?

Решение.

Пусть у каждой из подруг при входе в магазин было 100 процентов, из которых первая израсходовала 40, а вторая $20 + \frac{1}{4} \cdot 80 = 40$.

Ответ: одинаково.

980. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 л 40%-го и 6 л 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получили 39%-й раствор кислоты. Сколько литров чистой воды было добавлено?

Решение.

Если было добавлено x л воды, то

$$(0,4 \cdot 4 + 0,6 \cdot 6) \frac{10 - x}{10} = 0,39 \cdot 10 \Leftrightarrow x = 10 - \frac{39}{5,2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

981. На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — лишь 4%. Найдите средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X , а на факультете Z — вдвое меньше, чем на факультете X .

Решение.

Пусть на факультете X учится s студентов, тогда на факультетах Y и Z соответственно учится $\frac{3}{2}s$ и $\frac{1}{2}s$ студентов, а искомая величина равна

$$\frac{0,1s + 0,2 \cdot \frac{3s}{2} + 0,04 \cdot \frac{s}{2}}{s + \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}} = \frac{0,42}{3} = 0,14.$$

Ответ: 14%.

982. Популярность продукта А за 2012 г. выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2014 г. сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2012 г. снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2014 г. выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта А за 2014 г., если в начале 2012 г. она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта Б?

Решение.

Пусть x — процент изменения популярности продукта А за 2014 г., p — популярность продукта Б в начале 2012 г., тогда $\frac{2p}{3}$ — популярность продукта А в начале 2012 г. Из условия задачи имеем

$$\begin{aligned} p \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) &= p \cdot 0,8 \cdot 1,4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} &= \frac{3 \cdot 8 \cdot 14}{2 \cdot 12 \cdot 9} = \frac{14}{9} \Leftrightarrow x = \frac{500}{9}. \end{aligned}$$

Ответ: выросла на $\frac{500}{9}$ %.

988. Имеются два слитка золота массой 300 г и 400 г с различным процентным содержанием золота. Каждый слиток нужно разделить на две части таким образом, чтобы из получившихся четырех кусков можно было изготовить два слитка массой 200 г и 500 г с равным процентным содержанием золота. На какие части следует разделить каждый слиток?

Р е ш е н и е .

Ясно, что в новых слитках массой 200 г и 500 г процентное содержание золота такое же, как и в 700-граммовом слитке, получившемся бы при сплавлении исходных слитков. Следовательно, и отношение, в котором в каждый новый слиток входят части исходных, должно быть равно 3 : 4. Значит, 200-граммовый слиток должен содержать $\frac{3}{7} \cdot 200 = \frac{600}{7}$ г первого исходного слитка и $\frac{4}{7} \cdot 200 = \frac{800}{7}$ второго.

О т в е т : Слиток массой 300 г на части: $\frac{600}{7}$ и $\frac{1500}{7}$, а слиток массой 400г — на части: $\frac{800}{7}$ и $\frac{2000}{7}$.

989. Алиса и Базилио поделили между собой 39 золотых монет. Число монет, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа монет, доставшихся другому. Квадрат трети числа монет, доставшихся Базилио, меньше числа монет, доставшихся Алисе. Сколько монет досталось каждому?

Р е ш е н и е .

Пусть x и y число монет, доставшихся соответственно Алисе и Базилио, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 39 \\ x < 2y \\ y < 2x \\ y^2 < 9x \\ x, y \in \mathbb{N} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 39 \\ 39 - y < 2y \\ y < 78 - 2y \\ y^2 + 9y - 351 < 0 \\ x, y \in \mathbb{N}, \end{array} \right.$$

значит,

$$\left\{ \begin{array}{l} 13 < y < 26 \\ f(y) = y^2 + 9y - 351 < 0 \\ y \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Так как $f(14) = 14^2 + 9 \cdot 14 - 351 = -29 < 0$

и $f(15) = 15^2 + 9 \cdot 15 - 351 = 9 > 0$, то $y = 14, x = 25$.

О т в е т : Алисе 25, Базилио 14.

1001. На двух заводах производятся одинаковые товары, но на первом — с помощью более совершенной технологии: все рабочие первого завода за один рабочий день, трудясь суммарно $t \geq 1$ ч, производят суммарно $4\sqrt{t}$ единиц товара, а второго завода — только $3\sqrt{t}$. Владелец этих двух заводов планирует выделять на оплату труда рабочих по 5 000 000 руб. в день, платя каждому из них по 500 руб. в ч. Производство какого наибольшего количества единиц товара в день владелец может организовать на этих двух заводах, установив на каждом из них свое суммарное время работы в день?

Р е ш е н и е .

Пусть x^2 и y^2 — суммарное время работы в день (в ч) на первом и втором заводах соответственно. Тогда требуется найти наибольшее значение количества $4x + 3y = a$ производимого ими товара при условиях $x^2 + y^2 \leq 100^2 = 5\,000\,000 / 500$ и $x, y \geq 0$.

I способ (алгебраический). Найдем наибольшее значение a , при котором имеет решение система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 100^2 \\ x, y \geq 0 \\ 4x + 3y = a. \end{cases}$$

С одной стороны, для того чтобы система имела решения, необходимо следующее

$$\begin{aligned} 0 &\geq x^2 + y^2 - 100^2 = x^2 + \left(\frac{a-4x}{3}\right)^2 - 100^2 = \\ &= \frac{25x^2 - 8ax + (a^2 - 300^2)}{9}, \end{aligned}$$

откуда

$$16a^2 - 25(a^2 - 300^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 \leq 500^2 \Rightarrow a \leq 500.$$

С другой стороны, при наибольшем возможном значении $a = 500$ система действительно имеет решение:

$$\begin{aligned} 25x^2 - 8 \cdot 500x + (500^2 - 300^2) &\leq 0 \Leftrightarrow (5x - 400)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 80, \\ y &= \frac{500 - 4 \cdot 80}{3} = 60. \end{aligned}$$

II способ (функциональный). При указанных условиях имеем оценку

$$\begin{aligned} a = 4x + 3y &\leq 4x + 3\sqrt{100^2 - x^2} = f(x) \leq f(80) = \\ &= 4 \cdot 80 + 3 \cdot 60 = 500, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{так как } f'(x) &= 4 + \frac{3(-2x)}{2\sqrt{100^2 - x^2}} \sim 4\sqrt{100^2 - x^2} - 3x \sim \\ &\sim 16(100^2 - x^2) - 9x^2 = 400^2 - (5x)^2 \sim 400 - 5x \sim -(x - 80), \end{aligned}$$

а значит, $x = 80$ — точка максимума функции f . Значение $a = 500$ реализуется при $x = 80$ и $y = 60$.

III способ (графический). Наибольшее значение a , при котором прямая $4x + 3y = a$ имеет общую точку с кругом $x^2 + y^2 \leq 100^2$, получается при их касании, т. е. когда высота прямоугольного треугольника, образованного прямой с

осями и имеющего катеты $x_0 = \frac{a}{4}$ и $y_0 = \frac{a}{3}$, равна радиусу круга 100, т. е. когда

$$\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{3} = 100 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = 100 \cdot \frac{5a}{4 \cdot 3} \Leftrightarrow a = 500.$$

О т в е т : 500.

1005. Клиент 31 декабря взял в банке кредит в размере S руб. под фиксированный процент (годовых). Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает имеющийся на этот момент долг на $p\%$, затем клиент переводит в банк фиксированную сумму в a руб. в качестве частичного (или полного) погашения долга. В итоге клиент ровно за 2 года выплатил долг полностью. Если бы он платил каждый год не по a руб., а по b руб., то выплатил бы долг ровно за 4 года. Зная произвольные две из трех величин a, b и p , найдите третью, а также величину S .

Р е ш е н и е .

Ответы на все поставленные вопросы получим, установив связь между параметрами a, b и p . Пусть $q = 1 + \frac{p}{100} > 1$, тогда из условия погашения долга за 2 и 4 года соответственно получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} (Sq - a)q - a = 0 \\ (((Sq - b)q - b)q - b)q - b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} Sq^2 = a(q + 1) \\ Sq^4 = b(q^3 + q^2 + q + 1) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow a(q + 1)q^2 = b(q^3 + q^2 + q + 1) = b \frac{q^4 - 1}{q - 1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow aq^2 = b \frac{q^4 - 1}{q^2 - 1} = b(q^2 + 1) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a-b)q^2 = b \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = q^2 = \frac{b}{a-b},$$

$$S = \frac{a(q+1)}{q^2} = \frac{100a(200+p)}{(100+p)^2}.$$

О т в е т : $(a-b)(100+p)^2 = 10000b, \quad S = \frac{100a(200+p)}{(100+p)^2}.$

18

1014. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases} \text{ имеет ровно три различных}$$

решения.

Р е ш е н и е .

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(xy-4) = 0 \\ 4 > y = ax \end{cases}$$

I. *Алгебраический способ*: система

при $a = 0$ решений не имеет (иначе из нее вытекает: $y = 0$ и $0 = 8$);

при $a \neq 0$ приводится к виду

$$\begin{cases} (y-2)(y^2 - 4a) = 0 \\ 4 > y = ax \end{cases}$$

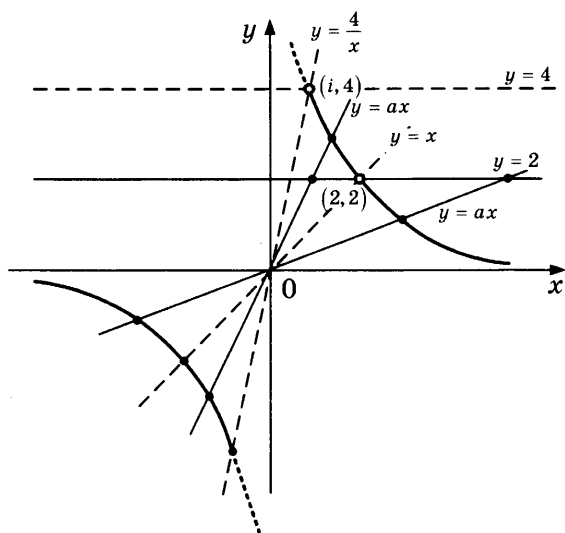
и поэтому:

2.1) при $a < 0$ имеет только 1 решение ($ax = y = 2$),

2.2) при $a > 0$ имеет ровно 3 решения ($ax = y = 2, \pm\sqrt{4a}$)

тогда и только тогда, когда $4 > \sqrt{4a} \neq 2 \Leftrightarrow 4 > a \neq 1$.

II. *Графический способ* (см. рис.): решения системы — это точки пересечения прямой $y = ax$ с прямой $y = 2$ и гиперболой $xy = 4$, расположенные ниже прямой $y = 4$.



Ответ: $0 < a < 1, 1 < a < 4$.

1024. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a$ имеет ровно три различных решения.

Решение.

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^2 + a^2 = (x^2 + 2x - a)^2 \\ x^2 + 2x - a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + (4 - a)x - 2ax = 0 \\ f(x) = x^2 + 2x - a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 2)(2x - a) = 0, \\ f(0), f(-2), f(a/2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, -2, a/2 \\ a \leq 0 \end{cases},$$

причем все три решения различны тогда и только тогда, когда $a \neq 0, -4$.

О т в е т : $a < -4, -4 < a < 0$.

1029. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a - 2 \cos x = x^2$ имеет ровно один корень.

Р е ш е н и е .

С одной стороны, правая часть уравнения $a = x^2 + 2 \cos x$ — четная функция от x , которая, принимая значение a в точке x , принимает его и в точке $-x$. Значит, если уравнение имеет ровно один корень, то этот корень — непременно нулевой и $a = 0^2 + 2 \cos 0 = 2$.

С другой стороны, при $a = 2$ и $x \neq 0$ уравнение имеет ровно один корень, так как

$$x^2 + 2 \cos x - 2 = x^2 - 4 \sin^2 t = 4(t^2 - \sin^2 t) > 0,$$

где $t = x/2 \neq 0$.

О т в е т : $a = 2$.

1068. Найдите наибольшее значение a , при котором уравнение

$$x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$$

с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2 .

Р е ш е н и е .

1. $p(-2) = 0$, где $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$,

$$\Leftrightarrow (-2)^3 + 5(-2)^2 + a(-2) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2a - 12.$$

$$2. \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b = 2a - 12 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow b \in \mathbb{Z}) :$$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + 5x^2 + ax + (2a - 12) \\ &= x^2(x + 2) + 3x(x + 2) + (a - 6)(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 + 3x + (a - 6)). \end{aligned}$$

3. Уравнение имеет три корня тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен

$$q(x) = x^2 + 3x + (a - 6)$$

имеет два различных корня, отличных от -2 :

$$\begin{cases} D > 0 \\ q(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 4(a - 6) > 0 \\ (-2)^2 + 3(-2) + (a - 6) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 8\frac{1}{4} \\ a \neq 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 7 \text{ (т. к. } a \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

О т в е т : $a = 7$.

1069. При каких значениях параметра n уравнение

$$15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$$

не имеет корней?

Р е ш е н и е .

$$1. 15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 15 \cdot 10^x + 10n \cdot 10^x = n + 20 \Leftrightarrow 10^x = \frac{n + 20}{15 + 10n}.$$

2. $E(10^x) = (0; \infty)$, поэтому требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда:

$$а) \text{ либо } \frac{n + 20}{15 + 10n} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{n + 20}{n + 1,5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -20 \leq n < -1,5;$$

б) либо $\frac{n+20}{15+10n}$ — не имеет смысла
 $\Leftrightarrow 15+10n=0 \Leftrightarrow n=-1,5$.

О т в е т : $-20 \leq n \leq -1,5$.

1070. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$4 \sin x + 9 = p(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

имеет хотя бы один корень.

Р е ш е н и е .

1. $4 \sin x + 9 = p(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$

$$\Leftrightarrow 4s + 9 = \frac{p}{s^2}, \text{ где } s = \sin x, (\Rightarrow p \neq 0, \text{ иначе } s = -\frac{9}{4} < -1)$$

$$\Leftrightarrow 4s^3 + 9s^2 = p \neq 0 (\Rightarrow s \neq 0, \text{ иначе } p = 4s^3 + 9s^2 = 0).$$

2. $f(s) = 4s^3 + 9s^2$, где $s \in [-1; 1]$:

а) $f'(s) = 12s^2 + 18s \sim s(s + 1,5) \sim s$ (т. к. $s + 1,5 > 0$);

б) $f'(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$,

в) $E(f)$:

- $f(1) = 4 + 9 = 13$,
- $f(-1) = -4 + 9 = 5$,
- $f(0) = 0$,
- $f_{\text{наиб}} = 13$, $f_{\text{наим}} = 0$,
- $E(f) = [0, 13]$.

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p \in E(f) \\ p \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq p \leq 13 \\ p \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < p \leq 13.$$

О т в е т : $0 < p \leq 13$. $E(f) = (0, 5] \cup (0, 13] = (0, 13]$.

1077. При каких значениях a сумма

$\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$
равна 1 хотя бы при одном значении x ?

Итак, в задаче спрашивается: при каких значениях a уравнение

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1$$

имеет хотя бы одно решение? Если в этом уравнении избавиться от логарифмов, то оно станет квадратным относительно $\cos^2 x$. Но ведь хорошо известно, что квадратное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, каковое требование как будто и представляет искомое ограничение на параметр a .

К сожалению, не все так просто:

- на параметр a нужно наложить еще и условие $0 < a \neq 1$, поскольку он стоит в основании логарифма;
- неотрицательность дискриминанта, разумеется, необходима для наличия корней, но не достаточна. Нужно еще, чтобы хотя бы один из этих корней соответствовал реальному значению величины $\cos^2 x$, т. е. чтобы он принадлежал отрезку $[0; 1]$ (в противном случае корни квадратного уравнения хотя и найдутся, но ни один из них не даст значений x , удовлетворяющих рассматриваемому уравнению).

Р е ш е н и е .

1. $\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1$
 $\Leftrightarrow \log_a((c + 1)(c + 5)) = \log_a a$, где $c = \cos^2 x \geq 0$
 $\Leftrightarrow (c + 1)(c + 5) = a$ ($\Rightarrow 0 < a \neq 1$, т. к. $c \geq 0$)
 $\Leftrightarrow c^2 + 6c + 5 = a \Leftrightarrow (c + 3)^2 - 4 = a$.
2. $E(\cos x) = [-1; 1]$
 $\Rightarrow E(c) = [0; 1] \Rightarrow E(c + 3) = [3; 1 + 3] = [3; 4]$
 $\Rightarrow E((c + 3)^2) = [3^2; 4^2] = [9; 16]$
 $\Rightarrow E((c + 3)^2 - 4) = [9 - 4; 16 - 4] = [5; 12]$.

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $a \in [5; 12]$.

Ответ: $5 \leq a \leq 12$.

1083. При каких значениях a выражение

$$1 + \sin x (3 \sin x + a \cos x)$$

не равно нулю ни при каких значениях x ?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, достаточно приравнять данное выражение к нулю и найти все значения параметра, при которых полученное уравнение не имеет решений.

