750 ЗАДАНИЙ С ОТВЕТАМИ

ОГЭ 2020

В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

ВКЛЮЧЕНЫ НОВЫЕ ТИПЫ ЗАДАНИЙ

750 ЗАДАНИЙ С ОТВЕТАМИ

ОГЭ 2020

В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

ВКЛЮЧЕНЫ НОВЫЕ ТИПЫ ЗАДАНИЙ

МОСКВА
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я721
К75

Об авторах:

В.В. Кочагин — кандидат педагогических наук, учитель математики ГБОУ «Школа № 1568 им. Пабло Неруды» г. Москвы

М.Н. Кочагина — кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики ИЦО ГАОУ ВО МГПУ

Кочагин, Вадим Витальевич.

К75 ОГЭ 2020. Математика. Сборник заданий : 750 заданий с ответами / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. — Москва : Эксмо, 2019. — 240 с. — (ОГЭ. Сборник заданий).

ISBN 978-5-04-104106-9

Издание предназначено для подготовки учащихся к ОГЭ по математике. В пособие включены:

- 750 заданий разных типов, сгруппированные по темам;
- справочный теоретический материал;
- ответы ко всем заданиям;
- подробные решения задач.

Представлены все учебные темы, знание которых проверяется экзаменом.

Издание окажет помощь учителям при организации учебного процесса и подготовке учащихся к экзамену.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-104106-9

СОДЕРЖАНИЕ

Основные сведения об основном государственном экзамене по математике

На выполнение государственной экзаменационной работы по математике отводится 235 минут (3 часа 55 минут).

Экзаменационная работа включает 23 задания и состоит из двух частей.

Первая часть включает 17 заданий с кратким ответом, вторая часть — 6 заданий с развернутым ответом. За каждое верное решение задания первой части можно получить один балл, всего за первую часть экзаменационной работы — максимально 17 баллов. Ответы к заданиям нужно вносить в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания.

В этой части работы предлагаются задания нескольких типов:

— задания, в которых требуется выбрать из нескольких предложенных ответов один верный;

— задания с кратким ответом;

— задания на сопоставление, в которых требуется соотнести пары объектов;

— задания на выбор верного (неверного) утверждения из нескольких предложенных.

Приведем примеры оформления ответов заданий разных типов из первой части работы.

1. Найдите значение выражения $\frac{m^{3}\sqrt{7}}{7}$ при $b = -\sqrt{7}$

Ответ: −7.

2. Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты.

А. $\frac{1}{5}$ Б. $\frac{1}{4}$ В. $\frac{1}{2}$ Г. $\frac{1}{25}$

1) 4% 2) 50% 3) 20% 4) 25%

Ответ:

А	Б	В	Г
3	4	2	1

3. Укажите номера <u>верных</u> утверждений.

1. Параллелограмм можно вписать в окружность.
2. Диаметр — большая из хорд окружности.
3. Существует треугольник с углами 40°, 25° и 115°.

Ответ: 23.

Во второй части экзаменационной работы 6 заданий. За задания № 18—20 можно получить от 0 до 2 баллов, за задания № 21—23 можно получить от 0 до 3 баллов. Всего за вторую часть работы — максимально 15 баллов. Здесь требуется представить полное решение в бланке ответов № 2.

Для подсчета баллов учащегося складывают количество баллов, полученных за первую и вторую части работы. Таким образом, максимально учащийся может получить за работу 32 балла.

Для успешной сдачи экзамена достаточно набрать 8 баллов, из которых не менее 2 баллов должны быть получены за решение заданий по геометрии.

В справочных материалах, которые раздаются вместе с экзаменационной работой, содержатся математические формулы и таблицы квадратов двузначных чисел. Другими справочными материалами, а также калькуляторами пользоваться запрещается.

Рекомендации по подготовке к экзамену с помощью пособия

Наиболее эффективно работу по подготовке к экзамену по алгебре можно построить по следующему плану:

1. Ознакомиться со структурой экзаменационной работы.

2. Изучив (или повторив) теоретический материал первой темы основных вопросов содержания «Числа и выражения. Преобразование выражений», разобрать коммента-

рии по решению типовых заданий этой темы и решить последовательно все предложенные задания.

3. Сравнить полученные ответы с ответами, приведенными в конце пособия. Обязательно разобраться с причинами появления ошибок (если такие будут), при необходимости повторив теоретический материал или воспользовавшись указаниями к решению задач, которые предложены в разделе «Указания».

4. Работая так и дальше, последовательно переходить от одной темы к другой, от одного раздела к другому. Стараться запоминать основные приемы решения заданий.

5. Решать подготовительные варианты к экзамену или варианты экзамена по математике прошлых лет, которые можно найти в литературе.

В случае ошибок в ответах или незнания способа выполнения какого-то задания повторить соответствующий теоретический вопрос по данному пособию и вернуться к решаемому варианту.

Рекомендации по поведению на экзамене

Во время проведения экзамена старайтесь не волноваться. Чем быстрее у вас получится сосредоточиться на решении заданий, тем скорее вы вспомните необходимые математические факты и приемы решения типовых заданий, а также поймете, что подготовка к экзамену на уроках в школе и с помощью данного пособия не прошла даром и вы можете многое решить. Однако все же не стоит забывать о самопроверке.

И еще, внимательно читайте *условие* и *требование* выполняемого задания. В заданиях первой части работы оценивается *только ответ на поставленный вопрос*!

Перед тем как приступить к выполнению заданий, просмотрите всю первую часть предложенной вам работы. Далее, не теряя времени, начинайте выполнять одно за другим задания первой части. Если какое-то задание вызвало затруднения, оставьте его и переходите к решению следующего. К пропущенным заданиям можно будет вернуться позже. Рекомендуем проверять себя после выполнения каждого задания, а также после выполнения заданий каждой части. Рекомендации по выполнению второй части работы такие же, как и для первой части, однако здесь еще следует следить за правильностью оформления решенных заданий. Очевидно, что надо стараться решить большее количество заданий, причем правильно. Перед тем как сдать работу, еще раз проверьте правильность заполнения бланка ответов, не осталось ли нерешенным какое-то задание.

Желаем успешной сдачи экзамена!

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ

Модуль «Алгебра»

Тема 1. ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

При выполнении заданий по преобразованию выражений используются различные свойства степени и арифметического квадратного корня. Вычисления и преобразования требуют повышенной концентрации внимания.

В первой части экзаменационной работы обычно требуется выполнить одно или два действия для получения результата по преобразованию целых и дробных выражений. Во второй части — преобразования многошаговые, причем часто приходится применять различные методы разложения выражений на множители.

1.1. Делимость натуральных чисел

При выполнении заданий на делимость натуральных чисел используются различные свойства делимости, определение и свойства наибольшего общего делимого и наименьшего общего кратного двух чисел, а также признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. **Натуральное число a делится на натуральное число b**, если существует натуральное число n, такое, что $a = bn$ (например, 32 делится на 4, так как $32 = 4 \cdot 8$).

Определение. **Простым числом** называется такое натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: 1 и само это число (например, число 7 делится только на 1 и на 7, поэтому 7 — простое число).

Определение. **Составным числом** называется такое натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей (например, число 8 делится на 1, на 2, на 4 и на 8, поэтому 8 — составное число).

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители, и причем только одним способом.

Способы, при которых произведения отличаются только порядком множителей, считаются за один способ.

Свойства делимости

Если в сумме натуральных чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число (например, сумма чисел 12 + 24 + 36 делится на 12, так как каждое слагаемое суммы делится на 12).

Если в произведении натуральных чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (например, произведение чисел $12 \cdot 13 \cdot 14$ делится на 6, так как один из множителей — 12 делится на 6).

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Число делится **на 2** тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой (цифры 0, 2, 4, 6, 8 — четные; цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечетные; число 14 делится на 2, так как оканчивается цифрой 4).

Число делится **на 3** тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (например, число 84 делится на 3, так как сумма его цифр — $8 + 4 = 12$ делится на 3).

Число делится **на 5** тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 0 или 5 (например, число 45 делится на 5, так как оканчивается цифрой 5).

Число делится **на 9** тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (например, число 198 делится на 9, так как сумма его цифр — $1 + 9 + 8 = 18$ делится на 9).

Число делится **на 10** тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 0 (например, число 60 делится на 10, так как оканчивается цифрой 0).

Определение. **Остатком от деления натурального числа a на натуральное число b** называется такое натуральное число r, что разность $a - r$ делится на b, и $0 \leq r < b$.

Т.е. число a можно представить в виде $a = bn + r$, где n — некоторое натуральное число, а r — остаток (число n называют частным; например, число 17 можно представить следующим образом: $17 = 5 \cdot 3 + 2$, т.е. при делении на 5 число 17 дает остаток 2, а число 3 будет при этом частным).

Определение. Если натуральное число a делится на натуральное число b, то число b называют **делителем числа a**, а число a — **кратным числа b** (например, число 5 — делитель числа 45, а число 45 — кратное числа 5).

Определение. Пусть a и b натуральные числа. Число d называют **общим делителем для a и b**, если оно является делителем и для a, и для b (например, число 2 — делитель числа 12 и делитель числа 6, поэтому число 2 является общим делителем чисел 12 и 6).

Среди делителей чисел есть наибольший, который называют наибольшим общим делителем чисел a и b, и обозначают НОД $(a; b)$ (например, НОД $(12; 6) = 6$).

Определение. Пусть a и b натуральные числа. Число k называют **общим кратным для a и b**, если оно кратно и a, и b (например, число 45 делится на 5 и на 3, поэтому является общим кратным чисел 5 и 3).

Среди общих кратных есть наименьший, который называют наименьшим общим кратным чисел a и b, и обозначают НОК $(a; b)$ (например, НОК $(3; 5) = 15$).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Делители и кратные числа

Задание 1. Выберите из чисел 4, 6, 8, 10, 12 делители 20.

Решение.

Число 20 делится на 4 и на 10 и не делится на 6, 8, 12, поэтому только числа 4 и 10 являются делителями числа 20.

Ответ: 4, 10.

Задание 2. Выберите из чисел 4, 6, 8, 10, 12 кратные 4.

Решение.

Из указанных чисел на 4 делятся 4, 8, 12 и не делятся 6 и 10, поэтому только числа 4, 8 и 12 являются кратными 4.

Ответ: 4, 8, 12.

Задание 3. Докажите, что сумма $2^6 + 4^4 + 8^3$ делится на 13.

Решение.

Представим каждое слагаемое исходной суммы в виде степени 2: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$.

$$2^6 + 4^4 + 8^3 = 2^6 + \left(2^2\right)^4 + \left(2^3\right)^3 = 2^6 + 2^8 + 2^9.$$

Вынесем общий множитель 2^6 за скобки.

$$2^6 + 2^8 + 2^9 = 2^6\left(1 + 2^2 + 2^3\right) = 2^6 \cdot 13.$$

По свойствам делимости мы получили, что делителем $2^6 + 4^4 + 8^3$ является число 13, значит, сумма $2^6 + 4^4 + 8^3$ делится на 13.

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Задание 4. Укажите число, которое делится на 3.

1) 314 2) 315 3) 316 4) 317

Решение.

Применим к этим числам признак делимости на 3. Для этого вычислим сумму цифр в записи каждого из этих чисел.

314 — сумма цифр $3 + 1 + 4 = 8$ не делится на 3.

315 — сумма цифр $3 + 1 + 5 = 9$ делится на 3.

316 — сумма цифр $3 + 1 + 6 = 10$ не делится на 3.

317 — сумма цифр $3 + 1 + 7 = 11$ не делится на 3.

Итак, только у одного числа 315 сумма цифр делится на 3, значит, по признаку делимости на 3 и само число 315 делится на 3.

Ответ: 2.

Задание 5. Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число 123* делилось на 2?

Решение.

Число 123* делится на 2 тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой, значит, вместо * можно поставить четные цифры: 0, 2, 4, 6, 8.

Ответ: 0, 2, 4, 6, 8.

Задание 6. Найдите последнюю цифру числа $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Решение.

Число $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ делится на 2 и на 5, значит, оно делится и на 10. Поэтому его последняя цифра равна 0.

Ответ: 0.

Деление с остатком

Задание 7. Остаток от деления числа 123 на 8 равен:

1) 1 2) 2 3) 3 4) 7

Решение.

Выполним деление уголком.

$$
\begin{array}{r|l}
123 & 8 \\ \cline{2-2}
-\underline{8} & 15 \\
43 & \\
-\underline{40} & \\
3 &
\end{array}
$$

Остаток от деления числа 123 на 8 равен 3.

Ответ: 3.

Задание 8. Найдите последнюю цифру числа 2^{2010}.

Решение.

Возводить в степень число 2 долго, поэтому исследуем вопрос о том, какими цифрами могут оканчиваться степени числа 2.

Рассмотрим последовательные натуральные степени числа 2.

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	...	

Заметим, что если показатель степени 2 при делении на 4 дает остаток 1 (1, 5, 9, ...), то последняя цифра в записи числа равна 2.

Если показатель степени 2 при делении на 4 дает остаток 2 (2, 6,10, ...), то последняя цифра в записи числа равна 4.

Если показатель степени 2 при делении на 4 дает остаток 3 (3, 7, ...), то последняя цифра — 8.

Если показатель степени 2 делится на 4 (1, 5, ...), то последняя цифра — 6.

Рассмотрим число 2010.

$2010 = 2008 + 2 = 4 \cdot 502 + 2.$

Значит, последняя цифра в записи числа 2^{2010} равна 4.

Ответ: 4.

Задание 9. Остаток от деления некоторого натурального числа на 25 равен 7. Найдите остаток от деления этого числа на 5.

Решение.

Если остаток от деления некоторого натурального числа x на 25 равен 7, то само число можно записать в виде $x = 25n + 7$, где n — некоторое натуральное число.

Так как надо найти остаток от деления исходного числа на 5, преобразуем это число следующим образом: $25n + 7 = 25n + 5 + 2 = 5(5n + 1) + 2$, где $5n + 1$ — некоторое натуральное число, значит остаток от деления исходного числа на 5 равен 2.

Ответ: 2.

Замечание: число $x = 25n + 7$ можно представить в виде $x = 5 \cdot 5n + 7$, где $5n$ — некоторое натуральное число, но число 7 не будет остатком от деления числа x на 5, так как $7 > 5$ (см. определение остатка от деления).

Задание 10. Остаток от деления некоторого натурального числа на 5 равен 2. Найдите остаток от деления этого числа на 25.

Решение.

Если остаток от деления некоторого натурального числа x на 5 равен 2, то его можно записать в виде $x = 5n + 2$, где n — некоторое натуральное число.

Число n неизвестно, поэтому следует рассмотреть все случаи при делении числа n на 5: число n делится на 5; число n дает в остатке от деления на 5 числа 1, 2, 3, 4.

Если число n делится на 5, то его можно представить в виде $n = 5m$, где m — некоторое натуральное число. И исходное число имеет вид $x = 5 \cdot 5m + 2 = 25m + 2$, тогда остаток от деления его на 25 равен **2**.

Если число n при делении на 5 дает остаток 1, то его можно представить в виде $n = 5m + 1$. И исходное число имеет вид $x = 5 \cdot (5m + 1) + 2 = 25m + 7$, тогда остаток от деления его на 25 равен **7**.

Если число n при делении на 5 дает остаток 2, то его можно представить в виде $n = 5m + 2$. И исходное число имеет вид $x = 5 \cdot (5m + 2) + 2 = 25m + 12$, тогда остаток от деления его на 25 равен **12**.

Рассуждая аналогично, понимаем, что исходное число при делении на 25 может давать остатки **17** и **22**.

Ответ: 2, 7, 12, 17, 22.

Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители

При разложении натуральных чисел на простые множители используют признаки делимости.

Задание 11. Разложите на простые множители число 720.

Решение.

Сначала определим, на какие простые числа делится 720.

1) так как число 720 оканчивается четным числом 0, то 720 делится на 2;

2) так как 720 оканчивается числом 0, то делится на 5;

3) так как сумма цифр числа 720 равна $7 + 2 + 0 = 9$, то делится на 3.

Удобно разложение на простые множители записывать столбиком: делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым.

$$\begin{array}{l|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, мы получили, что $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Ответ: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель

Задание 12. Наибольший общий делитель чисел $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ равен

1) 5 2) $2 \cdot 3 \cdot 5$ 3) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ 4) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Решение.

В разложении числа a на простые множители число 2 входит в третьей степени, а в разложении числа b на простые множители число 2 входит в первой степени, значит, *в разложении на простые множители наибольшего общего делителя чисел* ***a*** *и* ***b*** *число 2 должно присутствовать в меньшей степени, т.е. в первой степени.*

Аналогично можно получить, что в разложении на простые множители наибольшего общего делителя для a и b число 3 должно присутствовать в первой степени, а число 5 — во второй.

Поэтому НОД $(a; b) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Ответ: 4.

Задание 13. Найдите наименьшее общее кратное чисел 420 и 270.

Решение.

Разложим каждое из данных чисел на простые множители.

420	2	270	2
210	2	135	3
105	3	45	3
35	5	15	3
7	7	5	5
1		1	

В разложении числа 420 на простые множители число 2 входит во второй степени, а в разложении числа 270 на простые множители число 2 входит в первой степени, значит, *в разложении на простые множители наименьшего общего кратного число 2 должно присутствовать в большей степени, т.е. во второй степени.*

Аналогично рассматривая степени чисел 3, 5 и 7, можно получить, что в разложении на простые множители наибольшего общего делителя чисел 420 и 270 число 3 должно присутствовать в третьей степени, а числа 5 и 7 — в первой.

Поэтому НОК $(420; 270) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780$.

Ответ: НОК $(420; 270) = 3780$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Какое из чисел является делителем 36?

1) 8 2) 12 3) 24 4) 72

2. Какое из чисел **не является** делителем 50?

1) 5 2) 10 3) 20 4) 50

3. Какое из чисел является кратным 36?

1) 9 2) 18 3) 48 4) 72

4. Какое из чисел является делителем 36 и кратным 6?

1) 24 2) 12 3) 9 4) 72

5. Какое из чисел **не является** кратным 3?

1) 15 2) 27 3) 35 4) 45

6. Сколько натуральных делителей имеет число 12?

Ответ: ________________.

7. Сколько четных чисел удовлетворяет неравенству $11 < x < 20$?

Ответ: ________________.

8. Какие цифры надо поставить вместо *, чтобы число 543* делилось на 2?

Ответ: ________________.

9. Какие цифры надо поставить вместо *, чтобы число 542* делилось на 3?

Ответ: ________________.

10. Какие цифры надо поставить вместо *, чтобы число 543* делилось на 5?

Ответ: ________________.

11. Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число 542* делилось на 6?

Ответ: ________________.

12. Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число 541* делилось на 15?

Ответ:________________.

13. Остаток от деления числа 94 на 7 равен

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

14. Частное от деления числа 94 на 7 равно

1) 11 2) 12 3) 13 4) 14

15. Наибольший общий делитель чисел

$a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ равен

1) 5
3) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
2) $2 \cdot 3 \cdot 5$
4) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$

16. Наименьшее общее кратное чисел $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ равно

1) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
3) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
2) $2 \cdot 3 \cdot 5$
4) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Часть 2

17. Докажите, что сумма $2^5 + 4^3 + 8^3$ делится на 19.

18. Докажите, что $\frac{1}{3} \cdot 9^4 - 81 - 3^6$делится на 17.

19. Найдите последнюю цифру числа $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$.

20. Разложите на простые множители число 360.

21. Разложите на простые множители число 792.

22. Найдите наименьшее общее кратное чисел 180 и 270.

23. Найдите наибольший общий делитель чисел 180 и 270.

24. Найдите наименьшее общее кратное чисел 168 и 450.

25. Найдите наибольший общий делитель чисел 168 и 450.

26. Сократите дробь $\frac{660}{924}$.

27. Сократите дробь $\frac{462}{990}$.

28. Какие простые числа являются решениями неравенства $18 < x < 27$?

29. Сколькими способами можно разложить на два натуральных множителя число 12? Способы, при которых произведения отличаются только порядком множителей, считаются за один способ.

30. Найдите последнюю цифру числа 3^{100}.

31. Остаток от деления некоторого натурального числа на 16 равен 9. Найдите остаток от деления этого числа на 4.

32. Остаток от деления некоторого натурального числа на 4 равен 1. Найдите остаток от деления этого числа на 16.

33. При делении на 12 число a дает остаток 7. Какой остаток получится при делении на 12 числа $a^2 - 2a + 5$?

34. При делении на 5 одно целое число дает остаток 2, а другое — остаток 4. Найдите остаток от деления на 5 суммы этих чисел.

35. При делении на 5 одно целое число дает остаток 2, а другое — остаток 4. Найдите остаток от деления на 5 произведения этих чисел.

36. Сколько натуральных делителей имеет число $5^5 - 25^2 + 125^2$?

37. Найдите все четырехзначные числа, в записи которых входят только цифры 1, 2 и которые делятся и на 2, и на 3.

38. Какую цифру надо приписать к числу 14 слева и справа, чтобы получилось число, делящееся на 3?

39. Вдоль дороги от деревни Видное поставили столбы через каждые 48 метров. Эти столбы решили заменить другими, поставив их на расстоянии 60 метров друг от друга. Найдите расстояние от деревни Видное до ближайшего столба, который будет стоять на месте старого. Ответ дайте в метрах.

40. Пакет сока стоит 19 р. 50 к. Какое наибольшее число таких пакетов можно купить на 220 р.?

41. Для учащихся третьего класса приготовили одинаковые подарки. Во всех подарках было 120 блокнотов, 280 ручек и 320 карандашей. Сколько учащихся в классе, если известно, что их больше 30 человек?