Решение.

1. $1 + \sin x (3 \sin x + a \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 + 3 \cdot (1 - \cos 2x) + a \cdot \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5 = 3 \cos 2x - a \cdot \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 5 = \sqrt{9 + a^2} \left(\frac{3}{\sqrt{9 + a^2}} \cos 2x - \frac{a}{\sqrt{9 + a^2}} \sin 2x \right)$$

$$\Leftrightarrow 5 = \sqrt{9 + a^2} \cos(2x + \varphi), \text{ где } \varphi = \arcsin \frac{a}{\sqrt{9 + a^2}}.$$

2. $E(\cos(2x + \varphi)) = [-1; 1]$

$$\Rightarrow E\left(\sqrt{9 + a^2} \cos(2x + \varphi)\right) = \left[-\sqrt{9 + a^2}; \sqrt{9 + a^2}\right].$$

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$5 \notin \left[-\sqrt{9 + a^2}; \sqrt{9 + a^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 5 > \sqrt{9 + a^2} \Leftrightarrow 25 > 9 + a^2 \Leftrightarrow 16 > a^2 \Leftrightarrow -4 < a < 4.$$

Ответ: $-4 < a < 4$.

1087. При каких значениях a выражение

$$(1 - x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$$

больше выражения

$$0,25^{1-|a|-\log_2 \sqrt{1-x^2}}$$

при всех допустимых значениях x ?

Если записать описанное в условии задачи неравенство (призванное быть выполненным при всех допустимых значениях неизвестной), то от обеих его частей можно взять логарифм по основанию 4. Тогда неизвестная величина будет содержаться не иначе как в выражении $l = \log_4(1 - x^2)$, относительно которого само неравенство будет квадратным.

Р е ш е н и е .

1. $(1 - x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4} > 0,25^{1-|a|-\log_2 \sqrt{1-x^2}}$
 $\Leftrightarrow \log_4(1 - x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4} > \log_4 0,25^{1-|a|-\log_4(1-x^2)}$
 $\Leftrightarrow (l - a^4)l > (1 - |a| - l) \cdot (-1)$,
 где $l = \log_4(1 - x^2)$,
 $\Leftrightarrow l^2 - (a^4 + 1)l + (1 - |a|) > 0$.
2. $E(l) = E(\log_4(1 - x^2))$
 $= (-\infty; \log_4 1]$, т. к. $E(1 - x^2) = (-\infty; 1] \supset (0; 1]$,
 $= (-\infty; 0]$.
3. $f(l) = l^2 - (a^4 + 1)l + (1 - |a|)$, $l \leq 0$:
 а) l^2 — убывает,
 б) $-(a^4 + 1)l$ — убывает (т. к. $a^4 + 1 > 0$),
 в) $f(l)$ — убывает,
 г) $f_{\min} = f(0) = 1 - |a|$.

4. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $f_{\text{наим}} > 0$.

$$\Leftrightarrow 1 - |a| > 0 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1.$$

О т в е т : $-1 < a < 1$.

1091. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 9^a + 3^{2+a} - 1$ и $c = 3^{2-a} - 9^{-a} - 5$ меньше 9.

Р е ш е н и е 1 .

$$\max\{b, c\} < 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b < 9 \\ c < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^a + 3^{2+a} - 1 < 9 \\ 3^{2-a} - 9^{-a} - 5 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^a + 9 \cdot 3^a - 10 < 0 \\ 9^{-a} - 9 \cdot 3^{-a} + 14 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^a - 1)(3^a + 10) < 0 \\ ((3^a)^{-1} - 2)((3^a)^{-1} - 7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (3^a - 1/2)(3^a - 1/7) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < 3^a < 1 \\ 3^a < 1/7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\log_3 2 < a < 0 \\ a < -\log_3 7. \end{cases}$$

О т в е т : $a < -\log_3 7$, $-\log_3 2 < a < 0$.

Р е ш е н и е 2 .

1. $b < 9$

$$\Leftrightarrow 9^a + 3^{2+a} - 1 < 9$$

$$\Leftrightarrow 9^a + 9 \cdot 3^a - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3^a - 1)(3^a + 10) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3^a < 1 \Leftrightarrow a < 0.$$

2. $c < 9$

$$\Leftrightarrow 3^{2-a} - 9^{-a} - 5 < 9$$

$$\Leftrightarrow 9^{-a} - 9 \cdot 3^{-a} + 14 > 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{-a} - 2)(3^{-a} - 7) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-a} < 2 \\ 3^{-a} > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < \log_3 2 \\ -a > \log_3 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\log_3 2 \\ a < -\log_3 7. \end{cases}$$

3. Наибольшее из чисел b и c меньше 9 тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 9, т.е. когда

$$\begin{cases} b < 9 \\ c < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\log_3 2 < a < 0 \\ a < -\log_3 7. \end{cases}$$

О т в е т : $a < -\log_3 7$,
 $-\log_3 2 < a < 0$.

1098. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству

$$(2a - 1)x^2 < (a + 1)x + 3a$$

при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(1; 2)$.

Р е ш е н и е 1 .

1. $(2a - 1)x^2 < (a + 1)x + 3a \Leftrightarrow (2x^2 - x - 3)a + (-x^2 - x) < 0$
 $\Leftrightarrow f(a) < 0$,

где

$f(a) = (2x^2 - x - 3)a + (-x^2 - x)$ — линейная функция.

2. Неравенство выполнено при всех $1 < a < 2$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

а) $\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$ (f — на обоих концах меньше или равна ну-

лю)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - x - 3) \cdot 1 + (-x^2 - x) \leq 0 \\ (2x^2 - x - 3) \cdot 2 + (-x^2 - x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ 3x^2 - 3x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 1) \leq 0 \\ (x - 2)(x + 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2,$$

$$\text{б) } \begin{cases} f(1) \neq 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \quad (f \text{ — не обнуляется сразу на обоих концах)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) \neq 0 \\ (x-2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1.$$

$$3. \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \leq 2.$$

О т в е т : $-1 < x \leq 2$.

Р е ш е н и е 2 .

1. $1 < a < 2$:

$$(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)x^2 - (a+1)x - 3a < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)((2a-1)x - 3a) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \left(x - \frac{3a}{2a-1} \right) < 0 \quad (\text{т. к. } 2a-1 > 2-1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) < 0,$$

где $x_1(a) = -1$, $x_2(a) = \frac{3a}{2a-1}$, $1 < a < 2$:

$$\text{а) } x_2(a) = \frac{3 \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}}{2 \left(a - \frac{1}{2} \right)} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2(2a-1)},$$

б) $x_2(a)$ убывает, т. к. $x(a) = 2a-1$ — положительна и возрастает,

$$\text{в) } E(x_2) = (x_2(2); x_2(1)) = (2; 3),$$

$$\text{г) } x_2(a) > x_1(a) = -1.$$

2. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда при всех

$$a \in (1; 2)$$

выполнено неравенство

$$x_1(a) < x < x_2(a),$$

т. е. когда

$$-1 < x \leq 2.$$

О т в е т : $-1 < x \leq 2$.

1099. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2 .

Заметим, что если ввести новую переменную $t = x^2$, то требование задачи сводится к тому, чтобы некоторый квадратный трехчлен от этой переменной (с зависящими от параметра коэффициентами) не имел корней на некотором, вполне определенном, промежутке.

Р е ш е н и е 1 .

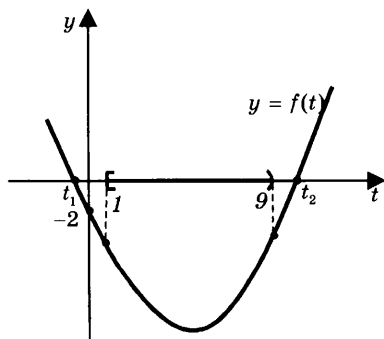
$$1. \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 2 \neq ax^2 \\ -3 < x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - (a+8)x^2 - 2 \neq 0 \\ (-1)^2 \leq x^2 < (-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) \neq 0 \\ 1 \leq t < 9, \end{cases}$$

где

$$t = x^2 \text{ и } f(t) = t^2 - (a+8)t - 2.$$

2. $y = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

а) график — парабола, ветвями вверх,



б) корни: $t_1 < 0 < t_2$, т. к. $f(0) = -2 < 0$.

3. $f(t) \neq 0$ — выполнено при всех $1 \leq t < 9$ тогда и только тогда, когда $t_2 \notin [1; 9)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 < 1 \\ t_2 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 - 1(a+8) - 2 > 0 \\ 9^2 - 9(a+8) - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -9 \\ a \geq \frac{7}{9} \end{cases}.$$

Ответ: $a < -9$, $a \geq \frac{7}{9}$.

Решение 2.

1. Значения указанных в задаче выражений не равны друг другу тогда и только тогда, когда выполнено условие

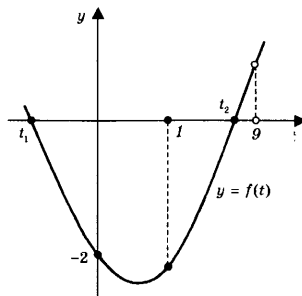
$$x^4 - 8x^2 - 2 \neq ax^2 \Leftrightarrow f(t) \neq 0,$$

где $t = x^2$ и $f(t) = t^2 - (a+8)t - 2$.

Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение $f(t) = 0$ не имело корней на промежутке $[(-1)^2; (-3)^2) = [1; 9)$.

2. График функции $y = f(t)$ (относительно переменной $t \in \mathbb{R}$) есть парабола, изображенная на рисунке: ее ветви направлены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс (т. к. $f(0) = -2$). Поэтому квадратный трехчлен $f(t)$ имеет два корня $t_1 < 0$ и $t_2 > 0$. Если $0 < t < t_2$, то $f(t) < 0$, а если $t > t_2$, то $f(t) > 0$, поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет корень на промежутке $[1; 9)$ тогда и только тогда, когда

$$1 \leq t_2 < 9 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(9) > 0 \end{cases}.$$



3. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 1^2 - (a + 8) - 2 \leq 0 \\ 9^2 - 9(a + 8) - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 \leq a < \frac{7}{9}.$$

Итак, уравнение $f(t) = 0$ не имеет корней на промежутке $[1; 9)$ для всех остальных значений a , т. е. тогда и только тогда, когда $a < -9$ или $a \geq \frac{7}{9}$.

Ответ: $a < -9$, $a \geq \frac{7}{9}$.

1108. Найдите все значения a , при каждом из которых не-

равенство
$$\frac{(2^x + 3\sqrt{2} \cdot 2^{-x} - 5) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x-1} - 3)} \leq 0$$
 не имеет решений.

В данном неравенстве удобно временно принять переменную a за неизвестную (а переменную x — за параметр) и применить метод интервалов.

Решение.

1. $f(x) = 2 \sin \sqrt{x-1} - 3$, $x \geq 1$:

$$E(\sin \sqrt{x-1}) = [-1; 1] \Rightarrow E(f) = [-2 - 3; +2 - 3] = [-5; -1].$$

2. $2^x + 3\sqrt{2} \cdot 2^{-x} - 5 = t + \frac{3\sqrt{2}}{t} - 5 = g(t)$, $t = 2^x \geq 2$:

$$\begin{aligned} g(t) &= t + \frac{3\sqrt{2}}{t} - 5 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{3\sqrt{2}}{t}} - 5 \quad (\text{неравенство для средних}) \\ &= 2\sqrt{3\sqrt{2}} - 5 = g(t_0), \end{aligned}$$

где

$$t_0 = \frac{3\sqrt{2}}{t_0} \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{3\sqrt{2}} \quad (> 2, \text{ т. к. } \Leftrightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4),$$

$$\Rightarrow g_{\text{наим}} = 2\sqrt{3\sqrt{2}} - 5 > 2\sqrt{16} - 5 = -1 = f_{\text{макс}}.$$

$$3. \frac{(2^x + 3\sqrt{2} \cdot 2^{-x} - 5) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x-1} - 3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a - g(2^x)}{a - f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < f(x) \\ a \geq g(2^x) \end{cases} \quad \text{— не верно ни при одном } x$$

тогда и только тогда, когда

$$f_{\text{наиб}} \leq a < g_{\text{наим}} \Leftrightarrow -1 \leq a < 2\sqrt[4]{18} - 5.$$

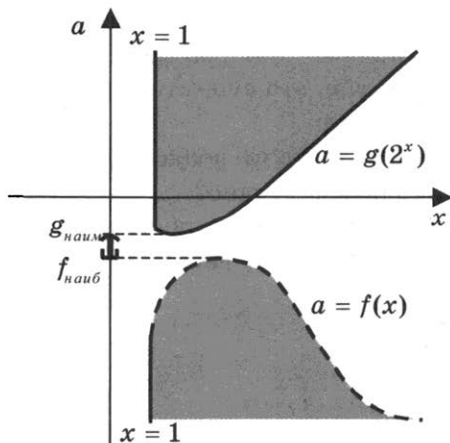
Ответ: $-1 \leq a < 2\sqrt[4]{18} - 5$.

Проиллюстрируем содержание задачи с помощью **метода областей**. При этом, в отличие от *метода интервалов*, будем изображать точки, имеющие не одну, а две координаты (x, a) , и, разумеется, не на прямой, а на плоскости.

1. Сначала нарисуем все кривые, при переходе через которые левая часть исходного неравенства в принципе может поменять знак или потерять смысл. Эти кривые задаются следующими равенствами:

- $a = f(x)$ (нижняя кривая),
- $a = g(2^x)$ (верхняя кривая),
- $x = 1$ (вертикальная прямая).

Они разбивают всю плоскость на области.



2. Теперь выберем те области, точки которых удовлетворяют исходному неравенству — они лежат справа от вертикальной прямой, но либо выше верхней кривой, либо ниже нижней. При этом часть границы выбранных (закрашенных) областей изображена на рисунке сплошной линией (если ее точки удовлетворяют неравенству), а часть — прерывистой (если не удовлетворяют).
3. Наконец, глядя на полученный рисунок, выберем такие значения a , для каждого из которых выполнено требование задачи, т. е. целиком вся соответствующая ему горизонтальная прямая расположена вне закрашенной области. Эти значения на картинке заполняют небольшой промежуток оси ординат, расположенный между экстремальными значениями двух данных функций. Они и составляют ответ к задаче.

1120. Найдите все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции

$$y = (a^x - a^{ax+2})^{-0.5}$$

есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

В задаче требуется, чтобы область определения функции содержала *двузначные натуральные числа* (подчеркнем, числа, а не число, т. е. это существование взято именно во множественном числе):

- не означает ли это, что их должно быть как минимум два,
- или одного тоже достаточно?

Посмотрим, может быть, в процессе решения этот вопрос отпадет сам собой, скажем, ввиду невозможности одной из перечисленных версий.

Р е ш е н и е .

1. $D(y)$ при $a > 0$:

$$a^x - a^{ax+2} > 0 \Leftrightarrow a^{ax+2} < a^x .$$

Рассмотрим три случая:

а) $a > 1$:

$$ax + 2 < x \Leftrightarrow (a - 1)x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{a - 1},$$

б) $a < 1$:

$$ax + 2 > x \Leftrightarrow (a - 1)x > -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{a - 1},$$

в) $a = 1$:

$1 < 1$ — решений нет.

Итак, $D(y): x < -\frac{2}{a - 1}$ ($\Rightarrow a \neq 1$).

2. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $10 < \frac{-2}{a - 1} \leq 100$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} > \frac{a - 1}{-2} \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{-2}{10} < a - 1 \leq \frac{-2}{100}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{10} < a \leq 1 - \frac{2}{100} \Leftrightarrow 0,8 < a \leq 0,98.$$

О т в е т : $0,8 < a \leq 0,98$.

1121. Найдите все положительные значения a , при которых область определения функции

$$y = \left((\sqrt{a})^{2x+1} + \sqrt{x} \cdot a^3 - x^{0,5+x \log_x a} - (\sqrt{a})^7 \right)^{0,5}$$

содержит не более двух целых чисел.

Наиболее естественный путь решения этой задачи состоит из двух этапов, которые могут в тексте решения разумно сочетаться с перебором случаев.

Р е ш е н и е .