42. На уроке ученики за работу в команде получили оценки «4» и «5». Капитан подсчитал, что средний балл при этом в команде оказался равен $4\frac{6}{7}$. Какое минимальное число учеников могло быть в команде?

43. Учитель за работу в группе поставил учащимся оценки от «3» до «5». Ученик подсчитал, что средний балл при этом в группе оказался равен 4,25. Какое минимальное число учеников могло быть в команде?

44. В вершинах правильного восьмиугольника в некотором порядке написали числа от 1 до 8: а) Может ли наибольший общий делитель двух соседних чисел быть равным 1? б) Может получиться так, что все наибольшие делители двух соседних чисел будут попарно различными? в) Какое наибольшее количество попарно различных общих делителей могло при этом получиться?

45. В вершинах правильного десятиугольника в некотором порядке написали числа от 1 до 10: а) Может ли наибольший общий делитель двух соседних чисел быть равным 1? б) Может получиться так, что все наибольшие делители двух соседних чисел будут попарно различны? в) Какое наибольшее количество попарно различных общих делителей могло при этом получиться?

46. Дано двузначное натуральное число. а) Может ли частное числа и суммы его цифр быть равным 10? б) Может ли частное числа и суммы его цифр быть равным 11? в) Может ли частное числа и суммы его цифр быть равным 7? г) Может ли частное числа и суммы его цифр быть равным 1? д) Какое наименьшее и наибольшее натуральное значение может иметь частное двузначного числа и суммы его цифр?

47. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и всевозможные суммы (по два, по три и т.д.) записываются в порядке неубывания. Например, если задумано −1, 2, 3, то на доске будет набор: −1, 1, 2, 2, 3, 4, 5. а) Какие задуманы числа, если на доске написан набор −3, 1, 4? б) Какие задуманы числа, если на доске написан набор −2, −1, 1, 1, 2, 3, 4?

48. Ученик задумал два натуральных числа, но потом забыл задуманные числа. Он точно помнит, что их сумма равна 24 и разность больше 3 и меньше 7. Какие числа задумал ученик? Найдите все варианты и докажите, что других вариантов нет.

49. Ученик задумал два натуральных числа, но потом забыл задуманные числа. Он точно помнит, что их сумма равна 24 и произведение больше 135, но меньше 145. Какие числа задумал ученик? Найдите все варианты и докажите, что других вариантов нет.

1.2. Приближенные значения

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При измерении различных величин (масса, температура, скорость и т. д.) и при округлении чисел используют приближенные значения. Например, длину рейки 2,201 м можно заменить приближенным значением длины — 2,2 м (конечно, если такая точность допускается).

Правило округления десятичных дробей

Для округления десятичной дроби до какого-нибудь заданного разряда нужно знать, какая цифра следует за этим разрядом:

— если за разрядом следует любая из цифр 0, 1, 2, 3 или 4, — то все цифры, следующие за разрядом, отбрасывают (например, округляя до сотых число $5{,}74\underline{32}$, получим 5,74);

— если за разрядом следует любая из цифр: 5, 6, 7, 8 или 9, — то цифра разряда увеличивается на единицу, а все следующие за ней цифры отбрасываются (например, округляя до сотых число $5{,}74\underline{63}$, получим 5,75).

Абсолютная погрешность приближенного значения

Модуль разности между точным (x) и приближенным значением (a) некоторого числа называется абсолютной погрешностью (h) приближенного значения числа, т.е.

$$|x - a| = h.$$

Например, если длина рейки 2,201 м, а ее приближенное значение — 2,2 м, то $|2{,}201 - 2{,}2| = 0{,}001$ — абсолютная погрешность.

Задавая абсолютную погрешность измерения h (точность измерения) некоторого приближенного значения a, точное значение измеряемой величины (x) будет находиться между $a - h$ и $a + h$, т.е. $a - h \le x \le a + h$. Это неравенство можно записать в виде $x = a \pm h$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Округление натуральных чисел и десятичных дробей

Задание 1. В одной столовой ложке — 25 г риса, а в один стакан входит 235 г риса. Сколько целых ложек риса помещается в одном стакане?

Решение.

1-й способ. В 10 ложках риса содержится $10 \cdot 25 = 250$ г риса. Этого много для одного стакана. Если возьмем 9 ложек риса, то получим $9 \cdot 25 = 225$ г риса, значит, в одном стакане помещается 9 целых ложек риса.

2-й способ. В один стакан входит $235:25 = 9{,}4$ ложек риса. Получаем, что в один стакан входит 9 целых ложек риса.

Ответ: 9 ложек.

Задание 2. Округлите число 7,8157.

а) до десятых

б) до сотых

в) до тысячных

д) до целых

Решение.

а) У десятичной дроби $7{,}8\underline{1}57$ в следующем разряде после **десятых** стоит цифра 1, значит, оставим цифру десятых без изменения: $7{,}8157 \approx 7{,}8$.

б) У десятичной дроби $7{,}81\underline{5}7$ в следующем разряде после **сотых** стоит цифра 5, значит, увеличим цифру сотых на единицу: $7{,}8157 \approx 7{,}82$.

в) У десятичной дроби $7{,}815\underline{7}$ в следующем разряде после **тысячных** стоит цифра 7, значит, увеличим цифру тысячных на единицу: $7{,}8157 \approx 7{,}816$.

г) У десятичной дроби $7{,}\underline{8}157$ цифра десятых равна 8, значит, $7{,}8157 \approx 8$.

Ответ: а) 7,8; б) 7,82; в) 7,816; г) 8.

Задание 3. Найдите площадь листа бумаги, размеры которого 21 см $\times$ 29,7 см. Результат округлите до целых.

Решение.

Площадь прямоугольного листа найдем, перемножив его длину и ширину: $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ (см^2). Округлим до целых число 623,7. После запятой стоит цифра 7, значит, по правилу округления десятичных дробей получим 624 см^2.

Ответ: 624 см^2.

Прикидка и оценка результатов вычислений

Задание 4. Оцените значение выражения $3x + 2y$, если $1 < x < 2$; $3 < y < 4$.

1) (3; 4) 2) (9; 14) 3) (6; 10) 4) (4; 8)

Решение.

Если $1 < x < 2$, тогда по свойствам числовых неравенств $3 < 3x < 6$. Аналогично оценим $2y$: $3 < y < 4$; $6 < 2y < 8$. Оценим сумму $3x + 2y$, для этого сложим столбиком два неравенства с положительными членами:

$$\begin{array}{l} \quad 3 < 3x < 6 \\ ^{+}6 < 2y < 8 \\ 9 < 3x + 2y < 14 \end{array}$$

Ответ: 2.

Запись приближенных значений в виде $x = a \pm h$, переход к записи в виде двойного неравенства

Задание 5. В каких границах заключено число $p = 2{,}35 \pm 0{,}02$?

1) $2{,}34 \le p \le 2{,}38$ 3) $2{,}35 \le p \le 2{,}39$

2) $2{,}33 \le p \le 2{,}37$ 4) $2{,}36 \le p \le 2{,}40$

Решение.

От записи приближенного значения числа p в виде $p = 2{,}35 \pm 0{,}02$ перейдем к записи в виде двойного неравенства:

$$2{,}35 - 0{,}02 \le M \le 2{,}35 + 0{,}02;\ \ 2{,}33 \le p \le 2{,}37.$$

Ответ: 2.

Задание 6. На упаковке пачки сливочного масла есть информация: «Масса 500±7 г». Укажите, сколько масла **не может быть** в этой пачке?

1) 502 г 2) 507 г 3) 492 г 4) 497 г

Решение.

От записи приближенного значения массы (M) в виде $M = 500 \pm 7$ перейдем к записи в виде двойного неравенства: $500 - 7 \le M \le 500 + 7$; $493 \le M \le 507$. Масса пачки масла должна быть от 493 до 507 г (включая значения

493 г и 507 г). Из предложенных ответов в этот промежуток не входит только одно значение: 492 г.

Ответ: 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Пирамида Хеопса сложена из 2 миллионов каменных глыб, каждая из которых весит не меньше 2 т. Каков вес пирамиды в килограммах?

   Ответ: ____________.

2. Сколько метров составляет 1 английский ярд (мера длины), если 150 м = 164 ярда. Ответ округлите до второго знака.

   Ответ: ____________.

3. За 700 лет Пизанская башня отклонилась от своего центра на 5 м. На сколько сантиметров в год она «падает»? Ответ округлите до десятых.

   Ответ: ____________.

4. Высота самого высокого здания мира — телебашни Си-Эн Тауэр в Канаде — 553 м 33 см. Определите высоту одного этажа этой башни, если всего она имеет 147 этажей одинаковой высоты. Ответ округлите до десятых.

   Ответ: ____________.

5. Луч Солнца долетает до Земли за 8 минут. За такое время он пролетает 150 млн км. Определите, с какой скоростью он летит (ответ выразите в км/с и округлите до целого числа).

   Ответ: ____________.

6. Звук распространяется в воздухе со скоростью 330 м/с, а в воде — со скоростью 1450 м/с. Во сколько раз быстрее распространяется звук в воде? Ответ округлите до десятых.

   Ответ: ____________.

7. Иррациональное число $\sqrt{2}$ можно представить в бесконечной десятичной дроби. Округлите эту дробь до сотых.

   Ответ: ____________.

8. Билет стоит 35 р. Для покупки какого числа билетов **недостаточно** 110 р.?

1) одного 2) двух 3) трех 4) четырех

9. Билет на аттракцион стоит 50 р. Для детей скидка — 50%. 220 р. **достаточно,** чтобы покатать на аттракционе

1) 5 взрослых и 5 детей
2) 2 взрослых и 5 детей
3) 1 взрослого и 6 детей
4) 3 взрослых и 3 детей

10. Из прямоугольного листа, размеры которого 21 см × × 29,7 см, нужно вырезать для оригами квадрат наибольшей площади. Найдите площадь остатка листа (в см^2). Результат округлите до целого числа.

Ответ: ____________.

11. Округлите бесконечную десятичную дробь 0,(61) до сотых.

Ответ: ____________.

12. Переведите обыкновенную дробь $\frac{1}{7}$ в десятичную. Результат округлите до тысячных.

Ответ: ____________.

13. Переведите обыкновенную дробь $\frac{5}{7}$ в десятичную. Результат округлите до десятых.

Ответ: ____________.

14. Переведите обыкновенную дробь $\frac{3}{11}$ в десятичную. Результат округлите до сотых.

Ответ: ____________.

15. Расстояние от Земли до Луны равно 384 404 км. Округлите это число до тысяч километров.

Ответ: ____________.

16. Оцените значение выражения $2x + y$, если

$$2 < x < 3; 5 < y < 6.$$

1) (4; 6) 2) (9; 12) 3) (9; 10) 4) (10; 11)

17. Оцените значение выражения $3x + y$, если

$$1 < x < 2; 4 < y < 5.$$

1) (5; 7) 2) (3; 6) 3) (8; 10) 4) (7; 11)

18. Оцените значение выражения $3xy$, если

$$1 < x < 2; 5 < y < 6.$$

1) (5; 12) 2) (8; 11) 3) (15; 36) 4) (18; 30)

19. Вес среднего куриного яйца 43 г, в том числе 23 г белка и 20 г желтка. Найдите отношение веса желтка к весу яйца и укажите, в какой промежуток оно входит.

1) (0,3; 0,4)
2) (0,4; 0,5)
3) (0,5; 0,6)
4) (2,1; 2,2)

20. Вес среднего куриного яйца 43 г, в том числе 23 г белка и 20 г желтка. Найдите отношение веса белка к весу яйца и укажите, в какой промежуток оно входит.

1) (0,3; 0,4)
2) (0,4; 0,5)
3) (0,5; 0,6)
4) (2,1; 2,2)

21. Вес среднего куриного яйца 43 г, в том числе 23 г белка и 20 г желтка. Найдите отношение веса желтка к весу белка и укажите, в какой промежуток оно входит.

1) (0,9; 1)
2) (0,4; 0,5)
3) (0,5; 0,6)
4) (0,8; 0,9)

22. Билет на аттракцион для взрослого стоит 50 р., а для детей — дешевле. Достаточно ли 250 р. для посещения аттракциона двум взрослым с тремя детьми?

1) достаточно
2) недостаточно
3) недостаточно данных
4) лишние данные

23. Билет на аттракцион для взрослого стоит 50 р., а для детей — дешевле. Достаточно ли 220 р. для посещения аттракциона двум взрослым с тремя детьми?

1) достаточно
2) недостаточно
3) недостаточно данных
4) лишние данные

24. Число x взято из промежутка (1; 2). Какое из значений выражений больше?

1) $x \cdot 0{,}15$
2) $x \cdot 0{,}1$
3) $x \cdot 0{,}115$
4) $x \cdot 0{,}015$

25. Число x взято из промежутка (0; 1). Какое из значений выражений больше?

1) $x \cdot 0{,}1$ 2) $x \cdot 1$ 3) $x \cdot 0{,}01$ 4) $x \cdot 0{,}2$

26. Из какого промежутка следует взять число x, чтобы значение выражения $\frac{x}{0{,}2}$ было больше 1?

1) (0,2; 0,5)
2) (0; 0,1)
3) (0,1; 0,2)
4) (−0,2; −0,1)

27. В каких границах заключено число $p = 6{,}14 \pm 0{,}02$?

1) $6{,}14 \le p \le 6{,}16$
2) $6{,}12 \le p \le 6{,}16$
3) $6{,}13 \le p \le 6{,}17$
4) $6{,}14 \le p \le 6{,}18$

28. Число $y = 5{,}72 \pm 0{,}01$ заключено в границах:

1) $5{,}71 \le y \le 5{,}72$
2) $5{,}71 \le y \le 5{,}73$
3) $5{,}72 \le y \le 5{,}73$
4) $-5{,}71 \le y \le -5{,}73$

29. Число $y = 3{,}14 \pm 0{,}01$ заключено в границах:

1) $3{,}13 \le y \le 3{,}15$
2) $3{,}13 \le y \le 3{,}14$
3) $3{,}14 \le y \le 3{,}15$
4) $-3{,}13 \le y \le -3{,}15$

30. Число $y = 2{,}75 \pm 0{,}01$ заключено в границах:

1) $2{,}74 \le y \le 2{,}75$
2) $2{,}74 < y < 2{,}76$
3) $2{,}74 \le y \le 2{,}76$
4) $2{,}75 \le y \le 2{,}76$

31. В каких границах заключено число $p = 3{,}45 \pm 0{,}02$?

1) $3{,}46 \le p \le 3{,}48$
2) $3{,}45 \le p \le 3{,}47$
3) $3{,}43 \le p \le 3{,}47$
4) $3{,}44 \le p \le 3{,}46$

32. Длина одного мотка пряжи для вязания $150 \pm 0{,}2$ м. Какой длины **не может** быть пряжа из этого мотка?

1) 149,8 м 2) 150 м 3) 152 м 4) 150,2 м

33. Среди условий правильного хранения какао-порошка есть важное температурное условие: температура воздуха должна составлять 18 ± 3 °С. При какой температуре **нельзя** хранить какао?

1) 18 °С 2) 20 °С 3) 15 °С 4) 21,5 °С

34. В зависимости от влажности масса пачки соли может изменяться, но она всегда остается в пределах

1000 ± 30 г. Запишите возможные значения массы пачки соли (с помощью двойного неравенства).

Ответ: ____________.

1.3. Степень с целым показателем

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие степени с целым показателем

Определение. **Степенью числа a с натуральным показателем n** называется число, записываемое как a^n и определяемое по правилу

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \geq 2; \\ a, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Некоторые степени чисел 2, 3, 4, 5

число \ степень	0	1	2	3	4	5	6
2	1	2	4	8	16	32	64
3	1	3	9	27	81	243	729
4	1	4	16	64	256	1024	4096
5	1	5	25	125	625	3125	15 625

Определение. **Степенью числа a ($a \neq 0$) с целым показателем m** называется число, записываемое как a^m и определяемое по правилу

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}, \text{ если } m \text{ — натуральное число, } m \geq 2; \\ a, \text{ если } m = 1; \\ 1, \text{ если } m = 0; \\ \dfrac{1}{a^n}, \text{ если } m = -n, (-n) \text{ — целое отрицательное число.} \end{cases}$$

Выражения «нуль в нулевой степени» и «нуль в отрицательной степени» не определены.

Если основанием степени является обыкновенная дробь, то удобно использовать правило, которое следует непосредственно из определения:

$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n}$, если n — целое число, $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Например, $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{1}\right)^{1} = 8$.

Свойства степени с целым показателем, преобразование выражений, содержащих степени с целым показателем

Свойства степени с целым показателем
(m, n — целые числа, $a \neq 0$)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \tag{5}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \tag{6}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \tag{7}$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m \quad (b \neq 0), \tag{8}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0). \tag{9}$$

Запись чисел с использованием степеней числа 10 (стандартный вид числа)

Если положительное число a представлено в виде $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leq a_1 < 10$, n — целое число, то говорят, что число a записано в **стандартном виде**.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Задание 1. Соотнесите выражения с их значениями

А. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ Б. $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1}$ В. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

1) $\frac{4}{9}$ 2) $\frac{9}{4}$ 3) $-\frac{9}{4}$

Решение.

По определению степени с натуральным показателем:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

По определению степени с целым показателем:

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{4}{9}} = 1:\left(-\frac{4}{9}\right) = 1\cdot\left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4}.$$

По определению степени с целым показателем:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1:\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1:\frac{4}{9} = 1\cdot\frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$$

Ответ: А. — 1; Б. — 3; В. — 2.

Задание 2. Расположите выражения 5^{-1}; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 5^0; $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ в порядке возрастания их значений.

Решение.

Найдем значение каждого числового выражения.

По определению степени с целым показателем: $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

По определению степени с целым показателем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 1 : \frac{1}{5} = 1\cdot 5 = 5.$$

По определению степени с целым показателем: $5^0 = 1$.

По определению степени с натуральным показателем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

Сравним значения $\frac{1}{5}$, 5, 1, $\frac{1}{25}$ заданных числовых выражений:

$$\frac{1}{25} < \frac{1}{5} < 1 < 5.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; 5^{-1}; 5^0; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

Задание 3. Вычислите: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3} : 4^{-5} + 2007^0$.

Решение.

Преобразуем каждое слагаемое, используя свойства степеней.

В выражении $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ перейдем к степени с натуральным показателем: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2$.

В выражении $4^{-3} : 4^{-5}$применим свойство (6):

$$4^{-3} : 4^{-5} = 4^{-3-(-5)} = 4^2.$$

По определению степени с целым показателем $2007^0 = 1$.
В итоге получим

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3} : 4^{-5} + 2007^0 = 4^2 - 4^2 + 1 = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Запишите 0,0032 в стандартном виде.

Решение.

Чтобы представить число 0,0032 в стандартном виде, нужно записать его в виде, $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leq a_1 < 10$. Перенесем запятую в числе 0,0032 на три знака вправо (только в этом случае получим $1 \leq 3{,}2 < 10$). Но после переноса запятой получаем число 3,2, которое больше числа 0,0032 в 10^3 раз, поэтому, чтобы число не изменилось, результат нужно умножить на 10^{-3}. В итоге получим, что $0{,}0032 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: $3{,}2 \cdot 10^{-3}$.

Задание 5. Переведите 155,4 м в: а) километры; б) сантиметры; в) миллиметры.

Решение.

А) Так как 1 км = 1000 м, решим пропорцию

1 км = 1000 м

x = 155,4 м,

$$x = \frac{1 \cdot 155{,}4}{1000} = 0{,}1554.$$

Пропорцию можно заменить рассуждениями о том, что в 155,4 м в тысячу раз меньше километров, поэтому

$$155{,}4 : 1000 = 0{,}1554 \text{ км}.$$

Ответ: 0,1554 км, или $1{,}554 \cdot 10^{-1}$ км.

Б) Так как 1 м = 100 см,
то 155,4 м = 155,4 · 100 см = 15 540 см.

Ответ: 15 540 см, или $1{,}554 \cdot 10^{4}$ см.

В) Зная, что в 1 м — 1000 мм, найдем, что в 155,4 м — 155 400 мм.

Ответ: 155 400 мм, или $1{,}554 \cdot 10^{5}$ мм.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Среди значений выражений 2^{-1}; 3^{-1}; 4^{-1}; 5^{-1} укажите наибольшее.

1) 2^{-1} 2) 3^{-1} 3) 4^{-1} 4) 5^{-1}

2. Среди значений выражений 2^{-1}; 3^{-1}; 4^{-1}; 5^{-1} укажите наименьшее.

1) 2^{-1} 2) 3^{-1} 3) 4^{-1} 4) 5^{-1}

3. Среди значений выражений 2^{0}; 2^{-1}; 2^{-2}; 2^{-3} укажите наименьшее.

1) 2^{0} 2) 2^{-1} 3) 2^{-2} 4) 2^{-3}

4. Среди значений выражений 2^{0}; 2^{-1}; 2^{-2}; 2^{-3} укажите наибольшее.

1) 2^{0} 2) 2^{-1} 3) 2^{-2} 4) 2^{-3}

5. Число $\frac{1}{64}$ равно

1) 2^{-3} 2) 4^{-4} 3) 4^{-3} 4) $64^{\frac{1}{2}}$

6. Значение выражения $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ равно

1) $\frac{4}{25}$ 2) $-\frac{4}{25}$ 3) $-\frac{4}{5}$ 4) $\frac{25}{4}$

7. Соотнесите выражения с их значениями

1) 4^{-1}; 2) $(-4)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

А. 4 Б. $\frac{1}{4}$ В. $-\frac{1}{4}$

Ответ: ____________.

8. Среди значений выражений $(0,1)^0$; $(0,1)^{-1}$; $(0,1)^2$; $(0,1)^3$ укажите наибольшее.