$D(y)$ при $a > 0$, $x \in \mathbb{Z}$:

$$(\sqrt{a})^{2x+1} + \sqrt{x} \cdot a^3 - x^{0,5+x \log_x a} - (\sqrt{a})^7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{x+0,5} + x^{0,5} \cdot a^3 - x^{0,5} \cdot a^x - a^{3,5} \geq 0 \\ 1 \neq x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^x - a^3)(a^{0,5} - x^{0,5}) \geq 0 \\ x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая:

а) $a > 1$:

$$\begin{cases} (x-3)(a-x) \geq 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

(т. к. $a^x - a^3 \sim x-3$ и $a^{0,5} - x^{0,5} \sim a-x$)

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-a) \leq 0 \quad (\Rightarrow x > 1, \text{ т. к. } 3, a > 1),$$

причем

- $D(y) = [x_1; x_2]$, где $x_{1,2} = 3, a$ (возможно, $a = 3$),
- $D(y)$ содержит не более двух целых чисел тогда и только тогда, когда $1 < a < 5$;

б) $a < 1$:

$$\begin{cases} (3-x)(a-x) \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \quad (a^x - a^3 \sim 3-x \text{ и } a^{0,5} - x^{0,5} \sim a-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-a) \geq 0 \\ x > 1, \end{cases}$$

причем $D(y) \supset [3; \infty)$ — содержит более двух целых чисел;

в) $a = 1$:

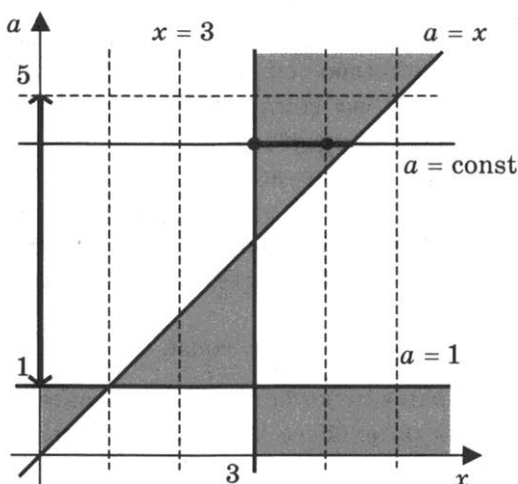
$$\begin{cases} 0 \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1,$$

поэтому $D(y) \supset (1; \infty)$ — содержит более двух целых чисел.

Ответ: $1 < a < 5$.

Упростить перебор случаев при решении задачи можно с помощью *графической иллюстрации*. Множество пар (x, a) , удовлетворяющих последней системе (при дополнительном

условии $a > 0$), можно изобразить на плоскости с соответствующими координатами.



На рисунке проведены все граничные линии, на которых только и возможна смена знака произведения из левой части неравенства

$$(x - 3)(a - 1)(a - x) \geq 0,$$

и покрашены те области, в которых знак этого произведения положителен. Его знак в каждой из полученных областей постоянен, т. к. он постоянен у каждого сомножителя.

Конкретный знак произведения можно определить с помощью следующего рассуждения, присущего **методу областей**. Описывать его в тексте решения не требуется, так же как и при использовании **метода интервалов**.

- Сначала рассматривается на рисунке наиболее простая область, в которой все сомножители, например, положительны, а значит, заведомо положительно и их произведение. В данном случае это та область (на рисунке она — правая верхняя), в которой выполнена система из трех

$$\text{неравенств } \begin{cases} x > 3 \\ a > 1 \\ a > x. \end{cases}$$

- Знаки произведения в остальных областях определяются последовательными переходами от одной области к другой, соседней с ней по граничной линии. При этом удобно воспользоваться следующим наблюдением: при переходе из какой-либо области в соседнюю знак, как правило, одного из сомножителей меняется, а значит, меняется и знак произведения.

Как же теперь по рисунку ответить на поставленный в задаче вопрос? Для этого нужно перевести вопрос на наглядный геометрический язык. Итак, требуется найти все такие значения a , чтобы соответствующие им горизонтальные прямые вида

$$a = \text{const}$$

пересекали закрашенную фигуру по отрезкам, содержащим в общей сложности не более двух целых чисел

$$x > 1,$$

т. е. пересекающим на рисунке не более двух вертикальных прямых (одна из таких прямых, для примера, на рисунке проведена). Изучив визуально рисунок, заключаем, что искомые значения a заполняют в точности интервал $(1; 5)$.

1126. Из области определения функции

$$y = \log_3 \left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} \right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a , при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

Решение.

$D(y)$ при $a, x > 0$:

$$a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}} \Leftrightarrow \lg a^a > \lg a^{\frac{5x+2}{x+2}} \Leftrightarrow \left(\frac{5x+2}{x+2} - a \right) \lg a < 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 2 - a(x + 2))(a - 1) < 0, \text{ т. к. } \lg a \sim a - 1,$$

$$\Leftrightarrow ((a - 5)x + 2(a - 1))(a - 1) > 0 \quad (\Rightarrow a \neq 5)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(a - 5)(a - 1) > 0, \text{ где } x_0 = -\frac{2(a - 1)}{a - 5}.$$

Рассмотрим два случая (т. к. $0 < a \neq 1, 5$):

а) $1 < a < 5$:

$$(x - x_0)(a - 5)(a - 1) > 0 \Leftrightarrow x < x_0,$$

причем сумма таких $x \in \mathbb{N}$ больше 9, но меньше 13 тогда и только тогда, когда она равна

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

(т. к. $1 + 2 + 3 = 6 < 9$ и $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 13$),

т. е. когда $4 < x_0 \leq 5$

$$\Leftrightarrow 4 < -\frac{2(a - 1)}{a - 5} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 4(5 - a) < 2(a - 1) \leq 5(5 - a) \quad (\text{т. к. } a < 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 < 3a \\ 7a \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{3} < a \leq \frac{27}{7} \quad (< 5);$$

б) $\begin{cases} a < 1 \\ a > 5 \end{cases}$:

$$(x - x_0)(a - 5)(a - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > x_0 \text{ — бесконечно много } x \in \mathbb{N}.$$

О т в е т : $\frac{11}{3} < a \leq \frac{27}{7}$.

1129. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$x(x - 2) \leq (a + 1)(|x - 1| - 1)$$

содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

Решение.

$$1. \quad x(x-2) \leq (a+1)(|x-1|-1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 \leq (a+1)(|x-1|-1)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 \leq (a+1)(y-1),$$

$$\text{где } y = |x-1| \quad (\Rightarrow (x-1)^2 = |x-1|^2 = y^2),$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+1) - (a+1)(y-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-a) \leq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq |x-1| \leq y_2, \text{ где } y_{1,2} = 1, a.$$

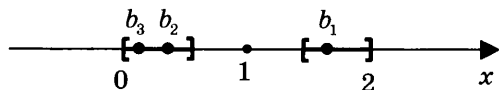
$$2. \quad x = 1,7 \text{ — решение}$$

$$\Rightarrow y_1 \leq |1,7-1| \leq y_2$$

$$\Rightarrow y_1 \leq 0,7 \leq y_2 \quad (\Rightarrow y_1 \neq 1 \Rightarrow y_1 = a, \quad y_2 = 1) \Rightarrow a \leq 0,7.$$

$$3. \quad a \leq 0,7:$$

$$a \leq |x-1| \leq 1$$



$$\Leftrightarrow 0,7 \leq |x-1| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7 \leq x-1 \leq 1 \\ -1 \leq x-1 \leq -0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,7 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 0,3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = b_1, b_2, b_3, \dots, \text{ где:}$$

$$b_1 = 1,7, \quad b_2 = b_1 q = 0,17 < 0,3 \quad (\Rightarrow q = \frac{0,17}{1,7} = 0,1),$$

$$b_3 = b_2 q, \dots,$$

поэтому все указанные значения a удовлетворяют требованию задачи.

$$\text{О т в е т : } a \leq 0,7.$$

1130. Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства

$$x(x-2a-4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$$

нельзя расположить два отрезка длиной 1,5 каждый, которые не имеют общих точек.

Решение.

$$\begin{aligned} 1. \quad x(x - 2a - 4) &< \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a \\ &\Leftrightarrow (x(x - 2a) + a^2) + \left(-\frac{4a^2}{x} + 8a - 4x\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 2ax + a^2) - 4(a^2 - 2ax + x^2)}{x} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 4)(x - a)^2}{x} < 0 \quad (\Rightarrow x \neq a \Rightarrow (x - a)^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 4}{x} < 0 \\ x \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \neq a. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Рассмотрим три случая:

а) $a < 1$: множество решений содержит промежуток $[a; 4)$ — длиной больше 3;

б) $1 \leq a \leq 3$:

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < x < 4 \\ 0 < x < a, \end{cases}$$

- каждый промежуток — длиной не больше 3,
 - длина каждого промежутка больше 1,5 тогда и только тогда, когда $1,5 < a < 2,5$;
- в) $a > 3$: множество решений содержит промежуток $(0; a]$ — длиной больше 3.

О т в е т : $1 \leq a \leq 1,5$, $2,5 \leq a \leq 3$.

1136. Известно, что уравнение

$$(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p , при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x + 1}{21 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 3}.$$

Решение.

$$1. \frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$$

$$\Leftrightarrow (2(x-3)+7)(\sqrt{x-3}+3) = 21-p \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (2t^2+7)(t+3) = 21-p \neq 0, \text{ где } t = \sqrt{x-3} \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow -(2t^3+6t^2+7t) = p \quad (\Rightarrow p \leq 0 \Rightarrow p \neq 21).$$

$$2. f(t) = -(2t^3+6t^2+7t), \quad t \geq 0:$$

$$а) f'(t) = -(2t^3+6t^2+7t)'$$

$$= -(6t^2+12t+7) = -6(t+1)^2 - 1 < 0,$$

б) f — убывает,

в) $f(t) = p$ — не более одного корня,

$$г) E(f) = (-\infty; f(0)] = (-\infty; 0].$$

3. Требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда уравнения

$$f(t) = p \text{ и } (2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$$

имеют ровно по одному корню, т. е. в следующих двух случаях:

$$а) \begin{cases} 2p+3 \neq 0 & (\text{первое уравнение — квадратное}) \\ (p+3)^2 - 4(2p+3) = 0 & (\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0) \\ p \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p-3)(p+1) = 0 \\ -3/2 \neq p \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = -1;$$

$$б) \begin{cases} 2p+3 = 0 & (\text{первое уравнение — линейное}) \\ p+3 \neq 0 & (\text{его старший коэффициент не равен } 0) \\ p \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p = -1,5.$$

Ответ: $p = -1,$
 $-1,5$.

1137. Даны два уравнения

$$\log_5(x(p^2 + 6)) = p + 5 - 2x$$

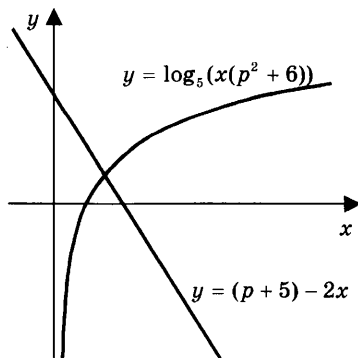
и $x + \frac{3}{x} = \frac{x^2(5p + 1) + (4 - 3p)x + 3}{x(3p + 2)}$.

Значение параметра p выбирается так, что $3p + 2 \neq 0$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $p - 3$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Несмотря на пугающий вид самих уравнений, некоторые результаты может дать уже их первичный осмотр.

- Левая и правая части первого уравнения имеют разную монотонность по переменной x (одна возрастает, другая убывает). Поэтому число его корней равно либо 0, либо 1.
- Если во втором уравнении избавиться от знаменателя, то оно станет не более чем квадратным. Поэтому число его корней равно либо 0, либо 1, либо 2.

Ну что же, все не так страшно: в худшем случае придется рассмотреть 6 вариантов. Изучив поглубже первое уравнение, точнее, взаимное расположение эскизов графиков левой и правой его частей, понимаем, что на самом-то деле оно имеет ровно один корень. Но это утверждение нужно будет в тексте решения еще обосновать.



Так что случаев становится уже не 6, а 3. Уменьшить их число, возможно, удастся и еще, но только за счет более детального анализа второго уравнения.

Решение.

1. $p - 3 \in \mathbb{Z}$ (как разность целых чисел)

$$\Rightarrow p \in \mathbb{Z}.$$

2. $\log_5(x(p^2 + 6)) = p + 5 - 2x$ — ровно один корень, т. к.:

а) $f(x) = \log_5(x(p^2 + 6))$ — определена при $x \in (0; \infty)$,

непрерывна и возрастает от $-\infty$ до ∞ (т. к. $p^2 + 6 > 0$),

б) $g(x) = p + 5 - 2x$ — определена при $x \in (-\infty; \infty)$,

непрерывна и убывает от ∞ до $-\infty$,

в) при $x \rightarrow \infty$: $f(x) > g(x)$,

г) при $x \rightarrow +0$: $f(x) < g(x)$.

3. $x + \frac{3}{x} = \frac{x^2(5p+1) + (4-3p)x + 3}{x(3p+2)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 3)(3p + 2) = x^2(5p + 1) + (4 - 3p)x + 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2p - 1)x^2 - (3p - 4)x - 3(3p + 1) = 0$$

$$(\Rightarrow x \neq 0, \text{ иначе } p = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)((2p - 1)x + (3p + 1)) = 0$$

$$(\Rightarrow 2p - 1 \neq 0, \text{ иначе } p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)\left(x + \frac{3p + 1}{2p - 1}\right) = 0 \text{ — ровно два корня}$$

$$(\text{т. к. } -\frac{3p + 1}{2p - 1} \neq 3, \text{ иначе } -3p - 1 = 3(2p - 1) \Rightarrow p = \frac{2}{9} \notin \mathbb{Z}).$$

4. $1 = (p - 3) + 2 \Leftrightarrow p = 2.$

5. $p = 2$:

$$\log_5 (x(p^2 + 6)) = p + 5 - 2x \Leftrightarrow \log_5 10x = 7 - 2x \Leftrightarrow x = 2,5,$$

т. к.:

а) $\log_5 10 \cdot 2,5 = 2 = 7 - 2 \cdot 2,5$,

б) корень единственный.

О т в е т : $x = 2,5$.

1144. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4 \sin a - 3$ и $8 \cos 2a + 16 \sin a + 1$ являются решениями неравенства

$$\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3 |x-9| - 2} \geq 0.$$

Р е ш е н и е .

1. $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3 |x-9| - 2} \geq 0$, причем $2 = \log_3 3^2 = \log_3 |9|$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\left(x - \frac{26}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)(x+2)}{|x-9|^2 - |9|^2} \leq 0, \\ x+2 \geq 0 \\ |x-9| > 0 \end{cases},$$

т. к. $(\log_3 u - \log_3 v) \sim (u - v)$

при $u, v > 0$, $(|u| - |v|) \sim (u^2 - v^2)$ и $\sqrt{u} \sim u$ при $u \geq 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 \neq x \geq -2 \quad (\Leftrightarrow x + 2,5 > 0) \\ \frac{(x-13)(x+2)}{x(x-18)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 13 \leq x < 18. \end{cases}$$

2. $x_1 = 4 \sin a - 3$ — решение неравенства тогда и только тогда, когда

$$-2 \leq x_1 < 0, \text{ т. к. } x_1 \leq 4 - 3 < 13,$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 4s - 3 < 0, \text{ где } s = \sin a, \Leftrightarrow 0,25 \leq s < 0,75.$$

3. $x_2 = 8 \cos 2a + 16 \sin a + 1$

$$= 8(1 - 2s^2) + 16s + 1 = -16s^2 + 16s + 9$$

$$= 13 - (4s - 2)^2 = f(s), \quad 0,25 \leq s < 0,75,$$

причем

$$E(4s - 2) = [4 \cdot 0,25 - 2; 4 \cdot 0,75 - 2] = [-1; 1],$$

$$E((4s - 2)^2) = [0^2; (-1)^2] = [0; 1],$$

$$E(f) = [13 - 1; 13 - 0] = [12; 13].$$

4. x_1, x_2 — решения неравенства тогда и только тогда, когда

$$f(s) = 13 \Leftrightarrow \sin a = 0,5 \Leftrightarrow a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{О т в е т: } a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Исходное неравенство решается и *перебором случаев*, которых без учета неравенства

$$\sqrt{x+2} \geq 0$$

набирается изрядное количество, а с учетом — только три:

$$1. \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \log_3 |x - 9| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2;$$

$$2. \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 21x - 2x^2 + 65 \geq 0 \\ \log_3 |x - 9| > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2(x - 13)(x + 2,5) \leq 0 \\ |x - 9| > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq 13 \\ x - 9 > 9 \\ x - 9 < -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 0;$$

$$3. \begin{cases} x+2 > 0 \\ 21x - 2x^2 + 65 \leq 0 \\ \log_3 |x-9| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ 2(x-13)(x+2,5) \geq 0 \\ 0 < |x-9| < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 13 \\ x-9 < 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 13 \leq x < 18.$$

Решим наше неравенство обобщенным методом интервалов.

1. $f(x) = 21x - 2x^2 + 65,$

$g(x) = \log_3 |x-9| - 2,$

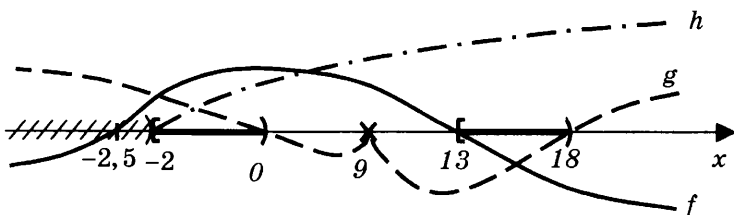
$h(x) = \sqrt{x+2}.$

а) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-13)(x+2,5) = 0 \Leftrightarrow x = 13, -2,5,$

б) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3 |x-9| = 2 \Leftrightarrow |x-9| = 9 \Leftrightarrow x = 0, 18,$

в) $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$

2. $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ |x-9| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \neq x \geq -2.$



Ответ изображен на рисунке.

1153. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

1. При $x \geq a^2$ функция имеет вид

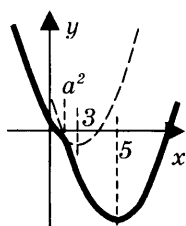
$$f(x) = x^2 - 2(x - a^2) - 8x =$$

$= x^2 - 10x + 2a^2 = (x - 5)^2 - 25 + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями вверх и осью симметрии $x = 5$;

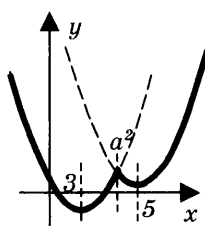
2. При $x \leq a^2$ функция имеет вид

$$f(x) = x^2 + 2(x - a^2) - 8x =$$

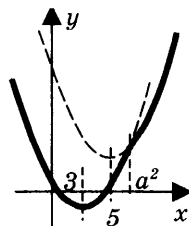
$= x^2 - 6x - 2a^2 = (x - 3)^2 - 9 - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями вверх и осью симметрии $x = 3$.



а) $a^2 \leq 3$



б) $3 < a^2 < 5$



в) $a^2 \geq 5$

3. Каждая из парабол имеет по одной точке минимума, и обе они проходят через общую точку $(a^2; f(a^2))$, поэтому вид графика функции зависит от расположения точки $x = a^2$ относительно точек 3 и 5: см. схемы графиков на рисунках.

4. Функция f имеет более двух точек экстремума тогда и только тогда, когда точка $x = a^2$ является ее точкой максимума (рис. б), т.е. когда

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$.

1154. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$$

выполняется для любого x .

Решение.

1. Неравенство преобразуется к виду

$$f(x) > 3,$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= |x+1| + 2|x+a| + 2x \\ &= \begin{cases} 4x+1+2a & \text{— возрастает, } x \geq \max\{-1, -a\}, \\ -x-1-2a & \text{— убывает, } x \leq \min\{-1, -a\}. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Функция f совпадает с линейной на каждом интервале, на которые разбивают числовую прямую точки -1 и $-a$, поэтому свое наименьшее значение она принимает в одной из двух точек -1 или $-a$.
3. Все значения функции f больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(-1) > 3 \\ f(-a) > 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1+a| + 2 \cdot (-1) > 3 \\ |-a+1| + 2 \cdot (-a) > 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |a-1| > \frac{5}{2} \\ |a-1| > 2a+3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-1 > \frac{5}{2} \\ a-1 > 2a+3 \end{cases} \\ \begin{cases} a-1 < -\frac{5}{2} \\ a-1 < -2a-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2} < a < -4 \\ \begin{cases} a < -\frac{3}{2} \\ a < -\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $a < -\frac{3}{2}$.

1156. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

1. Если пара (x, y) — решение системы, то пара $(-x, y)$ — тоже. Поэтому если система имеет единственное решение (x, y) , то $x = 0$, откуда

$$\begin{cases} a = y + 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ a = \pm 2 + 2 \end{cases} \Rightarrow a = 0, 4.$$

2. При $a = 0$ система принимает вид $\begin{cases} 0 = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ и

имеет, по меньшей мере, два решения:

$$x = \pm 2, y = 0.$$

3. При $a = 4$ система принимает вид

$$\begin{cases} 4(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x^4 + |x| + 2 \\ y^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2, \end{cases}$$

поскольку если $x \neq 0$, то $\begin{cases} y = 4x^4 + |x| + 2 > 2 \\ y^2 = 4 - x^2 < 4, \end{cases}$

что невозможно.

Ответ: $a = 4$.

1159. Решите уравнение

$$f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30,$$

если известно, что

$$f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 25, & x \geq 4, \\ 2^x + \frac{9}{5-x}, & x < 4. \end{cases}$$

Решение 1.

1. $f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5$:

а) $f'(x) = (0,5x^4 - 4x + 5)' = 2x^3 - 4$
 $\sim x - \sqrt[3]{2}.$

б) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$, причем в точке $\sqrt[3]{2}$ производная меняет знак с минуса на плюс,

в) $f_{\text{наим}} = f(\sqrt[3]{2}) = 0,5 \cdot \sqrt[3]{2^4} - 4 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 = 5 - 3 \cdot \sqrt[3]{2}$,

г) $3 + f(x) \geq 3 + 5 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 8 - 3 \cdot \sqrt[3]{2}$.

2. $8 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} \vee 4$

$\Leftrightarrow 4 \vee 3 \cdot \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 64 \vee 27 \cdot 2$ — верно, когда \vee есть $>$,

$\Rightarrow 3 + f(x) > 4 \Rightarrow g(3 + f(x)) = 25$.

3. $f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30$

$\Leftrightarrow f(g(x)) + 25 = 30 \Leftrightarrow f(g(x)) = 5$

$\Leftrightarrow 0,5(g(x))^4 - 4g(x) + 5 = 5 \Leftrightarrow g(x)((g(x))^3 - 8) = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = 2$, т. к. $g(x) = 2^x + \frac{9}{5-x} > 0$ (при $x < 4$),

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \frac{9}{5-x} = 2 \\ x < 4, \end{cases}$ т. к. если $x \geq 4$, то $g(x) = 25 > 2$,

$\Leftrightarrow x = -1$, поскольку:

а) $-1 < 4$ и $g(-1) = 2^{-1} + \frac{9}{5 - (-1)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$,

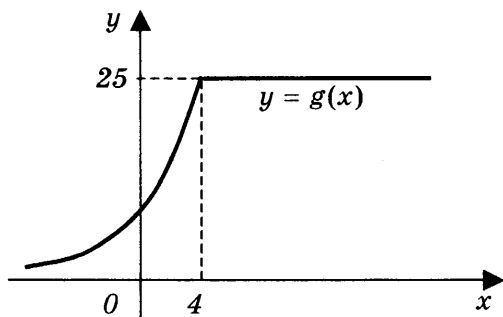
б) $x < 4$: $g(x) = 2^x + \frac{9}{5-x}$ — возрастает (сумма возрастающих функций).

О т в е т : $x = -1$.

Ощутимую помощь при решении задачи может оказать **графическая иллюстрация**, точнее, набросок графика функции g , наглядно демонстрирующий некоторые неприметные, но полезные свойства этой функции. Так, рисуя схематический график функции g , мы невольно вынуждены отметить для себя следующие моменты:

- функция принимает только положительные значения,

- при стремлении аргумента к $-\infty$ функция стремится к нулю,
- при стремлении аргумента к точке 4 и слева, и справа от нее функция стремится к одному и тому же числу 25,
- слева от точки 4 функция строго возрастает, а справа — постоянна.



Любопытно, но первое и последнее из перечисленных четырех свойств непосредственно использовались при решении уравнения

$$g(x)((g(x))^3 - 8) = 0,$$

а косвенно — и остальные два.

Решение 2.

1. Так как

$$f'(x) = (0,5x^4 - 4x + 5)' = 2x^3 - 4,$$

то $x = \sqrt[3]{2}$ — единственная критическая точка. Если $x < \sqrt[3]{2}$, то $f'(x) < 0$, а если $x > \sqrt[3]{2}$, то $f'(x) > 0$. Значит, $x = \sqrt[3]{2}$ — точка минимума. Поэтому

$$f_{\text{мин}} = f(\sqrt[3]{2}) = 5 - 3 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

2. Так как

$$5 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} > 1 \Leftrightarrow 4 > 3 \cdot \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 64 > 27 \cdot 2,$$

то $f_{\text{наим}} > 1$. Значит, $3 + f(x) > 4$ для всех x и поэтому $g(3 + f(x)) = 25$ для всех x . Получаем уравнение

$$\begin{aligned} f(g(x)) + 25 &= 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(g(x)) &= 5 \Leftrightarrow 0,5(g(x))^4 - 4g(x) + 5 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ g(x) = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $g(x) > 0$ для всех x , то уравнение $g(x) = 0$ корней не имеет.

3. Решим уравнение $g(x) = 2$.

Если $x \geq 4$, то $g(x) = 25$ и корней нет. Если $x < 4$, то

$$g(x) = 2^x + \frac{9}{5-x}.$$

Так как

$$g'(x) = \left(2^x + \frac{9}{5-x}\right)' = 2^x \ln 2 + \frac{9}{(5-x)^2} > 0,$$

то на промежутке $(-\infty; 4)$ функция g возрастает. Значит, уравнение $g(x) = 2$ имеет не более одного корня, а один корень находится и проверяется подстановкой: если $x = -1$, то

$$2^x + \frac{9}{5-x} = 0,5 + 1,5 = 2.$$

Ответ: $x = -1$.

1160. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{33} верны равенства

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 1, 2, \dots, 32.$$

Найдите $a_{15} - a_{14}$, если известно, что $a_{33} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 4 + \frac{24}{x-4}, & \text{если } x < 4, \\ 3 - \frac{16}{x} + \log_3 \left(9 - \frac{80}{x+5}\right), & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

Решение.

$$1. f(x) = \begin{cases} 4 + \frac{24}{x-4} = g(x), & x < 4, \\ 3 - \frac{16}{x} + \log_3 \left(9 - \frac{80}{x+5} \right) = h(x), & x \geq 4: \end{cases}$$

а) $E(g) \subset (-\infty; 4)$ (т. к. $x - 4 < 0$ при $x < 4$),

б) $E(h) \subset (-\infty; 3 - 0 + \log_3(9 - 0))$

(т. к. $x, x + 5 > 0$ при $x \geq 4$), $\subset (-\infty; 5)$,

в) $E(f) \subset (E(g) \cup E(h)) \subset (-\infty; 5)$,

г) $E(f^2) \subset ((-\infty; 4) \cup (-\infty; h(5)))$

(т. к. h — возрастает)

$\subset (-\infty; 4)$, т. к.

$$h(5) = 3 - \frac{16}{5} + \log_3 \left(9 - \frac{80}{5+5} \right) = 3 - 3 \frac{1}{5} + \log_3 1 = -\frac{1}{5} < 4,$$

д) $E(f^k) \subset E(g) \subset (-\infty; 4)$, $k = 2, 3, \dots, 31$,

$$\Rightarrow a_3, a_4, \dots, a_{32} < 4.$$

2. $a_{32} = x < 4$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 4 + \frac{24}{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = -\frac{24}{4} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow a_{32} = -2.$$

3. $a_{32} = -2$, $a_{31} = x < 4$:

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow g(x) = -2 \Leftrightarrow 4 + \frac{24}{x-4} = -2$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = -\frac{24}{6} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow a_{31} = 0.$$

4. Аналогично:

$$a_{30} = -2, a_{29} = 0, \dots, a_{15} = 0, a_{14} = -2$$

$$\Rightarrow a_{15} - a_{14} = 0 - (-2) = 2.$$

О т в е т : 2 .

1166. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{29} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 28$. Найдите $a_{10} + a_{16} + a_{26}$, если известно, что $a_{29} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 5 \sin(0,05\pi x) + 5, & \text{если } x < 5, \\ 5 - 30 \cdot (x - 1)^{-0,5}, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е .

$$1. f(x) = \begin{cases} 5 \sin(0,05\pi x) + 5 = g(x), & x < 5, \\ 5 - 30 \cdot (x - 1)^{-0,5} = h(x), & x \geq 5 : \end{cases}$$

$$а) E(g) = [-5 + 5; 5 + 5] = [0; 10],$$

$$б) E(h) \subset [h(5); 5 - 0]$$

(т. к. $x - 1 > 0$ и h — возрастает при $x \geq 5$)

$$= [-10; 5], \text{ т. к. } h(5) = 5 - \frac{30}{\sqrt{5-1}} = 5 - \frac{30}{2} = -10,$$

$$в) E(f) \subset (E(g) \cup E(h)) \subset [-10; 10]$$

$$\Rightarrow -10 \leq a_2, a_3, \dots, a_{28} \leq 10.$$

$$2. a_{29} = 0, 5 \leq a_{28} = x \leq 10:$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - \frac{30}{\sqrt{x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{30}{5} \Leftrightarrow x-1 = 6^2$$

$\Leftrightarrow x = 37$ — невозможно, т. к. $x \leq 10$.

3. $a_{29} = 0$, $-10 \leq a_{28} = x < 5$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 5 \sin(0,05\pi x) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(0,05\pi x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 0,05\pi x = -0,5\pi, \text{ т. к. } -0,5\pi \leq 0,05\pi x < 0,25\pi,$$

$$\Leftrightarrow x = -10 \Rightarrow a_{28} = -10.$$

4. $a_{28} = -10$, $a_{27} = x$:

$$f(x) = -10 \Leftrightarrow h(x) = -10, \text{ т. к. } E(g) = [0; 10],$$

$$\Leftrightarrow x = 5, \text{ т. к. } h \text{ — возрастает и } h(5) = -10,$$

$$\Rightarrow a_{27} = 5.$$

5. $a_{27} = 5$, $a_{26} = x$:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow g(x) = 5,$$

$$\text{т. к. } E(h) \subset [-10; 5) (\Rightarrow -10 \leq x < 5),$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin(0,05\pi x) + 5 = 5 \Leftrightarrow \sin(0,05\pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,05\pi x = 0, \text{ т. к. } -0,5\pi \leq 0,05\pi x < 0,25\pi,$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow a_{26} = 0.$$

6. Аналогично:

$$a_{25} = -10, a_{24} = 5, a_{23} = 0, \dots, a_{16} = -10, \dots, a_{10} = -10$$

$$\Rightarrow a_{10} + a_{16} + a_{26} = -10 + (-10) + 0 = -20.$$

О т в е т : -20 .

1169. Перед каждым из чисел

$$14, 15, \dots, 20 \text{ и } 6, 7, \dots, 10$$

произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Р е ш е н и е .

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$\begin{aligned} & 5(14 + K + 20) - 7(-6 - K - 10) \\ &= 5\left(\frac{14 + 20}{2} \cdot 7\right) + 7\left(\frac{6 + 10}{2} \cdot 5\right) \\ &= 35 \cdot 25 = 875. \end{aligned}$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не может быть равной 0.

3. Значение 1 сумма может принять при следующей расстановке знаков у чисел:

$$\begin{aligned} & 5(-14 - 15 + 16 - 17 + 18 - 19 + 20) - \\ & - 7(-6 + 7 - 8 + 9 - 10) = \\ & = -5 \cdot 11 + 7 \cdot 8 = -55 + 56 = 1. \end{aligned}$$

О т в е т : 1 и 875.

1231. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-1} \left(\log_4 \frac{x-11}{x-8} \right) \geq 0,$$

а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Решение.

$$1. \log_{0,5x-1} \left(\log_4 \frac{x-11}{x-8} \right) \geq 0$$

Рассмотрим два случая:

$$а) \begin{cases} 0,5x-1 > 1 \\ \log_4 \frac{x-11}{x-8} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \frac{x-11}{x-8} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \frac{x-7}{x-8} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \leq x < 8;$$

$$б) \begin{cases} 0 < 0,5x-1 < 1 \\ 0 < \log_4 \frac{x-11}{x-8} \leq 1 \end{cases} (\Leftrightarrow 1 < \frac{x-11}{x-8} \leq 4 \Leftrightarrow 1 < \frac{11-x}{8-x} \leq 4) \\ \Leftrightarrow 2 < x < 4 \\ (\Rightarrow 1 < \frac{11-x}{8-x} \leq 4, \text{ т. к. } 7 < 11-x < 9, 4 < 8-x < 6).$$

$$\text{Итак, имеем } \begin{cases} 7 \leq x < 8 \\ 2 < x < 4. \end{cases}$$

2. $a = a_1$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда существует арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots :

$$2 < a_1 < a_2 < 4 \leq a_3 < 7 \leq a_4 < 8 \leq a_5$$

(a_2 и a_4 должны лежать в разных промежутках, иначе в одном промежутке с ними будет и a_3), т. е. когда существует d :

$$2 < a < a + d < 4 \leq a + 2d < 7 \leq a + 3d < 8 \leq a + 4d.$$

3. Рассмотрим два случая (поскольку $a > 2$):

а) $2 < a < 2,5$ — подходит,

т. к. если положить $a + 3d = 7$, то

$$d = \frac{7-a}{3} > 0, \quad a + d = \frac{7+2a}{3} < \frac{7+5}{3} = 4,$$

$$a + 2d = \frac{14+a}{3} > 4,$$

$$a + 2d < a + 3d = 7,$$

$$a + 4d = \frac{28-a}{3} > \frac{28-2,5}{3} > 8,$$

т. е. все условия задачи выполнены;

б) $a \geq 2,5$ — не подходит, т.к. иначе $a + d < 4$,

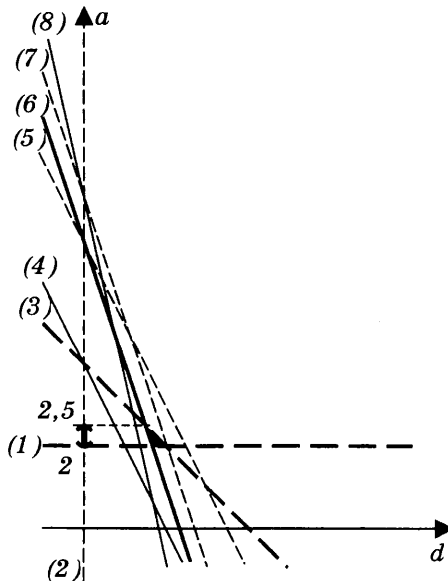
$$d = (a + d) - a < 4 - 2,5 = 1,5,$$

$$a + 3d = (a + d) + 2d < 4 + 2 \cdot 1,5 = 7,$$

т. е. условие задачи не выполнено.