1) $(0,1)^0$ 2) $(0,1)^{-1}$ 3) $(0,1)^2$ 4) $(0,1)^3$

9. Расположите в порядке возрастания числа:
0,0804; 0,08; 0,408.

1) 0,0804; 0,08; 0,408
2) 0,0804; 0,408; 0,08
3) 0,408; 0,08; 0,0804
4) 0,08; 0,0804; 0,408

10. Вычислите: $\frac{(2^{-3})^4}{16^{-2}}$.

Ответ: ____________.

11. Вычислите: $\frac{(5^{-1})^2}{25^{-2}}$.

Ответ: ____________.

12. Вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 : 9^{-1}$.

Ответ: ____________.

13. Найдите значение выражения $\frac{2^{-2} \cdot 5^4 \cdot 10^{-5}}{2^{-3} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}}$.

14. Найдите значение выражения $\frac{2,3 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-7}}{10^{-6}}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{2^{-2} \cdot 5^2 - 25}{2^{-5} \cdot 10}$.

16. Найдите значение выражения $\dfrac{4^2 \cdot 2^{-2} - 2^2 \cdot 4^{-2}}{2^{-3}}$.

17. Найдите значение выражения $\dfrac{2{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^2}{10^{-3}}$.

18. Найдите значение выражения $\dfrac{1{,}3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}$.

19. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{-2} \cdot 3^2 + 3^{-2} \cdot 2^3}{6^{-2}}$.

20. Сравните: $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2} : (0{,}2)^{-2}$ и $\dfrac{1}{3^{-2}}$.

21. Сравните: $1{,}5 \cdot 4^{-2} : 10^{-1} \cdot 12^2$ и $0{,}1^{-2}$.

22. Представьте число 6 900 000 в стандартном виде.

1) $69 \cdot 10^5$
2) $690 \cdot 10^4$
3) $0{,}69 \cdot 10^7$
4) $6{,}9 \cdot 10^6$

23. Запишите выражение $17 \cdot 10^{-3}$ в стандартном виде.

1) $0{,}17 \cdot 10^{-4}$
2) $0{,}17 \cdot 10^{-1}$
3) $1{,}7 \cdot 10^{-2}$
4) $1{,}7 \cdot 10^{-4}$

24. Укажите число, равное 0,00049.

1) $4{,}9 \cdot 10^4$
2) $4{,}9 \cdot 10^{-5}$
3) $4{,}9 \cdot 10^{-4}$
4) $0{,}49 \cdot 10^4$

25. Запишите выражение $29 \cdot 10^{-3}$ в стандартном виде.

1) $0{,}29 \cdot 10^{-4}$
2) $2{,}9 \cdot 10^{-2}$
3) $0{,}29 \cdot 10^{-1}$
4) $2{,}9 \cdot 10^{-4}$

26. Запишите выражение $19 \cdot 10^{-3}$ в стандартном виде.

1) $0{,}19 \cdot 10^{-4}$
2) $0{,}19 \cdot 10^{-1}$
3) $1{,}9 \cdot 10^{-4}$
4) $1{,}9 \cdot 10^{-2}$

27. Укажите число, равное 0,00093.

1) $9{,}3 \cdot 10^4$
2) $9{,}3 \cdot 10^{-4}$
3) $9{,}3 \cdot 10^{-3}$
4) $0{,}93 \cdot 10^4$

28. Представьте число 2 500 000 в стандартном виде.

1) $25 \cdot 10^5$
3) $2{,}5 \cdot 10^6$

2) $0{,}25 \cdot 10^7$ 4) $250 \cdot 10^4$

29. Укажите число, равное 0,00063.

1) $6{,}3 \cdot 10^4$ 3) $6{,}3 \cdot 10^{-3}$

2) $0{,}63 \cdot 10^4$ 4) $6{,}3 \cdot 10^{-4}$

30. Представьте число 1 800 000 в стандартном виде.

1) $18 \cdot 10^5$ 3) $180 \cdot 10^4$

2) $0{,}18 \cdot 10^7$ 4) $1{,}8 \cdot 10^6$

31. Укажите число, равное 0,00086.

1) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$ 3) $8{,}6 \cdot 10^{-3}$

2) $0{,}86 \cdot 10^4$ 4) $8{,}6 \cdot 10^4$

32. Во сколько раз число $\frac{1}{10^4}$ меньше числа $\frac{1}{10^2}$?

1) 10 2) 0,1 3) 100 4) 0,01

33. Во сколько раз число $\frac{1}{10^2}$ меньше числа $\frac{1}{10}$?

1) 10 2) 0,1 3) 100 4) 0,01

34. Во сколько раз число $\frac{1}{10^3}$ меньше числа $\frac{1}{10}$?

1) 10 2) 0,1 3) 100 4) 0,01

35. Во сколько раз один миллион меньше одного миллиарда?

1) 10 2) 1000 3) 0,1 4) 2

36. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Выразите это расстояние в километрах.

1) $1{,}5 \cdot 10^{10}$ 3) $1{,}5 \cdot 10^8$

2) $1{,}5 \cdot 10^9$ 4) $1{,}5 \cdot 10^7$

37. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Выразите это расстояние в миллиметрах.

1) $1{,}5 \cdot 10^{15}$ 3) $1{,}5 \cdot 10^{13}$

2) $1{,}5 \cdot 10^{14}$ 4) $1{,}5 \cdot 10^{12}$

Часть 2

38. Упростите выражение $(a^{-2} - x^{-2}):(x^{-1} + a^{-1})$ и найдите его значение при $x = 3^{-1}, a = 4^{-1}$.

39. Упростите выражение $\left(\frac{4}{5}x^{-3}y\right)^{-4}$ и найдите его значение при $x = 2$, $y = \frac{10}{3}$.

40. Упростите выражение $\left(\frac{4}{9}xy^{-2}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$.

1.4. Квадратный корень. Корень третьей степени

При выполнении заданий по преобразованию выражений, содержащих корни второй и третьей степени, используются различные свойства корней. Вычисления и преобразования требуют повышенной концентрации внимания.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. **Арифметическим квадратным корнем** из неотрицательного числа a называют неотрицательное число $\sqrt{a}$, квадрат которого равен a, т.е. $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$.

Свойства арифметического квадратного корня ($a \geq 0$)

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0, \qquad (2)$$

$$\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k, \quad a \geq 0, k \in N. \qquad (3)$$

Для любого действительного числа x: $\sqrt{x^2} = |x|$ (4)

Определение. **Корнем третьей** степени из числа a называют число, третья степень которого равна a.

Свойства корня третьей степени

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, \qquad (5)$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad b \neq 0, \qquad (6)$$

$$\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n, \quad n \in N. \qquad (7)$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2, \quad (8)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \quad (9)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad (10)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), \quad (11)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \quad (12)$$

Таблица квадратов чисел от 11 до 25

$11^2=121$	$12^2=144$	$13^2=169$	$14^2=196$	$15^2=225$
$16^2=256$	$17^2=289$	$18^2=324$	$19^2=361$	$20^2=400$
$21^2=441$	$22^2=484$	$23^2=529$	$24^2=576$	$25^2=625$

Таблица кубов чисел от 2 до 6

$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$	$6^3=216$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Непосредственное применение свойств арифметического квадратного корня и корня третьей степени

Задание 1. Вычислите: $\sqrt{81\cdot 0{,}0001}$.

1) $\pm 0{,}09$ 2) $0{,}09$ 3) $0{,}03$ 4) другой ответ

Решение.

1-й способ

Подкоренное выражение равно 0,0081. Так как $0{,}09^2=0{,}0081$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{0{,}0081}=0{,}09$.

2-й способ

По свойству (1) получим

$$\sqrt{81\cdot 0{,}0001}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{0{,}0001}=9\cdot 0{,}01=0{,}09.$$

Ответ: 2.

Задание 2. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$.

1) 25 2) ± 5 3) 5 4) другой ответ

Решение.

1-й способ

Применим свойство (6). Внесем и число 625, и число 5 под общий корень.

$$\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{625}{5}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

2-й способ

В числителе разложим 625 на простые множители и вынесем множитель из-под знака корня.

$$\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 5.$$

Ответ: 3.

Задание 3. Вычислите: $(-3\sqrt{2})^2$.

Решение.

Возведем во вторую степень каждый из множителей произведения $(-3\sqrt{2})^2 = (-3)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$.

Ответ: 18.

Задание 4. Вычислите: $(-3\sqrt[3]{2})^3$.

Решение.

Возведем в третью степень каждый из множителей произведения $(-3\sqrt[3]{2})^3 = (-3)^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 = -27 \cdot 2 = -54$.

Ответ: -54.

Задание 5. Вычислите: $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

1) 2,2 2) $\pm$ 2,2 3) 0,44 4) другой ответ

Решение.

Чтобы вычислить значение арифметического квадратного корня из смешанного числа, переведем смешанное число в неправильную дробь и применим свойство (2):

$$\sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25 + 21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} = 2{,}2.$$

Ответ: 1.

> Если сразу не удается вычислить значение корня, то часто помогает разложение подкоренного выражения на множители.

Задание 6. Найдите значение выражения $\sqrt{12 \cdot 15 \cdot 20}$.
Решение.

1-й способ (непосредственно)

$$\sqrt{12 \cdot 15 \cdot 20} = \sqrt{3600} = 60.$$

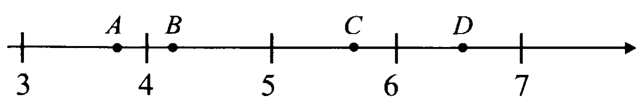
2-й способ (с помощью разложения на множители)

$$\sqrt{12 \cdot 15 \cdot 20} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 100} = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 60.$$

Ответ: 60.

Оценка квадратных корней рациональными числами

Задание 7. Каждое из чисел $\sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{38}$ соотнесите с соответствующей ему точкой на координатной прямой.



Решение.

Определим, между какими двумя соседними целыми числами находится каждое из чисел $\sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{38}$.

$3 < \sqrt{15} < 4$, значит, числу $\sqrt{15}$ соответствует точка A.

$4 < \sqrt{17} < 5$, поэтому числу $\sqrt{17}$ соответствует точка B.

$6 < \sqrt{38} < 7$, следовательно, числу $\sqrt{38}$ соответствует точка D.

Ответ: $\sqrt{15} \to A, \sqrt{17} \to B, \sqrt{38} \to D$.

Преобразование числовых выражений

При преобразовании дробных числовых выражений, содержащих корни, иногда умножение числителя и знаменателя на выражение, сопряженное знаменателю, позволяет упростить вид всего выражения.

Задание 8. Вычислите $\dfrac{\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + \sqrt{35}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{6-\sqrt{35}}{1}+\sqrt{35}=6.$$

Ответ: 6.

Приведем пример использования свойства (4) при преобразовании выражений (для любого действительного числа x: $\sqrt{x^2}=|x|$).

Задание 9. Вычислите: $\sqrt{(5-\sqrt{11})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$.

Решение.