О т в е т : (2; 2,5).

Исследование системы неравенств можно провести с помощью *графической иллюстрации*, если нарисовать на координатной плоскости множество пар (d, a) , удовлетворяющих системе.



Для этого достаточно:

- преобразовать систему к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 2 \quad (1) \\ d > 0 \quad (2) \\ a < 4 - d \quad (3) \\ a \geq 4 - 2d \quad (4) \\ a < 7 - 2d \quad (5) \\ a \geq 7 - 3d \quad (6) \\ a < 8 - 3d \quad (7) \\ a \geq 8 - 4d \quad (8), \end{array} \right.$$

- изобразить на плоскости все граничные линии, на которых неравенства обращаются в равенства (строгим неравенствам соответствуют прерывистые линии, а нестрогим — сплошные),
- выбрать ту область, в которой выполнены все неравенства системы (на рисунке это крошечный закрашенный треугольник),
- спроектировать выбранную область на ось ординат (рассуждая при этом так: на оси ординат требуется выбрать те точки a , которые лежат на одной горизонтали хотя бы с одной точкой (d, a) закрашенного множества),
- вычислить ординату точки пересечения прямых (3) и (6) из уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 4 - d \\ a = 7 - 3d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow 3a - a = 12 - 7 \Rightarrow a = 2,5.$$

Не скроем, построение этих графиков требует от исполнителя весьма кропотливого труда и ювелирной точности. Зато не требует, соответственно, никакой сообразительности и изобретательности.

1232. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32}(0,125y^2) - 7. \end{array} \right.$$

Решение.

$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32}(0,125y^2) - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \frac{10 \cdot \log_2 y}{x} = 2 \log_2 y - 10 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow y \neq 1, \text{ иначе } \begin{cases} x = -5 \\ (1+5)^2 = 5^3, \text{ что неверно} \end{cases})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ (x+5)x = (x+5) \log_2 y \end{cases} \quad (\Rightarrow x \neq 0, \text{ иначе } \begin{cases} y = 0 \\ \log_2 y = 0, \end{cases}$$

что неверно)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ (x+5)(x - \log_2 y) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1. \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{5^3}{(1+5)^2} (> 0); \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \log_2 y \\ y(1-x)^2 + x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x \\ 2^x(x-1)^2 = -x^3. \end{cases}$$

Рассмотрим два подслучая:

а) $x > 0$:

$2^x(x-1)^2 \leq 0 < -x^3$, поэтому система решений не имеет;

б) $x \leq 0$ ($\Rightarrow x \neq 1$):

$$2^x(x-1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow 2^x = -\frac{x^3}{(x-1)^2}:$$

• $f(x) = -\frac{x^3}{(1-x)^2}$ — убывает, т. к.

$$f'(x) = -\frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$\sim -3(x-1) - 2x \text{ (т. к. } x^2 > 0, x-1 < 0) = x-3 < 0,$$

- $g(x) = 2^x$ — возрастает,
- $g(0) = 1 > 0 = f(0)$,
- $g(-2) = \frac{1}{4} < \frac{8}{9} = f(-2)$,

поэтому система имеет ровно одно решение $(x_0; y_0)$, отличное от найденного в случае 1), т. к. $x_0 > -2 > -5$.

О т в е т : 2.

1235. На доске пишут несколько двузначных чисел (не обязательно различных, без нулей в десятичной записи) общей суммой 363. Затем в каждом числе переставляют цифры (например, число 17 заменяют числом 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше исходной суммы.

б) Может ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше исходной суммы?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Р е ш е н и е .

в) Пусть написано m чисел, причем a — сумма цифр их десятков, а b — сумма цифр их единиц. Тогда $a \geq 1 \cdot m$, $b \leq 9 \cdot m$ и сумма исходных чисел равна

$$S = 363 = 10a + b \leq 10a + 9m \leq 10a + 9a = 19a,$$

откуда $a \geq 363 / 19 > 19$, а сумма получившихся чисел равна

$$\begin{aligned} \bar{S} &= 10b + a = 10(363 - 10a) + a = 33(110 - 3a) \leq \\ &\leq 33(110 - 3 \cdot 20) = 1650. \end{aligned}$$

Равенство получившейся суммы числу 1650 достигается, например, для 18 исходных чисел, равных 19, и одного числа 21:

$$18 \cdot 19 + 21 = 363, \quad 18 \cdot 91 + 12 = 165.$$

а) Равенство $\bar{S} = 4S$ получается, например, если 15 исходных чисел равны по 19 и одно число равно 78:

$$15 \cdot 19 + 78 = 363, \quad 15 \cdot 91 + 87 = 4 \cdot 363.$$

б) Если $\bar{S} = 2S$, то $\bar{S} = 363 + S$ и

$$363 = \bar{S} - S = (10b + a) - (10a + b) = 9(b - a),$$

что невозможно, так как 363 не делится на 9.

О т в е т : а) 15 чисел, равных 19, и одно число 78;

б) нет; в) 1650.

1244. Найдите все пары натуральных чисел $m \leq n$ разной четности, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}.$$

Р е ш е н и е .

Натуральные числа $m \leq n$ разной четности удовлетворяют уравнению тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12m + 12n = mn$$

$$\Leftrightarrow mn - 12m - 12n + 12^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow (m - 12)(n - 12) = 12^2,$$

причем числа $m - 12$ и $n - 12$ — разной четности.

В качестве возможного разложения

$$12^2 = 2^4 \cdot 3^2 = p \cdot q,$$

где p — нечетно, а q — четно, имеем следующие варианты:

$$1) \begin{cases} p = 1 \\ q = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 1 \\ n - 12 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 156; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} p = 3 \\ q = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 3 \\ n - 12 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 15 \\ n = 160; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} p = 9 \\ q = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 9 \\ n - 12 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ n = 28; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} p < 0 \\ q < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 < m - 12 < 0 \\ -12 < n - 12 < 0 \end{cases} \Rightarrow (m - 12)(n - 12) < 12^2,$$

поэтому требуемое равенство не возможно.

О т в е т : (13; 156), (15; 160), (21; 28).

1245. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b , что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

Р е ш е н и е .

Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n},$$

поэтому $10^n(b - a^2) = ab$.

Из этого уравнения следует, что $b > a^2 \geq a$. Так как числа a и b взаимно простые, числа $b - a^2$ и ab тоже взаимно простые. (Действительно, пусть p — общий простой делитель этих чисел. Тогда если p делитель a , то p будет делителем b . Если же p — делитель b , то p будет делителем a^2 , значит, p — делитель a . Противоречие.)

Поэтому $b - a^2 = 1$ и, следовательно, $ab = 10^n$. Последнее равенство при взаимно простых a и b возможно только в двух случаях:

1) $b = 10^n$, $a = 1$, но в этом случае не выполняется равенство $b - a^2 = 1$.

2) $b = 5^n$, $a = 2^n$. В этом случае равенство $b - a^2 = 1$ принимает вид $5^n - 4^n = 1$, откуда $\left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Функция $f(n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ возрастает, а функция $g(n) = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

убывает. Поэтому уравнение $f(n) = g(n)$ имеет не более одного корня, и так как $f(1) = g(1)$, единственным корнем уравнения является $n = 1$.

О т в е т : $a = 2, b = 5$.

1246. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

Р е ш е н и е .

С одной стороны, наибольшее количество получится, если выбрать все нечетные числа от 673 до 2015 — таких чисел будет $(2015 - 671) / 2 = 672$. Ни одно из этих чисел не делится на другое, так как при делении должно получиться нечетное число, которое не может быть меньше 3, но $673 \cdot 3 > 2015$.

(Заметим, что данный набор не единственен. Например, если в этом наборе заменить число $2013 = 671 \cdot 3$ на 671, то новый набор тоже удовлетворяет условию задачи.)

С другой стороны, больше 672 чисел выбрать нельзя. Действительно, все перечисленные вначале нечетные числа можно разбить на следующие 672 кучки, порожденные выбранными выше числами и включающие с каждым из них все его делители, дающие в частном степени тройки: $\{2015\}$, $\{2013, 671\}$, $\{2011\}$, $\{2009\}$, $\{2007, 669, 223\}$, ..., $\{675, 225, 75, 25\}$, $\{673\}$. Если же будет выбрано больше 672 чисел, то по принципу Дирихле какие-то два из них обязательно попадут в одну кучку, и одно из них будет делиться на другое.

О т в е т : 672.

1248. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0 \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos((5x+1)y) = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)} \cdot \sin y \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

1. Из второго уравнения:

$$\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^3 - 5x^2 - 16x - 4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(25x^2 + 20x + 4)}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(5x+2)^2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2=0 \\ \frac{x-1}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. Рассмотрим два случая:

а) $0 < x \leq 1$:

$$15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 > 4 > 0,$$

поэтому первое уравнение системы не выполнено;

б) $x = -\frac{2}{5}$ ($\Rightarrow \frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) = 0$):

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0 \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos((5x+1)y) = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)} \cdot \sin y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\left(-\frac{2}{5}\right)^3 + 36\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 22\left(-\frac{2}{5}\right) + 4 = 0 \\ 9\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + \cos((-2+1)y) = y(y-5-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \cdot 2 + 36 - 11 \cdot 5 + 25 = 0 \quad (- \text{ верно}) \\ -9 + \cos y = y(y-6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos y = (y-3)^2.$$

Рассмотрим два подслучая:

- $y \in [2; 4] \subset \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$:

$\cos y < 0 \leq (y - 3)^2$, поэтому корней нет,

- $y \notin [2; 4]$:

$\cos y \leq 1 < (y - 3)^2$, поэтому корней нет.

Итак, система решений не имеет.

ОТВЕТЫ

Подготовительные упражнения

- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| 1. | $x = \pm 3$. | 2. | $x = 0, x = 2$. |
| 3. | $x = -4, x = -2$. | 4. | $x = 1, x = \frac{5}{2}$. |
| 5. | Решений нет. | 6. | $x = 1, x = 2010$. |
| 7. | $x = -1, x = 2011$. | 8. | $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}, x = \pm 1$. |
| 9. | $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$. | 10. | $x < -3, x > \frac{2}{3}$. |
| 11. | $1 < x < 2010$. | 12. | $x \leq -2011, x \geq -1$. |
| 13. | x — любое. | 14. | Решений нет. |
| 15. | $x = \frac{3}{2}$. | | |
| 16. | $-\frac{\sqrt{10}}{2} < x < -1, 1 < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$. | | |
| 17. | $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. | 18. | $x < -\sqrt[3]{3}, x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. |
| 19. | $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}$. | 20. | $x < -\frac{5}{3}, x > -\frac{3}{2}$. |
| 21. | $(1; 2) \cup (2; 3)$. | | |
| 22. | $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. | | |
| 23. | $x < -4, 0 < x < 1$. | 24. | $(-\infty; -1] \cup (0; 5]$. |
| 25. | x — любое. | 26. | $x \leq 3, x \geq 5$. |
| 27. | $-3 < x < -2$. | 28. | $x \leq -8, x \geq -\frac{5}{2}$. |
| 29. | $(-\infty; -7) \cup \left(-7; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. | | |
| 30. | $(-\infty; -5) \cup (1; 2) \cup (6; +\infty)$. | | |
| 31. | $-1 < x < 6$. | 32. | $(-5; 1) \cup \{5\}$. |
| 33. | $-6 \leq x < -5, x \geq 1$. | 34. | $[2; 4] \cup (6; +\infty)$. |

35. $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
36. $x < -3$.
37. $(-\infty; -23) \cup (20; +\infty)$.
38. $x < -\sqrt{2}, x > \sqrt{2}$.
39. $-1 < x < 0, x > 0$.
40. $-4 < x < -3$.
41. $-5 \leq x < -2, -2 < x \leq 1$.
42. $x < -3, x > 5$.
43. $x = \frac{1}{5}, x = 1$.
44. $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}, x = \sqrt{\frac{7}{3}}$.
45. $x = 5$.
46. $x = 3$.
47. $x = 3$.
48. $x = 5$.
49. $x = -3$.
50. $x = 1$.
51. $x = 0$.
52. $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$.
53. $x = 4$.
54. $x = -1, x \geq 2$.
55. $\frac{3}{2} < x \leq 3$.
56. $2 < x \leq 4$.
57. $1 - \sqrt{5} < x \leq -1, 3 \leq x < 1 + \sqrt{5}$.
58. $x < \frac{1}{2}$.
59. $-2 < x \leq 2$.
60. $x > -1$.
61. $-30 \leq x < 6$.
62. $5 < x$.
63. $\frac{5}{2} \leq x < 3$.
64. $-1 \leq x < -\frac{3}{5}, 0 < x \leq 1$.
65. $x \leq -1$.
66. $x \leq -5, -\frac{4}{3} \leq x < 4$.
67. $x > -1$.
68. $x \geq -2$.
69. $x = -\frac{4}{3}$.
70. $x = -\frac{13}{4}, x = \frac{9}{2}$.
71. $x = -4, x = 4$.
72. $x \leq \frac{5}{2}$.
73. $x = -2, x = 2$.
74. $x = -1, x = 11$.
75. $x = -3, x = -4$.
76. $x = -4, x = -1$.
77. $x = -1, x = 1$.
78. $x = 1, x = 3$.
79. $-3 < x < -2$.

80. $x \leq -\frac{3}{2}, x \geq -\frac{1}{6}$.
81. $-6 < x < -3, -2 < x < 1$.
82. $-2 \leq x \leq 2$.
83. $x < -3, x > -\frac{1}{3}$.
84. $x \leq 1$.
85. Решений нет.
86. $x < -\frac{9}{2}$.
87. $-4 < x < -2, 2 < x < 4$.
88. $-3 \leq x \leq 3$.
89. $x \in \emptyset$.
90. $x = (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z} \quad \left(\arcsin \frac{\pi}{6} \neq \frac{1}{2}! \right)$.
91. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, x = \pm \frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}; k, n \in \mathbb{Z}$.
92. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$.
93. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.
94. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.
95. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$.
96. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
97. $x = \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
98. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
99. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
100. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$.
101. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = \frac{2\pi}{5} n, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} m, k, n, m \in \mathbb{Z}$.
102. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctg 3 + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$.