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое суммы.

$$\sqrt{(5-\sqrt{11})^2}=\left|5-\sqrt{11}\right|.$$

Так как $5=\sqrt{25}>\sqrt{11}$, то $\left|5-\sqrt{11}\right|=5-\sqrt{11}$.

$$\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}=\left|3-\sqrt{11}\right|.$$

Так как $3=\sqrt{9}<\sqrt{11}$, то $\left|3-\sqrt{11}\right|=-\left(3-\sqrt{11}\right)=\sqrt{11}-3$.

Окончательно имеем:

$$\sqrt{(5-\sqrt{11})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}=5-\sqrt{11}+\sqrt{11}-3=2.$$

Ответ: 2.

Приемы разложения на множители

При преобразовании числовых выражений часто приходится применять различные приемы разложения на множители. Напомним основные из них: 1) вынесение общего множителя; 2) группировка; 3) формулы сокращенного умножения.

Задание 10. Сократите дробь $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$.

1) $\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{3}-2$ 3) 1 4) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Решение.

Разложим числитель данного выражения на множители.

$$\sqrt{15}-\sqrt{10}=\sqrt{5\cdot 3}-\sqrt{5\cdot 2}.$$

Вынесем общий множитель — $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5\cdot 3}-\sqrt{5\cdot 2}=\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

Имеем: $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

Ответ: 4.

Задание 11. Упростите до целого числа выражение

$$\frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{7}.$$

Решение.

1-й способ

Разложим числитель данного выражения на множители. В числителе четыре слагаемых, сгруппируем их по два.

$$\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1=\left(\sqrt{21}+\sqrt{7}\right)-\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Слагаемые в первых скобках имеют общий множитель $\sqrt{7}$.

$$\left(\sqrt{21}+\sqrt{7}\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)=$$
$$=\left(\sqrt{7}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Имеем: $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{7}=\dfrac{\left(\sqrt{7}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{7}=-1.$

2-й способ

$$\frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{7}=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1-\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1}=\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-1.$$

Ответ: −1.

Задание 12. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}.$

Решение.

Приведем дроби к общему знаменателю.

$$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)}.$$

В числителе применим формулы квадрата разности и квадрата суммы двух выражений, а в знаменателе — формулу разности квадратов. Получим:

$$\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})+(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}+\sqrt{5})}{(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{11-2\sqrt{55}+5+(11+2\sqrt{55}+5)}{11-5}.$$

Окончательно имеем: $\frac{32}{6}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$.

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Выражения вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}$, $a\geq 0$, $b\geq 0$

Для вычисления значения выражений вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}$, $a\geq 0$, $b\geq 0$ сначала обозначают это выражение, например A, потом возводят обе части равенства в квадрат и, учитывая знак выражения A, записывают ответ.

Задание 13. Выражение $\sqrt{7-\sqrt{24}}-\sqrt{7+\sqrt{24}}$ является целым числом. Найдите его.

Пусть $A=\sqrt{7-\sqrt{24}}-\sqrt{7+\sqrt{24}}$. Рассмотрим A^2.

$$A^2=7-\sqrt{24}-2\sqrt{7-\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7+\sqrt{24}}+7+\sqrt{24}=$$

$$=14-2\sqrt{(7+\sqrt{24})(7-\sqrt{24})}=14-2\sqrt{25}=4.$$

Так как $A<0$, то $A=-\sqrt{4}=-2$.

Ответ: -2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Вычислите: $\sqrt{0{,}09}+\sqrt{49}$.

   Ответ: ______________.

2. Вычислите: $0{,}1\sqrt{6400}-10\sqrt{0{,}81}$.

   Ответ: ______________.

3. Вычислите: $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}$.

   Ответ: ______________.

4. Вычислите: $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{0{,}008}$.

Ответ: ____________.

5. Вычислите: $0{,}2\sqrt[3]{27000} + 20\sqrt[3]{0{,}001}$.

Ответ: ____________.

6. Какое из данных выражений **не равно** $\sqrt{\frac{7}{12}}$?

1) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}$ 2) $\frac{\sqrt{84}}{12}$ 3) $\frac{\sqrt{7}}{2\cdot\sqrt{3}}$ 4) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

7. Вычислите: $\sqrt[3]{-8\cdot 0{,}001}$.

1) $\pm 0{,}02$ 2) $-0{,}02$ 3) $\pm 0{,}2$ 4) $-0{,}2$

8. Вычислите: $\sqrt{54}\cdot\sqrt{6}$.

Ответ: ____________.

9. Вычислите: $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}$.

Ответ: ____________.

10. Вычислите: $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: ____________.

11. Какое из чисел $\sqrt{0{,}9}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{9000}$ является рациональным?

1) $\sqrt{0{,}9}$
2) $\sqrt{900}$
3) $\sqrt{9000}$
4) ни одно из этих чисел

Ответ: ____________.

12. Вычислите: $\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{10}}\right)^3$.

Ответ: ____________.

13. Вычислите: $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$.

Ответ: ____________.

14. Вычислите: $\left(-4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3$.

Ответ: ____________.

15. Сократите дробь $\frac{7}{\sqrt{7}}$.

1) 1 2) $\sqrt{7}$ 3) $\pm\sqrt{7}$ 4) другой ответ

16. Сократите дробь $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

1) $\sqrt{3}$ 2) 2 3) $\sqrt{3}-1$ 4) другой ответ

17. Сократите дробь $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$.

Ответ: ____________.

18. Сравните выражения: $a = \sqrt{6^2 + 8^2}$ и $b = 6 + 8$.

Ответ: ____________.

19. Сравните выражения: $a = \sqrt{13^2 - 5^2}$ и $b = 13 - 5$.

Ответ: ____________.

20. Вычислите: $\sqrt{20} - 2\sqrt{5}$.

1) 0 2) $\sqrt{5}$ 3) $-\sqrt{5}$ 4) $2\sqrt{5}$

21. Какое целое число заключено между числами $\sqrt{24}$ и $\sqrt{26}$?

1) 4 2) 5 3) 6 4) таких чисел нет

22. Какие целые числа заключены между числами $\sqrt{11}$ и $\sqrt{29}$?

1) 12, 13, 28
2) 3, 4, 5
3) 4, 5
4) 4, 5, 6

23. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{7} - 2$ и $\sqrt{7} + 2$.

1) 3 2) 4 3) 5 4) $4\sqrt{7}$

24. Вычислите: $\sqrt{74^2 - 70^2}$.

Ответ: ____________.

25. Найдите периметр прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{7} - 2$ и $\sqrt{7} + 2$.

1) 3 2) 4 3) 5 4) $4\sqrt{7}$?

26. Вычислите: $\sqrt{6{,}4} \cdot \sqrt{22{,}5}$.

Ответ: ______________.

27. Вычислите: $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{32}}$.

Ответ: ______________.

28. Сравните $\sqrt{159}$ и 13.

Ответ: ______________.

29. Вычислите: $\sqrt{23\frac{1}{25}}$.

Ответ: ______________.

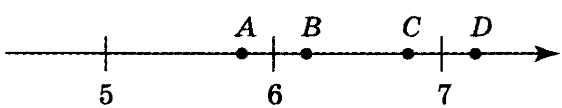
30. Вычислите: $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Ответ: ______________.

31. Вычислите: $\sqrt[3]{4 \cdot 6 \cdot 9}$.

Ответ: ______________.

32. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{34}$. Какая это точка?



1) A 2) B 3) C 4) D

Часть 2

33. Докажите, что $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$.

34. Вычислите: $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^3}$.

35. Вычислите: $\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{3}$.

36. Вычислите: $\left(2\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$.

37. Вычислите: $\sqrt{62{,}5^2 - 58{,}5^2} + \left(\sqrt{13} - 4\right)\left(4 + \sqrt{13}\right)$.

38. Вычислите: $\sqrt{484 - 2 \cdot 22 \cdot 13 + 169} + \sqrt{2{,}5^2 - 2{,}4^2}$.

39. Расположите в порядке возрастания $2\sqrt{2}$; 3; -8; $-3\sqrt{7}$.

40. Расположите в порядке убывания $-2\sqrt[3]{3}$; -4; 3; $2\sqrt[3]{2}$.

1.5. Выражения и преобразования

При выполнении заданий по преобразованию выражений используются различные свойства степени, арифметического квадратного корня, корня третьей степени.

В первой части экзаменационной работы обычно требуется выполнить одно или два действия для получения результата по преобразованию целых и дробных выражений. Во второй части — преобразования многошаговые, причем часто приходится применять различные методы разложения выражений на множители.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Формулы сокращенного умножения

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2, \qquad (1)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \qquad (2)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (3)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), \qquad (4)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \qquad (5)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \qquad (6)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (7)$$

Формула разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ a\neq 0, \qquad (8)$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Нахождение значения выражения

Задание 1. Найдите значение выражения $\dfrac{x^3\sqrt{5}}{5}$ при $x=-\sqrt{5}$.

Решение.

Подставим значение переменной x в исходное выражение.

При $x = -\sqrt{5}$ значение выражения $\frac{x^3\sqrt{5}}{5}$ равно $\frac{(-\sqrt{5})^3\sqrt{5}}{5}$.

$$\frac{(-\sqrt{5})^3\sqrt{5}}{5} = -\frac{(\sqrt{5})^4}{5} = -\frac{\sqrt{5^4}}{5} = -\frac{\sqrt{625}}{5} = -\frac{25}{5} = -5.$$

Ответ: -5.

Задание 2. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2 - b^2}$ при $a = 8$; $b = -6$.

Решение.

Подставим значения a и b в исходное выражение.

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8^2 - (-6)^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{(8-6)(8+6)} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot 14} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}.$$

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Выражение переменной из формулы

Задание 3. Выразите из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$ время t.

Решение.

Будем действовать последовательно: 1) выразим at; 2) выразим время t.

1) $at = v - v_0$; 2) $t = \frac{v - v_0}{a}$.

Ответ: $t = \frac{v - v_0}{a}$.

Приемы разложения на множители

При преобразовании выражений часто приходится применять различные приемы разложения на множители. Напомним основные из них: 1) вынесение общего множителя; 2) группировка; 3) формулы сокращенного умножения; 4) формула разложения квадратного трехчлена на множители.

Вынесение общего множителя

Задание 4. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{b}-1}$.

Решение.

Разложим на множители числитель дроби, а затем сократим на общий множитель.

$$\frac{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{b}-1}=\frac{\sqrt[3]{a}\left(1-3\sqrt[3]{b}\right)}{3\sqrt[3]{b}-1}=-\sqrt[3]{a},\quad \text{причем}\quad 3\sqrt[3]{b}-1\neq 0,$$

т.е. $\sqrt[3]{b}\neq\frac{1}{3}$; $b\neq\frac{1}{27}$.

Ответ: $-\sqrt[3]{a}$; $b\neq\frac{1}{27}$.

Группировка

Задание 5. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{xy}-\sqrt{x}-2\sqrt{y}+2}{\sqrt{x}-2}$ и найдите его значение при $x=y=12100$.

Решение.