103. $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
104. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$
105. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + m\pi, x = 2n\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}.$
106. $x = (2k+1)\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$
107. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
108. $x = \frac{1}{3} + \frac{4k+1}{12}\pi, x = \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{24}; k, n \in \mathbb{Z}.$
109. $x = -\arccos \frac{4}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
110. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
111. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
112. $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
113. $\arccos \frac{1}{5} + 2n\pi < x < -\arccos \frac{1}{5} + 2(n+1)\pi,$
 $-\arccos \frac{1}{4} + 2k\pi < x < \arccos \frac{1}{4} + 2k\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$
114. $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$
115. $x = -4, x = -2.$
116. $x = \frac{1}{2}.$
117. $x = -\frac{38}{3}.$
118. $x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}.$
119. $x = 1.$
120. $x = -1.$
121. $x = 2.$
122. $x = 7.$
123. $x = 1.$
124. $x = 1.$
125. $x = 2.$
126. $x = 2.$
127. $x = -1.$
128. $x = -2, x = 2.$
129. $x = -3.$
130. $x = 3.$

131. $x = -3, x = -1.$
132. $-\frac{1}{2} < x.$
133. $x > -\frac{3}{4}.$
134. $x < 7.$
135. $x < -\frac{1}{2}, x > \frac{5}{8}.$
136. $x < 0, 1 < x < 3.$
137. $x < -3 - \sqrt{3}, x > -3 + \sqrt{3}.$
138. $-\frac{1}{3} < x < 0.$
139. $-4 < x < -1.$
140. $x \neq -\frac{1}{2}.$
141. $x < -1, x > -\frac{1}{2}.$
142. $-\frac{1}{3} < x < 0, x > 4.$
143. $x \geq -2.$
144. $-1 < x < 0.$
145. $x < 0.$
146. $x \geq \log_5 10.$
147. $x > -3.$
148. $x = 1, 5.$
149. $x = 100.$
150. $x = 4.$
151. $x = 2.$
152. $x = \frac{3}{2}, x = 10.$
153. $x = 4.$
154. $x = \frac{6 + 3\sqrt{29}}{5}.$
155. $x = 2.$
156. $x > 4.$
157. $\frac{1}{7} < x < \frac{2}{7}.$
158. $-3 < x < -2.$
159. $-4 < x < -3, -2 < x < -1.$
160. $-5 \leq x < -3, -1 < x \leq 1.$
161. $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}.$
162. $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}.$
163. $x \in \emptyset.$
164. $-\sqrt{5} < x < -1, 2 < x < \sqrt{5}.$
165. $\frac{-5 - \sqrt{33}}{2} < x < -2, -1 < x < \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}.$
166. $1 < x < 4.$
167. $x = -\frac{57}{2}, y = 17.$

168. $x = 3, y = 1; x = \frac{5}{3}, y = \frac{11}{3}$.
169. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{9}{2}; x = \frac{3}{2}, y = \frac{9}{2}$.
170. $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{5}{2}$.
171. $x = 5, y = -2$.
172. $x = -3, y = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
173. $a = 0, x \in \emptyset; a \neq 0, x = \frac{1}{a}$.
174. $a = 0, x \in \mathbb{R}; a > 0, x < \frac{1}{a}; a < 0, x > \frac{1}{a}$.
175. $a = 1, x \in \mathbb{R}; a = -1, x \in \emptyset; a \neq \pm 1, x = \frac{1}{a+1}$.
176. $a = 1, x \in \emptyset; a \neq 1, x = a$.
177. $a = 1, x = -1; a = -1, x = 1; a \neq \pm 1, x = \pm 1$.
178. $a = \pm 1, x \in \emptyset; a \neq \pm 1, x = 1$.
179. $a = 0, x \neq 0; a = 1, x \in \emptyset; a \neq 0, 1, x = 1$.
180. $a < 0, x \in \emptyset; a \geq 0, x = \pm\sqrt{a}$.
181. $a < 0, x \in \mathbb{R}; a \geq 0, x > \sqrt{a}, x < -\sqrt{a}$.
182. $a \leq 0, x \in \emptyset; a > 0, -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.
183. $a < 0, x \in \emptyset; a \geq 0, x = \pm a$.
184. $x = |a|$.
185. $a \leq 0, x \in \emptyset; a > 0, -a < x < a$.
186. $a < 0, x \in \mathbb{R}; a \geq 0, \begin{cases} x > a, \\ x < -a \end{cases}$.
187. $a < 0, x \in \emptyset; a \geq 0, x = a^2$.
188. $a = 0, x \geq 0; a \neq 0, x = 0$.
189. $a < 0, x \geq 0; a \geq 0, x > a^2$.
190. $a \leq 0, x \in \emptyset; a > 0, 0 \leq x < a^2$.
191. $a \leq 0, x \in \emptyset; a > 0, x < \log_2 a$.
192. $a \leq 0, x \in \mathbb{R}; a > 0, x > \log_2 a$.
193. $a \leq 0, x \in \emptyset; 0 < a \neq 1, x = 0; a = 1, x \in \mathbb{R}$.

194. $a > 1, 0 < x < a; 0 < a < 1, x > a; a \leq 0, a = 1, x \in \emptyset$.
195. $a \leq 0, x \in \emptyset; a = 1, 0 < x \neq 1;$
 $0 < a < 1, x > 1; a > 1, 0 < x < 1$.
196. $|a| > 1, x \in \emptyset; |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
197. $a = \pm 1, x = a \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; a \neq \pm 1, x \in \emptyset$.
198. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ оба множителя четные и один из них делится на 3.
199. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$.
200. $2^{10} + 5^{12} = (2^5 + 5^6)^2 - (2^3 \cdot 5^3)^2$.
201. $222^{333} + 333^{222} = (222^{111})^3 + (333^{74})^3$.
202. $\frac{2010^{2010} - 1}{2010 - 1} = 1 + 2010 + 2010^2 + \dots + 2010^{2009}$.
203. Нет: например, $n = 333$.
204. 34452, 34056, 34956.
205. $n^2 + n = n(n + 1)$ — один из множителей четный.
206. Рассмотреть остатки от деления числа n на 3:
 $n = 3k + r, r = 0, 1, 2$ ($r = -1, 0, 1$).
207. $n^3 + 5n = 6n + (n - 1)n(n + 1)$.
208. $n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.
209. Каждое число, начиная с третьего, имеет вид:
 $n = 100k + 11 = 4(25k + 2) + 3$.
210. $\overbrace{111\dots 1}^n \overbrace{555\dots 5}^{n-1} 6 = \left(\overbrace{333\dots 3}^{n-1} 4 \right)^2$.
211. 18, 216.
212. Любой общий делитель этих чисел является делителем числа $5(3n + 5) - 3(5n + 8) = 1$.
213. $n^2 + 10n + 21 = (n + 3)(n + 7),$
 $n^2 + 9n + 18 = (n + 3)(n + 6),$
 $n + 6$ и $n + 7$ — взаимно простые.
214. $n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2, n + 3$ и $n + 4$ — взаимно простые.
215. $n^2 + 5n + 16 = (n + 9)(n - 4) + 13 \cdot 4, (n + 9) - (n - 4) = 13$.

216. $\frac{53}{450}$.

219. $x = 4n - 1, y = 3n - 1, n \in \mathbb{Z}$.

220. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

221. $(x + 1)(y + 1) = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

13

223. $x = \pm\sqrt{3}$.

224. $x = -\sqrt[3]{3}, x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

225. $x = -2, x = 4$.

226. $x = -1$.

227. $x = 1$.

228. $x = -4, x = 2$.

229. $x = 1, x = 6$.

230. $[1; 3) \cup (3; 4]$.

231. $(-1 - \sqrt{2}; -2) \cup (-2; -1 + \sqrt{2}) \cup (2; 3)$.

232. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup (2; +\infty)$.

233. $-7 < x < -3$.

234. $(-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

235. $\left(-\frac{9}{2}; -2\right) \cup (3; +\infty)$.

236. $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

237. $0 < x \leq 5; x \geq 12$.

238. $x < 0, 0 < x < 1$.

239. $-1 < x$.

240. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

241. $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

242. $(-6; 0)$.

243. $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup (-\sqrt{7}; 2) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$.

244. $[-4; -3) \cup (-2; 1]$.

245. $x \leq -\frac{11}{2}, -1 < x < -\frac{2}{3}, x > 9$.

246. $\left(-1; -\frac{\sqrt{737} - 11}{28}\right) \cup \left(-\frac{4}{7}; \frac{11 + \sqrt{737}}{28}\right)$.

247. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

248. $(-1 - \sqrt{2}; -1) \cup (0; \sqrt{2} - 1) \cup (1; +\infty)$.

249. $(-8; -2) \cup (-1; 0)$.

250. $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

251. $(-\infty; -1] \cup [1; 2] \cup [4; +\infty)$.

252. $[-3; -2) \cup [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

253. $-9 < x \leq -3, -1 < x < 0, x \geq 3.$
254. $-3 < x < -2, -1 \leq x \leq 5.$
255. $0 < x \leq 1, 6 < x < 7.$
256. $x \leq -4, -3 \leq x < -\frac{11}{4}, -\frac{11}{4} < x \leq -2, x \geq 1.$
257. $x = 2.$
258. $x = -\frac{5}{3}.$
259. $x = 0, x = \frac{3}{2}.$
260. $x = -5.$
261. $x = 5.$
262. $x = 1.$
263. $x \leq -5, -\frac{4}{3} \leq x < 4.$
264. $x > -1.$
265. $x < -\frac{5}{3}, x > 1.$
266. $3 < x.$
267. $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x < -1.$
268. $1 \leq x < \frac{3}{2}.$
269. $\frac{16}{3} \leq x < 8.$
270. $-\frac{\sqrt{13}-1}{6} < x \leq 1, x \geq 2.$
271. $-1 \leq x \leq 1.$
272. $1 \leq x.$
273. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x \leq 4.$
274. $-8 < x \leq 1.$
275. $x = -1, 0, 6.$
276. $x = -3, 5, 2.$
277. $x = 1, 4 + 2\sqrt{3}.$
278. $x = 4, 12 + 2\sqrt{11}.$
279. $x = 2, 11 + 4\sqrt{7}.$
280. $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0.$
281. $x = -3, x = 25.$
282. $x \leq -2.$
283. $-\frac{4}{7} \leq x.$
284. $x = 2.$
285. $-6 \leq x \leq 0, x = 12.$
286. $x = -1.$
287. $-\frac{15}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}.$
288. $x = -4, x = -1.$
289. $x = 7, 5.$
290. $-3 \leq x \leq -1.$

291. $-4 < x < -2.$

292. $-3 \leq x \leq -1.$

293. $x \leq -\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, x \geq \frac{\sqrt{19} - 4}{3}.$

294. $-3 < x < -1.$

295. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 0, 0 < x < 1.$

296. $\frac{3 - \sqrt{73}}{4} \leq x < -1, -1 < x \leq -\frac{1}{2}, x \geq 2.$

297. $x < 2, 2 < x < 6, x \geq 8.$

298. $x < -4, x = -3, x > -2.$

299. $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}.$

300. $x > 2.$

301. $x < -11, x > \frac{57}{13}.$

302. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{7\pi}{10} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

303. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{12} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

304. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

305. $x = -\arctg(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}.$

306. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

307. $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, x = n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

308. $x = \arctg \frac{1}{2} + k\pi, x = -\arctg \frac{3}{2} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

309. $x = -\arctg \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

310. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

311. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, x = \frac{\pi}{2} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}.$

312. a) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}.$

313. a) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$
314. a) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.
315. a) $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}, -3\pi$.
316. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + n\pi, x = -\arctg \frac{1}{3} + m\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}$.
317. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$.
318. a) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{4}, \frac{10\pi}{3}$.
319. $x = -2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
320. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
321. $x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
322. $x = 0, \pm \frac{2\pi}{7}$.
323. $x = 0$.
324. $x = \pm \frac{2\pi}{5}$.
325. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
326. $x = 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
327. $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
328. $x = 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
329. $x = -2, 5$.
330. $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$.
331. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
332. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
333. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
334. a) 2, $\log_2 7$; б) $\log_2 7$.
335. a) 0, $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

336. $x = 0$.
 338. $x = 0$.
 340. $x = -2$.
 342. $x = -2, x = -1$.
 344. $x = 0, x = 2$.
 346. $x = -1, x = 1$.
 348. $x = -1$.
 350. $x = 1$.
 352. $x > \frac{1}{2}$.
 354. $\frac{1}{2} \leq x < 1$.
 356. $x \leq -1, x > 0$.
 358. $x \leq \log_3 \left(\frac{1}{2} \right), \log_3 \left(\frac{3}{5} \right) \leq x < \log_3 \left(\frac{5}{3} \right)$.
 359. $x < 0$.
 360. $x > 4 + \frac{\lg 14}{\lg 5 - \lg \sqrt{7}}$.
 361. $x < \log_{0,4} 2$.
 363. $0 < x < \frac{1}{2}$.
 364. $\frac{1}{2} \log_5 6 < x < \log_6 5$.
 365. $1 < x < 4, x > \frac{20}{3}$.
 366. $-2 < x < 0, x > 4, 2$.
 368. -1 .
 370. $-\frac{9}{4} < x < -2$.
 337. $x = 0$.
 339. $x = 0$.
 341. $x = \log_{\frac{2}{5}} 3$.
 343. $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \left(\frac{2}{3} \right)$.
 345. $x = -\frac{1}{4}$.
 347. $x = -2, x = 2$.
 349. $x = 0$.
 351. $x < 0, x > \log_4 3$.
 353. $-\frac{2}{3} < x < 1$.
 355. $x \in \mathbb{R}$.
 357. $0 < x < \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)$.
 362. $x < \log_{\frac{2}{5}} 5$.
 367. -2 .
 369. -2 .
 371. $-\frac{1}{3} < x < 0$.

372. $6 < x < \frac{19}{3}$.
373. $x = 1$.
375. $x = 2$.
377. $x = -4$.
379. $x = 10, x = 100000$.
381. $x = 10^{-1}, x = 10^{\frac{-1}{8}}$.
383. $x = \frac{1}{27}, x = 3$.
385. $x = 2^{-2}, x = 2^{\frac{-1}{4}}$.
386. $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}, x = 10$.
387. $x = -\frac{24}{5}, x = 20$.
389. $x = -2$.
391. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
393. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
395. $x = -\frac{5}{2}$.
397. $x = 0$.
399. $x = 0, 9$.
401. $x = 4$.
403. $x = -10$.
405. $x = 8$.
407. $x = 0, 1$.
409. $x = -3$.
411. $x = -2$.
413. $x = 4$.
415. $x = \frac{1}{8}$.
417. а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.
374. $x = -3$.
376. $x = \sqrt[3]{2} - 1$.
378. $x = -1$.
380. $x = \frac{1}{2}, x = 4$.
382. $x = 1, x = 256$.
384. $x = \frac{1}{2}, x = 16$.
388. $x = 2$.
390. 5.
392. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
394. $x = 3$.
396. $x = 2$.
398. $x = 0, -1, 6$.
400. $x = 6, 11$.
402. $x = -2$.
404. $x = 27$.
406. $x = 64$.
408. $x = 0, 008$.
410. $x = 1$.
412. $x = -2$.
414. $x = 9$.
416. $x = \pm \frac{1}{2}$.

418. a) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.
419. $x = 0, \frac{1}{3}$.
420. $x = 0, \frac{7}{3}$.
421. $0 \leq x < 2$.
422. $x < -4$.
423. $1 < x < 2, x > 2$.
424. $-4 < x \leq -2, -\frac{5}{8} \leq x < 0$.
425. $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$.
426. $0 < x \leq \frac{1}{3}, 3 < x \leq 9$.
427. $\frac{1}{2} < x < 1, 1 < x < 2$.
428. $0 < x < 10, x = 100$.
429. $0 < x < 1, \sqrt{3} < x < 9$.
430. $\frac{1}{2} \leq x < 1$.
431. $-2 < x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 1, x > 2$.
432. $-3 < x < 1, 3 < x < 4$.
433. $0 < x < 2, x > 4$.
434. $x < -19,5, 3 < x < 5$.
435. $x < -55, 4,25 < x < 7,5$.
436. $x < -21, 3 < x < 4$.
437. $-5,75 < x < 11,25$.
438. $-\frac{5}{3} < x < \frac{23}{4}$.
439. $1 < x < 2$.
440. $11 < x < 92$.
441. $0,4 < x < 10$.
442. $x = 0,5$.
443. $x = -1$.
444. 2.
445. 2.
446. 3.
447. 2.
448. $-0,4$.
449. $-0,3$.
450. 0,8.
451. 2.
452. -96 .
453. 80.
454. 184.
455. 112.
456. 2.
457. -10 .
458. 0,75.
459. $-0,8$.
460. -18 .
461. $x = 3, y = 1$.
462. $x = 4, y = 1; x = -\frac{2}{3}, y = \frac{10}{3}$.

463. $x = 1, y = 2; x = 1, x = \frac{44}{25}, y = -\frac{28}{5}, z = -\frac{108}{25}.$
464. $x = 10, y = 15; x = 15, y = 10.$
465. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{9}{4}; x = 2, y \in \mathbb{R}.$
466. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$
467. $x = 4, y = 2; x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}.$
468. $x = 0, y = -\frac{7}{2}; x = y = 21.$ 469. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}.$
470. $x = 2, y = 3; x = \frac{33}{8}, y = -\frac{27}{8}.$
471. $x = 2, y = 1; x = -1, y = \frac{23}{2}.$
472. $x = 3, y = -9.$
473. $x = \log_2 3, y = \log_3 2.$ 474. $x = -2, y = 0.$
475. $x = 2, y = 6; x = \frac{1}{2}, y = 10.$
476. $x = \pi n, y = \frac{\pi}{4} - \pi n; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, y = -\pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$
477. $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n, y = \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{12} - \pi n; n \in \mathbb{Z}.$
478. $x = 1, y = -\frac{3}{2}; x = -2, y = 3.$
479. $x = 1, y = \log_3 2.$
480. $x = 4, y = 4.$ 481. $x = 2, 4, y = -7.$
482. $x = -2, y = 2.$ 483. $x = -\frac{4}{3}, y = \frac{1}{6}.$
484. $x = -5, y = -10.$ 485. $x = 6, y = -4.$
486. $x = -2, y = 16.$ 487. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}.$
488. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{9}.$

$$489. \left(x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n; y = -\frac{1}{4} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$490. x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, y = \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$491. x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 3.$$

$$492. x = \frac{\pi}{3} + \pi n, y = \sqrt{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$493. -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}; -\frac{9\pi}{8}; -\frac{5\pi}{8}.$$

14

$$494. \frac{\pi HR^2}{12}.$$

$$495. \frac{27(4 - \pi)}{4}.$$

$$496. 48\pi\sqrt{11}.$$

$$497. d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

$$498. \sqrt[3]{8V \sin \frac{\alpha}{2} / \sqrt{3(2 \cos \alpha - 1)}}.$$

$$499. 6) \frac{3}{4}.$$

$$500. 55.$$

$$501. 6) \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$502. \frac{8}{37}.$$

$$503. \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$504. 6.$$

$$505. \frac{a}{4 \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

$$506. \arccos \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$507. \frac{\sqrt{31}}{6}.$$

508. 216.
510. $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.
512. $\frac{27}{16}$.
514. $\frac{7}{2}$.
516. $\frac{\sqrt{6}(5 - \sqrt{15})}{10}$.
518. $\frac{4\sqrt{5}ad - 8\sqrt{2}d^2}{5}$.
520. $\frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$.
522. $\frac{12}{13 + \sqrt{41}}$.
524. $\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.
526. $(1 + \sqrt{33}) : 8$.
528. $\frac{125\sqrt{6}}{4}$.
530. $\arccos \left(\frac{9}{\sqrt{150 \pm 24\sqrt{3}}} \right)$.
531. $\frac{32}{\sqrt{57}}$.
532. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.
533. $\frac{n}{n+m} \cdot \frac{V}{d}$.
535. 24.
509. $\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.
511. $\frac{21\sqrt{15}}{10}$.
513. $\frac{91}{25}$.
515. 6.
517. $\frac{2a^2}{9\sqrt{3} \cos \varphi}$.
519. $\frac{2H^3}{3} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$.
521. $2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
523. $\left(\frac{180}{\pi} \arccos \frac{1}{\pi} \right)^\circ$.
525. $12\pi r^3$.
527. $\frac{5\pi}{12}$.
529. $28\sqrt{3}$.
534. $\frac{5V}{18}$.
536. $\frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$.

537. 8.
539. $\arccos\left(\frac{46}{\sqrt{2641}}\right)$.
541. $\frac{1024}{9}, 2\arctg\left(\frac{\sqrt{34}}{4}\right)$.
543. 9 : 95.
545. $\frac{\pi}{3}$.
547. $\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{15}}$.
549. 90° .
551. $\sqrt{b^2 - a^2}$.
553. $d \sin \alpha$.
555. α .
557. 512.
559. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.
561. Все: от 0° до 180° (не включительно).
570. Это — серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках.
571. Если данные прямые параллельны, то это — прямая, параллельная им и проходящая между ними на равном расстоянии от них; если же данные прямые пересекаются, образуя две пары вертикальных углов, то это — две прямые, служащие биссектрисами этих углов.
572. Это — четыре точки: одна из них есть центр окружности, вписанной в треугольник, образованный данными прямыми, а остальные — центры внеписанных окружностей.
573. 1. Если $\alpha = 0$, то это — два луча прямой AB ;
 2. Если $\alpha = \pi$, то это — интервал AB ;
 3. Если $0 < \alpha < \pi$, то это — две дуги AB , симметричные относительно прямой AB , каждая — мерой $2\pi - 2\alpha$.
538. 20.
540. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
542. $\frac{3\sqrt{41}}{2}$.
544. 7 : 20.
546. 2.
548. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
550. β .
552. $\arccos \frac{b}{a\sqrt{3}}$.
554. $a \operatorname{ctg} \alpha$.
556. $\sqrt{61}$.
558. 2 или 1.
560. 90° .

574. Это плоскость, проходящая через середину одного из отрезков AM параллельно данной плоскости.
575. Это плоскость, проходящая через середину одного из указанных отрезков параллельно данным прямым.
576. Это — сфера (с выколотыми точками A и B), построенная на отрезке AB как на диаметре.
577. $\arctg \frac{15}{32}$.
578. $\arctg \frac{37}{20}$.
579. $2\sqrt{7}$.
580. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
581. 250.
582. $9\pi\sqrt{2}$.
583. 24.
584. 360.
585. 120π .
586. 416π .
587. 106π .
588. 28π .
589. $\frac{4}{15}$.
590. 36.
591. $\frac{99\pi}{4}$.
592. $\frac{27\pi}{16}$.
593. 45° .
594. 5.
595. $2\sqrt{2}$.
596. $324\sqrt{3}$.
597. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
598. $4\sqrt{5}$.
599. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
600. 96.
601. 30° .
602. 16.
603. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
604. $\frac{128}{41}$.
605. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
606. $\frac{297}{32}$.
607. 2.
608. 5.
609. 16.
610. 6.
611. 64π .
612. 1.
613. 9.
614. 7.
615. 36.

616. 9.

618. 28.

620. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

622. 4.

624. $6\sqrt{3}$.

626. 12.

628. 1.

630. $2 : 7$ и $20\sqrt{2}$.

617. 7.

619. 12.

621. $2\sqrt{6}$.

623. 6.

625. 4.

627. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

629. 3.

15

631. $x = 1, x = 12$.

632. $x = -1, x = 5, x = 2 \pm \sqrt{21}$.

633. $x = \sqrt{3}$.

635. $x = 9$.

637. $x = 8$.

639. $x = -1, x = \frac{8}{3}$.

641. $x = 0, x = 1, x = 9$.

642. $x = 2\frac{1}{63}, x = 2\frac{1}{728}$.

644. $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{5}, x = \frac{4}{5}$.

645. $x = 2, 6$.

647. $x = 1, 25$.

649. $1 < x < 2, 2 < x < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

651. $-1 - \sqrt{13} \leq x \leq 0, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \leq x \leq \sqrt{13} - 1$.

652. $x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

653. $-3 \leq x < 2\sqrt{\sqrt{5} - 2} - 2$.

634. $x = 4$.

636. $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

638. $x = 3$.

640. $x = -7$.

643. $5 \leq x \leq 10$.

646. $x = 4, 25$.

648. $1 < x < \frac{5}{4}, \frac{5}{3} < x$.

650. $-5 \leq x \leq 0$.

654. $-27 < x < -1, x = -1, 0 < x < 1.$
655. $0 < x < -9.$
656. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$
657. $-5 < x < -2.$
658. $-3 - 2\sqrt{2} < x < 5.$
659. $x \leq 2 - \sqrt{2}, x \geq 5 + \sqrt{19}.$
660. $-4 < x < -3, 2 < x < 7.$
661. $x \leq 0, 1 \leq x \leq 6.$
662. $x < -2 - 2\sqrt{3}, x > -2\sqrt{2}.$
663. $-3 < x < \frac{3 + \sqrt{65}}{2}.$
664. $-\frac{9 + \sqrt{57}}{4} < x < -2, -2 < x < -1, x > \frac{3}{2}.$
665. $-200 < x < 66, x > 199.$
666. $x < -2, x > 0.$
667. $2 - \sqrt{3} \leq x < 2, 4 < x \leq 5.$
668. $x < 1, x > 2.$
669. $-5 < x < -3, -3 < x < -2, 2 < x < 5.$
670. $-2 < x \leq -\frac{3}{2}.$
671. $x > -3.$
672. $x \leq 0, x \geq 1.$
673. $x \leq -\frac{5}{2}, -\frac{8}{5} \leq x \leq 0.$
674. $x = -\frac{4}{5}, x = -\frac{6}{5}.$
675. $x \leq -2010, x \geq 2011.$
676. $\frac{3}{4} < x \leq 7.$
677. $x \leq -\frac{7}{8}, x \geq 0.$
678. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}.$
679. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}; k, n \in \mathbb{Z}.$
680. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
681. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{10} + n\pi, x = \pm \frac{3\pi}{10} + m\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}.$

$$682. \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad 683. \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$684. \quad x = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}; \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$685. \quad x = \frac{2n+1}{18}\pi; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 9k+4, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$686. \quad x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + 4n\pi; \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$687. \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$688. \quad x = \pm 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$689. \quad x = \pm \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$690. \quad x = \arctg \frac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4} + n\pi,$$

$$x = \pm \arctg 2 + m\pi; \quad k = 3, \pm 4, \pm 5, \dots, n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$691. \quad x = -\sin 1.$$

$$692. \quad x = \cos 2.$$

$$693. \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$694. \quad x = 1, \quad x = 0.$$

$$695. \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$696. \quad \frac{\pi}{8} + k\pi < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{(2k+1)\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$967. \quad (2k+1)\pi x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\arccos\left(\frac{2}{3} + \sqrt{2}\right) + 2n\pi < x < \arccos\left(\frac{2}{3} - \sqrt{2}\right) + 2n\pi; \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$698. \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$699. \quad -1 \leq x \leq -\frac{7}{8}, \quad x = 1.$$

$$700. \quad x \leq \frac{4\pi+18}{5}, \quad 8\pi-18 \leq x \leq 18-3\pi.$$

$$701. \quad \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

702. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
703. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}.$
704. $x = \pm \arcsin \frac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
705. $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}.$
706. $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
707. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$
708. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}.$
709. $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}.$
710. $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
711. $-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
712. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
713. $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$
714. $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi < x < (2k+1)\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$
715. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi < x \leq \frac{5\pi}{6} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z},$
 $-\frac{11\pi}{6} \leq x < -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} < x \leq -4, x = -\frac{7\pi}{6}.$
716. $\frac{5}{2} < x \leq \frac{13}{5}; x > 3.$
717. $\frac{9}{5} < x \leq \frac{20}{11}; x > 2.$
718. $x \leq -2, x = -1, x \geq 3.$

752. $x = \sqrt{10^{1-\sqrt{3}}}$, $x = \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$.
753. $x = \frac{1}{10}$, $x = 10$.
754. $x > 1000$.
755. $\frac{1}{10} < x < 100$.
756. $0 < x < 999$.
757. $0 < x \leq \frac{1}{4}$, $x \geq 4$.
758. $0 < x \leq 3^{-2\sqrt{3}}$, $x \geq 3^{2\sqrt{3}}$.
759. $-1 \leq x \leq 3$.
760. $-4 \leq x \leq 1$.
761. $1 < x \leq 5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$.
762. $x = 10$, $x = 10^4$.
763. $x = \frac{1}{81}$, $x = \frac{1}{3}$.
764. $0 \leq x \leq \frac{27}{16}$.
765. $x = 2$.
766. $x < 2$.
767. $x = -2$.
768. $x = 9$.
769. $-2 < x < -1$, $1 < x < 2$.
770. $x = \log_5 4$.
771. $-2 < x \leq -\log_3 \frac{9}{10}$.
772. $-5 < x < 1 - \sqrt{5}$, $3 < x < \sqrt{5} + 1$.
773. $-1 < x \leq 0$.
774. $x < -\log_3 10$.
775. $\log_2 \left(\frac{5}{4} \right) < x < \log_2 3$.
776. $0 < x < 2$, $x \geq 4$.
777. $0 < x < 1$.
778. $x > 2$.
779. $-3 < x < 77$.
780. $-1 < x \leq -\frac{26}{27}$.
781. $-2 < x < -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} < x < 2$.
782. $4 < x < 5$, $x > 7$.
783. $-10^{\frac{\lg 0,5 \cdot \lg 3}{\lg 1,5}} < x < 0$, $0 < x < 10^{\frac{\lg 0,5 \cdot \lg 3}{\lg 1,5}}$.
784. $x > 2$.
785. $0 \leq x < 4$; $4 < x < 7$.

786. $(0; 1) \cup (1; 2)$.
787. $\frac{1 - \sqrt{41}}{5} \leq x < -1, 1 < x \leq 2\sqrt{2}$.
788. $0 < x \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, x > 1$.
789. $0 < x \leq \frac{1}{8}, \frac{1}{2} \leq x < 2$.
790. $x = 3, x \geq 8$.
791. -1 .
792. $x < -3, x > 3$.
793. $[-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-\frac{1}{9}; 0)$.
794. $(-\frac{5}{8}; -5) \cup (-3; -1)$.
795. $1 < x < \frac{3}{2}, 2 < x < \frac{5}{2}, x > 3$.
796. $x = 2, 4, y = -7$.
797. $x = -2, y = -2; x = -2, y = 2$.
798. $x = \frac{1}{3}, y = 1$.
799. $x = 81, y = 0$.
800. $x = 1 - \log_2 3, y = \frac{1}{6}$.
801. $x = \sqrt[3]{3}, y = 4$.
802. $x = 0, y = -3$.
803. $x = 1, y = 3$.
804. $x = 1, y = 1$.
805. $x = 1, y = 5$.
806. $x = 32, y = 2$.
807. $x = -1, y = \frac{1}{\sqrt{3}}; x = \frac{3}{2}, y = 9$.
808. $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}$.
809. $x = \frac{\pi}{12}, y = \frac{11\pi}{12}$.
810. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, y = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;$
 $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m, y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi l; n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

811. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{2}k, y = -\frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\pi}{2}k; n, k \in \mathbb{Z}.$
812. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, y = -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5}; n, k \in \mathbb{Z}.$
813. $x = \arccos \frac{27}{28} + 2\pi k, y = \pi + \arcsin \frac{17}{28} + 2\pi n;$
 $x = -\arccos \frac{27}{28} + 2\pi k, y = -\arcsin \frac{17}{28} + 2\pi n; k, n \in \mathbb{Z}.$
814. а) $-\frac{3}{2}; 0; [1; 2);$ б) $x < -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} < x < 0, 0 < x < 1.$
815. $x = -1, y = 1.$
816. $x = 1, y = 5; x = \frac{5}{2}, y = 2.$
817. $x = 2, y = -1; x = \frac{12}{7}, y = -\frac{1}{7}.$
818. $x = \sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}.$
819. $x = 9, y = 1.$
820. $x = \log_2(\sqrt{6} - 2), y = \log_3 \frac{\sqrt{6} - 2}{2}.$
821. $x = 3, y = \frac{1}{9}.$
822. $x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}.$
823. $x = \frac{1}{2 \log_2 3 - 1}, y = \frac{2}{2 \log_2 3 - 1}.$
824. $x = 1, y = 3.$
825. $x = 2, y = -3; x \in \mathbb{R}, y = 1.$
826. $x = \frac{12}{7}, y = \frac{12}{5}, z = -12.$
827. $x = 3, y = 3, z = 3.$
828. $x = 4, y = -3, z = 0; x = 2, y = -1, z = 2.$
829. 2. 830. 1.
831. $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$

832. $x = -\frac{21\pi}{16}, x = -\frac{11\pi}{8}$. 833. $x = \frac{19\pi}{6}$.
834. $[-1; \infty)$. 835. $(-\infty; -2]$.
836. $[1; 2]$.
837. $x = -7, y = 7; x = -6, y = 6$.
838. $x = y = 0; x = \pm 3, y = 5; x = \pm 24, y = 20$.
839. $[0; 3]$. 840. $[-6; 2]$.
841. $[0; 2]$. 842. $(-2; 1] \cup (4; \infty)$.
843. $(-4; -2] \cup (6; \infty)$. 844. $(-3; -1] \cup (5; \infty)$.
845. $[0, 6; 1]$. 846. $[0, 6; 1]$.
847. $[0, 5; 1]$. 848. $[-1; \infty)$.
849. $[-2; \infty)$. 850. $x = -1, x = 3$.
851. $x = 1, y = 6; x = 1, y = 7; x = 2, y = 7$.
852. $x = 11, y = -9$. 853. 72.
854. $x = 26$. 855. $x = 9$.
856. $x = 18$.
857. 12 дм, 12 дм и 9 дм.
858. 200 м; 50 м, 50 м, 40 м.
859. 240 м; 60 м, 60 м, 30 м.
860. 320 м; 80 м, 80 м, 30 м.
861. 160 м; 40 м, 40 м, 15 м.

16

862. $\frac{61\sqrt{3}}{4}$. 863. $3\sqrt{30}$.
864. $\sqrt{7}$. 865. 202,8.
866. 2 : 5. 867. $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$.
868. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. 869. $\frac{147}{8}$.
870. $\frac{\pi}{6}$. 871. $\sqrt{3}+1$.
872. $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$. 873. $\frac{\pi+3}{6\pi}$.