В числителе четыре слагаемых. Очень часто при разложении на множители выражения, содержащего четыре слагаемых, используют группировку.

$$\frac{\sqrt{xy}-\sqrt{x}-2\sqrt{y}+2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-1)-2\sqrt{y}+2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-1)-2(\sqrt{y}-1)}{\sqrt{x}-2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}=\sqrt{y}-1,\quad x\geq 0,\ x\neq 4.$$

При $y=12100$ имеем: $\sqrt{y}-1=110-1=109$.

Ответ: $\sqrt{y}-1$, $x\geq 0$, $x\neq 4$; 109.

Формулы сокращенного умножения

Для упрощения выражений с помощью формул сокращенного умножения используют формулы (1)–(7). Чтобы выбрать соответствующую формулу, следует обратить внимание на показатели степени одночленов, входящих в выражение.

Задание 6. Упростите выражение $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}:\dfrac{x+2}{x^3-1}$ и найдите его значение при $x=101$.

Решение.

К выражению $(x^2 - 4)$ применим формулу разности квадратов, а к выражению $(x^3 - 1)$ — разности кубов.

$$\frac{x^2-4}{x^2+x+1} : \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+x+1} : \frac{x+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} =$$

$$= (x-2)(x-1),$$

$$x \neq 1,\ x \neq -2.$$

При $x = 101$ имеем: $(x-2)(x-1) = 99 \cdot 100 = 9900$.

Ответ: $(x-2)(x-1)$, $x \neq 1$, $x \neq -2$; 9900.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Задание 7. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство $3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(\ldots)$?

Решение.

Чтобы разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 2x - 1$, решим уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (см. формулу разложения квадратного трехчлена на множители (8)).

Уравнение имеет корни 1 и $-\frac{1}{3}$, поэтому

$$3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(x+\frac{1}{3}).$$

Ответ: $x + \frac{1}{3}$.

Задание 8. Упростите выражение $\frac{a^2-7a+6}{a-1}$ и найдите его значение при $x = \left(12\frac{4}{5} + 1\frac{5}{12} - 0{,}8 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 12$.

Решение.

Чтобы разложить на множители числитель, решим уравнение $a^2 - 7a + 6 = 0$ и применим формулу разложения квадратного трехчлена на множители (8).

$$\frac{a^2-7a+6}{a-1} = \frac{(a-1)(a-6)}{a-1} = a - 6,\quad a \neq 1.$$

Вернемся к переменной x.

Осталось найти значение выражения $\sqrt{x}-6, x \neq 1$.

Найдем значение x из выражения

$$x = \left(12\frac{4}{5}+1\frac{5}{12}-0{,}8-3\frac{1}{3}\right)\cdot 12.$$

Обратите внимание, что можно рационально вычислить значение числового выражения в скобке, если заметить, что $12\frac{4}{5} = 12{,}8$.

$$\left(12\frac{4}{5}+1\frac{5}{12}-0{,}8-3\frac{1}{3}\right)\cdot 12 = \left(12{,}8-0{,}8-\left(3\frac{4}{12}-1\frac{5}{12}\right)\right)\cdot 12 =$$

$$= \left(12-1\frac{11}{12}\right)\cdot 12 = 144-23 = 121.$$

Итак, при $x = 121$ $\sqrt{x}-6 = 5$.

Ответ: $\sqrt{x}-6$, $x \neq 1$; 5.

Покажем применение всех основных приемов разложения на множители при решении следующего задания.

Задание 9. Упростите выражение

$$\frac{25x^3-10x^2+x}{5x^2-16x+3} : \frac{x^2+3x}{x^3-3x^2-9x+27}$$

и найдите значение выражения при $x = 3{,}1$.

Решение.

Рассмотрим первую дробь $\dfrac{25x^3-10x^2+x}{5x^2-16x+3}$.

В *числителе* все три слагаемых имеют общий множитель (x). После вынесения общего множителя получим выражение $25x^2-10x+1$, которое представляет собой квадрат разности, т.е. $25x^2-10x+1 = (5x-1)^2$.

В *знаменателе* используем формулу разложения на множители квадратного трехчлена, т.е.

$$5x^2-16x+3 = 5(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2-16x+3 = 0$.

Окончательно имеем: $\dfrac{25x^3-10x^2+x}{5x^2-16x+3}=\dfrac{x(5x-1)^2}{5(x-3)(x-0{,}2)}$.

Обратим внимание на выражения $(5x-1)$ и $(x-0{,}2)$. Если первое выражение продолжим раскладывать на множители, то получим $5x-1=5(x-0{,}2)$. Учитывая это, преобразуем знаменатель: $5(x-3)(x-0{,}2)=(x-3)(5x-1)$. Итак, после сокращения на общий множитель дробь будет иметь вид: $\dfrac{x(5x-1)^2}{5(x-3)(x-0{,}2)}=\dfrac{x(5x-1)}{x-3}$.

Рассмотрим вторую дробь $\dfrac{x^2+3x}{x^3-3x^2-9x+27}$.

В *числителе* вынесем общий множитель (x).

В *знаменателе* обратим внимание на число слагаемых: их четыре. Используем группировку, т.е.

$$x^3-3x^2-9x+27=\left(x^3-3x^2\right)-9(x-3)=$$

$$=x^2(x-3)-9(x-3)=\left(x^2-9\right)(x-3).$$

В первом множителе применим формулу разности квадратов:

$$\left(x^2-9\right)(x-3)=(x-3)(x+3)(x-3)=(x-3)^2(x+3).$$

После сокращения на общий множитель дробь будет иметь вид:

$$\frac{x^2+3x}{x^3-3x^2-9x+27}=\frac{x}{(x-3)^2},\ x\neq-3.$$

Вернемся к исходному выражению:

$$\frac{25x^3-10x^2+x}{5x^2-16x+3}:\frac{x^2+3x}{x^3-3x^2-9x+27}=$$

$$=\frac{x(5x-1)}{x-3}:\frac{x}{(x-3)^2}=(5x-1)(x-3),\ \ x\neq\pm3;\ \ x\neq0{,}2.$$

При $x=3{,}1$ значение исходного выражения равно

$$(5\cdot3{,}1-1)(3{,}1-3)=1{,}45.$$

Ответ: $(5x-1)(x-3)$, $x\neq\pm3$, $x\neq0{,}2$; $1{,}45$.

Рассмотрим преобразование выражений, содержащих степени с отрицательными целыми показателями.

Задание 10. Упростите выражение $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}-(ab)^{-1}$ и найдите его значение при $a=\sqrt{20}, b=\sqrt{5}$.

Решение.

Сначала заменим степени с отрицательными целыми показателями на степени с натуральными показателями, т.е.

$$\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}-(ab)^{-1}=\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}-\frac{1}{ab}.$$

Теперь избавимся от двухэтажности в числителе и в знаменателе первой дроби. Для этого выполним действия в числителе и в знаменателе.

$$\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}-\frac{1}{ab}=\frac{\left(b^3+a^3\right)ab}{a^3b^3(b+a)}-\frac{1}{ab}.$$

Обратим внимание на показатели степеней. Применим в числителе первой дроби формулу суммы кубов и сократим числитель и знаменатель на общий множитель $ab(a+b)$. Тогда выражение будет иметь вид:

$$\frac{\left(b^3+a^3\right)ab}{a^3b^3(b+a)}-\frac{1}{ab}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}-\frac{1}{ab},\ a\neq -b.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b^2}=\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}.$$

Итак, при $a=\sqrt{20}, b=\sqrt{5}$ значение исходного выражения равно

$$\frac{\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{20}\right)^2\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)^2}{100}=0{,}05.$$

Ответ: $\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}$, $a\neq -b$; 0,05.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ при $a = 10$; $b = -4$.

   Ответ: ____________.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{m^3\sqrt{7}}{7}$ при $m = -\sqrt{7}$.

   Ответ: ____________.

3. Из формулы кинетической энергии $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$ выразите скорость.

   1) $v = \dfrac{2E_k}{m}$
   2) $v = \dfrac{E_k}{2m}$
   3) $v = \sqrt{\dfrac{2E_k}{m}}$
   4) $v = \sqrt{\dfrac{E_k}{2m}}$

4. Из формулы мощности автомобиля $P = \dfrac{D^2 n}{16}$, где P — мощность в лошадиных силах, D — диаметр цилиндра, n — число цилиндров, выразите n.

   1) $n = \dfrac{16P}{D^2}$
   2) $n = 16PD^2$
   3) $n = \dfrac{16D^2}{P}$
   4) $n = \sqrt{\dfrac{16P}{D^2}}$

5. Представьте в виде степени с целым показателем $x^2 : x^{-3}$.

   Ответ: ____________.

6. Представьте в виде степени с целым показателем $\left(x^3\right)^4$.

   Ответ: ____________.

7. Представьте в виде степени с целым показателем $\dfrac{x^2 x^5}{\left(x^3\right)^2}$.

   1) x^2
   2) x^{-2}
   3) x^{-1}
   4) x

8. Укажите выражение, равное степени 4^{n-2}.

1) $4^n - 16$ 2) $\frac{4^n}{16}$ 3) $\frac{4^n}{4^{-2}}$ 4) $(4^n)^{-2}$

9. Представьте в виде степени произведение $9 \cdot 3^n$.

1) 3^{2n} 2) 9^{n+1} 3) 3^{n+2} 4) 27^n

10. Выполните вычитание $(x+7)^2 - x(14+4x)$.

Ответ: ______________.

11. Упростите выражение $4(m-1)^2 + 8m$.

1) $4m^2 + 8m + 4$ 3) $4m^2 + 4$

2) $4m^2 + 8m - 4$ 4) $4m^2 + 1$

12. Укажите выражение, тождественно равное многочлену $8a^2 - 12ab$.

1) $-4a(2a+3b)$ 3) $-4a(2a-3b)$

2) $-4a(-2a+3b)$ 4) $-4a(-2a-3b)$

13. В выражении $3a^2 - 9ab$ вынесли за скобки общий множитель $(-3a)$. Какой двучлен остался в скобках?

1) $a+3b$ 2) $a-3b$ 3) $-a-3b$ 4) $-a+3b$

14. Преобразуйте в многочлен выражение

$$6p(p-2)-(p-6)^2.$$

Ответ: ______________.

15. Разложите на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 9x - 12$.

1) $3(x+1)(x-4)$ 3) $3(x+1)(x+4)$

2) $3(x-1)(x-4)$ 4) $3(x-1)(x+4)$

16. Сократите дробь $\frac{4b^2 - 12b}{b^2 - 9}$.

Ответ: ______________.

17. Сократите дробь $\dfrac{a^3 + 27b^3}{a + 3b}$.

1) $a^2 - 3ab + 9b^2$
2) $a^2 + 3ab + 9b^2$
3) $a^2 - 3ab + b^2$
4) $a^2 + 6ab + b^2$

18. Какое из выражений тождественно дроби $\dfrac{a-b}{3b-a}$?