874. $10r^2 \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$.
875. 6.
876. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
877. 11.
878. 18 : 7.
879. 5, 20.
880. $R \sin 2\alpha$.
881. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.
882. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{5}{13}$, $\arcsin \frac{12}{13}$.
883. $\frac{228}{25}$.
884. $\frac{32}{5}$.
885. 9 : 20.
886. $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$.
887. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $\frac{R\sqrt{2}}{2 \cos(\pi/8)}$, R .
888. $\frac{a^2 \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$.
889. $\frac{c \sin 2\alpha}{2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$.
890. $R \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
891. 6.
892. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.
893. $\frac{91}{6 + \sqrt{6}}$.
894. 1.
895. 4.
896. $6 - 2\sqrt{6}$.
897. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$.
898. $\frac{25\sqrt{15}}{64}$.
899. $\frac{(p-a)^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
900. $\frac{25}{8}$.
901. 16.
902. $\frac{\sqrt{(b-a)^2 + (b+a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{4 \sin \alpha}$.
903. $\frac{16}{5}$.
904. $2\sqrt{6}$.
905. $\frac{\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}}{4}$.

$$906. \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{3 \sin(\beta + \gamma)}. \quad 907. \arccos \frac{4}{5}.$$

$$908. 90^\circ, 10^\circ, 80^\circ.$$

$$909. \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}.$$

$$910. \frac{9}{2}. \quad 911. \pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}.$$

$$912. \frac{l}{\cos \alpha}. \quad 913. \frac{c\sqrt{2b^2 + bc}}{b}.$$

$$914. 9, 48, 4 \text{ и } 4\sqrt{10}.$$

$$915. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$h_c = \frac{2S}{c}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \quad l_c = \sqrt{ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)},$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

$$916. \frac{a+b-c}{2}.$$

$$917. S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}, \text{ где } m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}.$$

918.

$$S = \left(4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})}\right)^{-1}, \text{ где } H = \frac{h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}}{2}.$$

$$919. \frac{b+c}{a}. \quad 920. \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

$$921. d_1^2 = 2(a^2 + b^2) - d_2^2, \text{ если } a-b < d_2 < a+b$$

(иначе параллелограмма нет).

$$922. \text{ а) } 4\sqrt{26}, \text{ б) такого треугольника нет, в) } \frac{7}{2}.$$

$$923. 30^\circ, 75^\circ, 75^\circ \text{ или } 150^\circ, 15^\circ, 15^\circ.$$

$$924. \arcsin \frac{3}{5} \text{ или } \pi - \arcsin \frac{3}{5}.$$

$$925. \sqrt{5-2\sqrt{3}}, \arcsin \frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}, \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$$

или $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$, $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

926. Нет, т. к. $\arcsin \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} > \frac{5\pi}{21}$, откуда

$$\frac{7\pi}{21} + \frac{9\pi}{21} + \arcsin \frac{\pi}{4} > \pi.$$

928. Не верно.

937. $\frac{22}{3}$.

938. $6\pi + 16$.

939. $\frac{7\pi}{2} + 11$.

940. $3\pi + 4$.

941. 367.

942. $\frac{39}{4}$.

943. $24 - 6 \ln \frac{3}{4}$.

944. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|$.

945. 1 или 7.

946. $1 \frac{25}{26}$.

947. $44, \frac{33}{2}$.

948. 2 или 8.

949. б) 10° .

950. б) 160° .

951. 1 : 4.

952. 1 : 2.

953. 2 : 1.

954. 5 : 4.

955. $18\sqrt{2}$.

956. 25 : 36.

17

957. 5760 руб.

958. 20%.

959. Во втором случае.

960. 70.

961. 33.

962. 7.

963. 426 и 142.

964. 90%.

965. 962 500 руб.

966. 20%.

967. 12,5% и 15%.

968. 20.

969. 10.

970. 3 993 000 рублей.

971. 11.

972. 9.

973. 3.

974. 8 млн р.

975. $\sqrt{2}$.

976. Одинаково.

977. 90%. 978. 50%.
 979. $\frac{2}{5}$.
 980. 2,5.
 981. 14%.
 982. Выросла на $\frac{500}{9}$ %.
 983. 50%. 984. 10%.
 985. 20%. 986. 80 и 60.
 987. 1520 у.е.
 988. Слиток массой 300 г на части: $\frac{600}{7}$ и $\frac{1500}{7}$, а сли-
 ток массой 400 г — на части: $\frac{800}{7}$ и $\frac{2000}{7}$.
 989. Алисе 25, Базилио 14.
 990. 78,2%.
 991. 1:1, в 5 раз.
 992. Увеличилась на 35%.
 993. 240. 994. 220.
 995. 22,5. 996. 6 млн.
 997. 6.
 998. 10. 999. 8 млн р.
 1000. 2 млн р. 1001. 500.
 1002. 90.
 1003. $2 \times 5 \times 24 \times 500 = 120\ 000$ руб.
 1004. $80\ 000 : (2 \times 250) = 160$ час.
 1005. $(a - b)(100 + p)^2 = 10000b$, $S = \frac{100a(200 + p)}{(100 + p)^2}$.

18

1006. $a \neq \pm 1$. 1008. $a = -2$.
 1007. $a \neq 0$. 1010. $a \neq \pm 1$.
 1009. $a = -1$.
 1011. $a \neq 2, a \neq 4, a \neq 8$ $x = -\frac{8}{(a-4)(a-8)}$, $y = \frac{2(a-6)}{a-8}$;
 $a = 2$ $x \in \mathbb{R}, y = x + 2$; $a = 4, a = 8$ решений нет.
 1012. $a < 6$. 1013. $a = 2$.
 1014. $0 < a < 1, 1 < a < 4$.

1015. $0 < a \leq \frac{1}{3}, a = 3.$

1016. $a = 2 - 2\sqrt{2}, 0 \leq a < 4, 4 < a < 4\sqrt{2}.$

1017. $a \neq 1.$

1018. $a = 3.$

1019. $2 < a < 4.$

1020. $a = 13.$

1021. $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0; 0 < a < -2 + 2\sqrt{2}.$

1022. $a = -2, a = 1.$

1023. $a = -4.$

1024. $a < -4, -4 < a < 0.$

1025. $a = \frac{1}{17}.$

1026. $a = 2.$

1027. $a < 0 \quad x = \log_2 a^2; a > 0 \quad x = \log_2 a^2, x = \log_2 a; a = 0$ —

решений нет.

1028. $a < -2, a > 2.$

1029. $a = 2.$

1030. $7 < a \neq 7, 5.$

1031. $-4 < a \neq -1 \quad x = 3 - \sqrt{a+5};$

при остальных a корней нет.

1032. $a < 0 \quad x > \frac{4a^2 + a}{2}; a \geq 0 \quad x > \frac{a^2 + 9a}{2}.$

1033. $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2.$

1034. $a < -3, a = -1, a \geq 3.$

1035. $|a| > 1, x = 1; a = -1, -3 \leq x \leq 1;$

$|a| < 1, x = 1, x = \frac{a+7}{a-1}; a = 1, x \geq 1.$

1036. $\frac{4}{3} \leq a \leq 2.$

1037. $1 \leq a \leq 3, a = 4.$

1038. $a \neq 3.$

1039. $-1 \leq a < 0.$

1040. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3}.$

1041. $a = c = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}; a = 0, b = c = \frac{1}{2}.$

1042. $c < 0.$

1043. $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$.
1044. $0 \leq a \leq 1$.
1045. $0 < a < 1, 1 < a \leq 3, x = -a - 3; a > 3, x = a, x = -a - 3;$
при остальных a решений нет.
1046. $a = 0, 2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}$.
1047. $6 \frac{a+b-3ab}{a+b+ab}$ при $a \neq 0; 6$ при $a = 0$.
1048. $\frac{15}{2} < a < 8, a > 12$.
1049. $-\frac{3}{2} \leq a < -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} < a < 0$.
1050. $a \leq -\frac{5\sqrt{5}}{4}, a \geq \frac{5\sqrt{5}}{4}$.
1051. при $a < 1$ и $a > \sqrt{2}$ решений нет;
при $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$ — четыре решения;
при $1 < a < \sqrt{2}$ — восемь решений.
1052. $a = -\frac{57}{32}, x = -\frac{5}{8}$.
1053. $-2 < a \leq 0$.
1054. $a \leq -\frac{1}{2}; a = 0$.
1055. $a = b = -2$.
1056. $a = \pm\sqrt{2}, a = \pm \frac{\sqrt{15} + 1}{4}$.
1057. $-3 \leq a \leq 1$.
1058. $-5 < a < -\sqrt{24}, -\sqrt{24} < a < -3$.
1059. $-\frac{12}{5} \leq a \leq 0$.
1060. а) $-\sqrt{26} - 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1; 6) -\sqrt{26} + 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1$.
1061. $-1 \leq a < 2$.
1062. $a = -\frac{1}{3}, a = 2$.
1063. $a = -\frac{17}{48}$.

1064. $a = -1, 1 < a < 3, 4 < a \leq 6.$
1065. $-8 < a < 0.$
1066. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}.$
1067. $n = 33.$
1068. $a = 7.$
1069. $-20 \leq n \leq -1,5.$
1070. $0 < p \leq 13.$
1071. $0 < p \leq 9.$
1072. $0 < p \leq 5.$
1073. $-6 \leq p < 0, 0 < p \leq 6.$
1074. $-7 \leq p < 0, 0 < p \leq 7.$
1075. $p < -7, p > 11.$
1076. $p < -7, p > 3.$
1077. $5 \leq a \leq 12.$
1078. $2 \leq a \leq 12.$
1079. $1 < a \leq 8.$
1080. $1 < a \leq 15.$
1081. $0 < a < 1, 1 < a \leq 6, a > 12.$
1082. $0 < a < 1, a > 16.$
1083. $-4 < a < 4.$
1084. $a > -\frac{5}{3}.$
1085. $a \leq -4\sqrt{6}, a \geq 4\sqrt{6}.$
1086. $a \leq -2\sqrt{6}, a \geq 2\sqrt{6}.$
1087. $-1 < a < 1.$
1088. $-2 < a < 2.$
1089. $0 < a < 1.$
1090. $0 < a < 2.$
1091. $a < -\log_3 7, -\log_3 2 < a < 0.$
1092. $a < -\log_2 5, -\log_2 3 < a < 0.$
1093. $0 \leq a \leq \log_3 2, a \geq \log_3 7.$
1094. $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, 1 \leq a \leq \sqrt[3]{2}.$
1095. $\frac{1}{\sqrt{6}} < a < \sqrt{2}, a > \sqrt{3}.$
1096. $\sqrt[3]{3} < a < 9, a > 81.$
1097. $\sqrt{3} \leq a \leq 3, a \geq 81.$
1098. $-1 < x \leq 2.$
1099. $a < -9, a \geq \frac{7}{9}.$
1100. $a \leq -6, a > \frac{3}{4}.$

1101. $a \leq -9, a > \frac{5}{3}$.
1102. $a \leq -6, a > \frac{2}{5}$.
1103. $a < -4, a \geq \frac{1}{5}$.
1104. $a \leq -\frac{1}{2}, a > \frac{2}{3}$.
1105. $a \leq -5, a > \frac{1}{2}$.
1106. $a < -3, a \geq \frac{1}{2}$.
1107. $a < -9, a \geq \frac{7}{9}$.
1108. $-1 \leq a < 2\sqrt[4]{18} - 5$.
1109. $-1 \leq a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.
1110. $-2 \leq a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.
1111. $2 < a \leq 2\sqrt[4]{90} - 4$.
1112. $-2 \leq a < 2\sqrt[4]{27} - 6$.
1113. $-1 \leq a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.
1114. $3 < a \leq 2\sqrt[4]{90} - 3$.
1115. $-3 \leq a \leq 3$.
1116. $0 < a \leq 8$.
1117. $1 < a \neq 2$ два различных решения $x = a - 1, x = \frac{1}{a - 1}$;
при $a = 2$ единственное решение $x = 1$; при $a \leq 1$ ре-
шений нет.
1118. $-3 \leq a < 2\sqrt[4]{28} - 7$.
1119. $-1 \leq a < 2\sqrt[4]{20} - 5$.
1120. $0,8 < a \leq 0,98$.
1121. $1 < a < 5$.
1122. $2 < a \leq 3, 5 \leq a < 6$.
1123. $1 < a \leq 10$.
1124. $6 < a \leq 7$.
1125. $2 \leq a < 3, 5 < a \leq 6$.
1126. $\frac{11}{3} < a \leq \frac{27}{7}$.
1127. $4 < a \leq \frac{13}{3}$.
1128. $\frac{19}{4} < a \leq 5$.
1129. $a \leq 0,7$.
1130. $1 \leq a \leq 1,5, 2,5 \leq a \leq 3$.
1131. $a < 1, 1 < a < 2, 4 < a < 5, a > 5$.
1132. $a > 20$.
1133. $-7 \leq a < -4$.
1134. $-9 \leq a < -7$.
1135. $-6 \leq a < -5, 8 < a \leq 9$.
1136. $p = -1, -1,5$.
1137. $x = 2,5$.
1138. $x = 3,5$.
1139. $x = 1,6$.
1140. $x = 3$.
1141. $x = 1$.
1142. $x = 5$.
1143. $x = 2$.

1144. $a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

1145. $a = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

1146. $a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

1147. $a = 3.$

1149. $a = 6.$

1151. $a = 5.$

1153. $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$

1155. $\frac{1}{6} < a < 4 + \sqrt{14}.$

1157. $2, \sqrt{65} + 3.$

1158. $\pm \frac{12}{5}.$

1159. $x = -1.$

1160. $a < -\frac{1}{6}$ решений нет; $-\frac{1}{6} \leq a < -\frac{1}{10}$ единственное решение; $-\frac{1}{10} \leq a < 0$ два различных решения; $a = 0$ единственное решение; $a > 0$ решений нет.

1161. -6.

1163. 16.

1165. 2.

1167. 10.

1148. $a = 1,5.$

1150. $a = 10.$

1152. $a = 3.$

1154. $a < -\frac{3}{2}.$

1156. $a = 4.$

1162. 11.

1164. 2.

1166. -20.

1168. -2.

19

1169. 1 и 875.

1171. а) нет; б) да; в) 2.

1172. а) например, (2,3); (5,5); (9,10); (17,19); б) нет; в) 2.

1173. 1 и 6174.

1174. 55, неположительных, 26.

1175. а) 44; б) отрицательных; в) 17.

1176. 3.

1178. 49, 83.

1180. 832.

1182. 2, 2, 2.

1170. а) да; б) нет; в) 8.

1177. 83.

1179. 24.

1181. 27.

1183. $m = 2, n = 117; m = 3, n = 59$.
1184. 1) И; 2) Р.
1185. $x = 6, y = \pm 1, z = 0; x = 0, y = \pm 1, z = 0$.
1186. $x = 15n^2 - 6n, y = 3n - 1; n \in \mathbb{Z}$.
1187. 189. 1188. 764.
1189. 300. 1190. 648.
1191. 160.
1192. $a = 4, 5, \dots, b = -2; a = 3, 4, \dots, b = -1$.
1193. $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1, \sqrt{2} < a < 2$.
1194. $a = -4, -\frac{5}{2} \leq a \leq -\frac{9}{4}$.
1195. $x = y = 0; x = y = 2; x = 0, y = 3; x = 3, y = 0$.
1196. $a = -2, a = 0$.
1197. $a = 1, a = \frac{5}{2}$. 1198. 40, 30.
1199. $1750m$. 1200. 94.
1201. 8. 1202. 24, 7.
1203. 70. 1204. 132.
1205. $x = -2, y = 0; x = 0, y = -2; x = -3, y = 0; x = -1, y = 2$.
1206. $x = 2, y = \pm 3; x = -2, y = \pm 3$.
1207. $x = -31, x = -7$.
1208. $x = \pm 1, y = \mp 1, z = -1$. 1209. $\frac{5}{11} < a \leq \frac{6}{13}$.
1210. $x = (4n - 3)^2, n = 1, 2, \dots$
1211. $(2\sqrt{2}, -4, -4); (2\sqrt{2}, -2, 2)$.
1212. $x = y = 0$. 1213. нет.
1214. 6, 25. 1215. 144.
1216. 375, 125. 1217. 12 месяцев.
1218. 11. 1219. 33.
1220. Один 16-квартирный и одиннадцать 12-квартирных.
1221. 20. 1222. $x = -2$.
1223. 11 гвоздик и 7 роз.
1224. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.
1225. 642. 1226. $n = 5$.

1227. $\frac{11111111}{11111111}$.

1228. 1960.

1229. 7200.

1230. 132.

1231. (2; 2,5).

1232. 2.

1233. а) нет; б) нет; в) нет.

1234. а) например, 4; 9; 13; 16; 18;

б) да, например, 4; 9; 13; 13; 9; в) 36.

1235. а) 15 чисел, равных 19, и одно число 78; б) нет; в) 1650.

1237. $x = 0,3$.

1239. $x = -\frac{5}{3}$.

1244. (13;156), (15;160), (21;28).

1245. $a = 2, b = 5$.

1246. 672.

1247. 667.

1248. Система решений не имеет.

Справочное издание

**Сергеев Игорь Николаевич
Панферов Валерий Семенович**

ЕГЭ

1000 ЗАДАЧ

**С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ
МАТЕМАТИКА**

Все задания части 2



Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.НА34.Н08638 с 07.08.2018 г.

Главный редактор *Л. Д. Лапто*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Г. М. Морозова, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *М. Н. Ериова*
Компьютерная верстка *А. С. Миронова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 034-2014; 58.11.1 — книги печатные

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «Красногорская типография». 143405, Московская область,
г. Красногорск, Коммунальный квартал, дом 2. www.ktprint.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).