1) $\dfrac{a-b}{a-3b}$
2) $\dfrac{b-a}{3b-a}$
3) $\dfrac{b-a}{a-3b}$
4) $-\dfrac{a-b}{3b-a}$

19. Упростите выражение $\dfrac{9x^2 - y^2}{3x^2 + xy}$ и найдите его значение при $x = 100$ и $y = 299$.

Ответ: ____________.

20. Найдите разность выражений $\dfrac{6x^2}{2x-1} - 3x$.

Ответ: ____________.

21. Найдите разность выражений $\dfrac{a}{(a-2)^2} - \dfrac{2}{(2-a)^2}$.

1) $\dfrac{1}{2-a}$
2) $\dfrac{1}{a-2}$
3) $\dfrac{a+2}{(a-2)^2}$
4) $\dfrac{1}{a+2}$

22. Выполните умножение $\dfrac{c}{b^2-9c^2} \cdot \dfrac{3b+9c}{6c^2}$.

1) $\dfrac{1}{2b-2c}$
2) $\dfrac{2}{3b+3c^2}$
3) $\dfrac{1}{2bc-2c^2}$
4) $\dfrac{1}{2bc-6c^2}$

23. Выполните умножение $\left(ab + b^2\right) \cdot \dfrac{a}{a^2 - b^2}$.

Ответ: ____________.

24. Выполните деление $\left(ab - b^2\right) : \dfrac{a^2 - b^2}{b}$.

Ответ: ____________.

25. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{6x}\right) \cdot \dfrac{x^2}{5}$.

Ответ: ____________.

26. В каком случае выражение преобразовано в тождественно равное

1) $(4 + a)(a - 4) = 16 - a^2$

2) $(a - 4)^2 = 16 - 8a + a^2$

3) $4(a - b) = 4a - b$

4) $(4 + a)^2 = 16 + a^2$

27. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{4y^2}\right) \cdot \dfrac{xy}{2y + x}$.

Ответ: ____________.

28. В выражение $x - y$ подставьте $x = \dfrac{a-b}{a+b}$, $y = \dfrac{a+b}{a-b}$ и упростите его.

Ответ: ____________.

29. Упростите выражение $\dfrac{1}{y^{-2}} \cdot \dfrac{1}{y^{-1}}$ и найдите его значение при $y = -3$.

1) 27 2) -27 3) $\dfrac{1}{27}$ 4) $-\dfrac{1}{27}$

30. Упростите выражение $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{a + b}$.

1) 2 2) $a\ b$ 3) $a+b$ 4) $\dfrac{1}{ab}$

31. Сократите дробь $\dfrac{a - 81b}{\sqrt{a} - 9\sqrt{b}}$.

1) $\sqrt{a} - 9\sqrt{b}$

2) $\sqrt{a} + 9\sqrt{b}$

3) $\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$

4) $\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$

32. Упростите выражение $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{147a}$.

Ответ: ____________.

Часть 2

33. Разложите на множители $x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y$.

34. Разложите на множители $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 3x - 2y$.

35. Разложите на множители $2p + 3m + 4p^2 - 9m^2$.

36. Сократите дробь $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2 + 6x}$.

37. Сократите дробь $\dfrac{9a^2 + 6a + 1}{6ax + 2x - 3a - 1}$.

38. Упростите выражение $\dfrac{xy - x - y + 1}{x - 1}$ и найдите его значение при $x = y = 2010$.

39. Сократите дробь $\dfrac{64x^3 - 27}{16x^2 + 12x + 9}$.

40. Упростите выражение $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x} : \dfrac{x^2 - 25}{x^3}$.

41. Упростите выражение $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1} \cdot \dfrac{x + 3}{x^2 + 5x + 6}$.

42. Упростите выражение $\dfrac{2m}{(m - 1)^3} + \dfrac{1 + m^2}{(1 - m)^3}$ и найдите его значение при $m = 0{,}75$.

43. Упростите выражение $\dfrac{8 - 27^n}{4 + 2 \cdot 3^n + 9^n} + 2007 + 3^n$.

44. Докажите, что значение выражения не зависит от допустимых значений переменной

$$\frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x + 4} : \frac{x - 6}{x^3 + 8} - 8x - x^2.$$

45. Упростите выражение

$$\left(\frac{3\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} + 3\right)\left(9 - 6\sqrt{x} + x\right)$$

и найдите его значение при $x = 169$.

46. Разложите на множители $x^4 + x^2 - 2$.

47. Разложите на множители

$$p^2x + p^2y - nx - ny - p^2 + n.$$

48. Разложите на множители

$$m^2x^2 - 3m^2x - 4m^2 - x^2 + 3x + 4.$$

49. Упростите выражение $\left(\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} - \dfrac{9x}{x + 3}\right) : \left(1 - \dfrac{6}{x + 3}\right)$.

50. Упростите выражение $\dfrac{5}{1 + 4x^{-1}} \cdot \left(\dfrac{x - 4}{x^2 + 4x} - \dfrac{16}{16 - x^2}\right)$.

51. Докажите, что значение выражения

$$\frac{x^2 - 2(m + a)x + 4ma}{x^2 + 2(a + b)x + 4ab} \cdot \frac{x^2 - 4b^2}{x^2 - 4a^2} \cdot \frac{(x + 2a)^2}{x - 2m}$$

не зависит от допустимых значений переменной a.

52. Упростите выражение $\dfrac{9 \cdot 75^n}{3^{n+1} \cdot 5^{2n-1}}$.

53. Упростите выражение $\dfrac{2^{n+2} - 2^{n-1}}{7 \cdot 2^n}$.

54. Сократите дробь $\dfrac{n + \sqrt{n} - 12}{3 - \sqrt{n}}$.

55. Упростите выражение $\dfrac{x - 9}{x + \sqrt{x} + 1} : \dfrac{\sqrt{x} + 3}{x\sqrt{x} - 1}$ и найдите его значение при $x = 0{,}81$.

56. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{y - \sqrt{7y}} + \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7y} + y}\right) : \dfrac{2\sqrt{7}y}{49 - 14y + y^2} - 1$ и найдите его значение при $y = 0{,}01$.

57. Найдите значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{x} + 2\right)^2 - 4\left(\sqrt{x} + 2\right) + 4\right)^2 \text{ при } x = 200.$$

58. Найдите значение выражения

$$\sqrt{(3x - 12)^2} - \sqrt{(3x + 12)^2} \text{ при } x < -2010.$$

59. Значение выражения $50\left(\sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}} - \sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}}\right)$ при $x = 9{,}0169$ является целым числом. Найдите его.

Тема 2. УРАВНЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. **Корнем уравнения** с одним неизвестным называют значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Определение. **Решить уравнение** с одним неизвестным — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Определение. **Линейным уравнением** с одним неизвестным x называют уравнения вида $ax = b$, где x — неизвестное, a и b — некоторые числа; a называют коэффициентом при переменной, b — свободным членом.

Определение. **Квадратным уравнением** с одним неизвестным x называют уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестное, a, b и c — некоторые числа (коэффициенты уравнения), причем $a \neq 0$. a называют первым (старшим) коэффициентом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом.

Если в квадратном уравнении хотя бы один из коэффициентов равен 0 (кроме, конечно, коэффициента при x^2), то уравнение называют **неполным квадратным уравнением.**

Выражение

$$D = b^2 - 4ac \tag{1}$$

называют **дискриминантом** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. По дискриминанту квадратного уравнения определяют, сколько оно имеет корней:

– если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;

– если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два совпавших корня);

– если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Формулы корней квадратного уравнения

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \tag{2}$$

Корни квадратного уравнения, в котором второй коэффициент — четное число, можно вычислять по формуле

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac. \qquad (3)$$

Теорема Виета

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, то сумма корней этого уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т.е. если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \qquad (4)$$

Обратная теорема Виета

Если сумма двух чисел равна второму коэффициенту приведенного квадратного уравнения, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения, т.е. если выполняются условия

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$

то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Линейные уравнения

При решении линейных уравнений слагаемые с неизвестным обычно переносят в левую часть уравнения, а остальные слагаемые — в правую часть. При этом переносе надо изменить на противоположный знак слагаемых, которые переносим.

Задание 1. Решите уравнение $2 - 3(x + 2) = 5 - 2x$.

Решение.

Сначала раскроем скобки.

$$2 - 3x - 6 = 5 - 2x$$
$$-3x + 2x = 5 - 2 + 6$$
$$-x = 9.$$

Уравнение еще не решено. Надо найти значение переменной x, а не $(-x)$.

$$x = -9.$$

Ответ: -9.

Задание 2. Найдите корни уравнения $\frac{m}{3} + \frac{m}{12} = 3{,}75.$

Решение.

В левой части уравнения — дроби с разными знаменателями. Приведем их к общему знаменателю.

$$\frac{4m}{12} + \frac{m}{12} = 3{,}75.$$

$$\frac{5m}{12} = 3{,}75$$

Остается разделить и левую, и правую часть уравнения на коэффициент при неизвестном, т.е. на $\frac{5}{12}$.

$$m = 3{,}75 : \frac{5}{12}$$

$$m = 3{,}75 \cdot \frac{12}{5}.$$

При умножении можно либо число 3,75 перевести в обыкновенную дробь (полезно знать, что $0{,}75 = \frac{3}{4}$), либо число $\frac{12}{5}$ перевести в десятичную (разделив 12 на 5).

$$m = \frac{15}{4} \cdot \frac{12}{5}$$
$$m = 9.$$

Ответ: 9.

Квадратные уравнения

Неполные квадратные уравнения можно решить без применения основной формулы (2) корней квадратного уравнения.

Задание 3. Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

А. $0{,}5x^2 - 2x = 0$ Б. $0{,}5x^2 - 2 = 0$ В. $0{,}5x^2 = 0$

1) 0 2) −2 и 2 3) 0 и 4

Решение.

Решим сначала первое уравнение. Вынесем за скобки общий множитель.

$$x(0{,}5x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } 0{,}5x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2 : 0{,}5$$

$$x = 0 \text{ или } x = 4.$$

Итак, корнями первого уравнения являются числа 0 и 4.

Решим второе уравнение. Выразим x^2, т.е.

$$x^2 = 2 : 0{,}5$$

$$x^2 = 4.$$

Корнями второго уравнения являются числа 2 и −2.

Осталось решить третье уравнение. При решении его тоже выразим x^2.

$$x^2 = 0.$$

Только число 0 является его корнем.

Остается записать ответ.

Ответ: А. −3; Б. −2; В. −1.

Замечание: соотнести данные уравнения с множеством их корней можно и проще, с помощью следующих рассуждений: первое уравнение имеет два различных корня — нуль и другое число, корнями второго уравнения являются два противоположных числа, корнем третьего уравнения является только число нуль.

Рассмотрим решение квадратных уравнений, в которых ни один из коэффициентов не равен 0.

Задание 4. Решите уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решение.

По основной формуле корней квадратного уравнения (2) $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. В данном уравнении $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$, поэтому $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$.

Имеем:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3}, \quad x = \frac{2 \pm 4}{6}.$$

Ответ: 1; $-\frac{1}{3}$.

Замечание: подсчитаем сумму коэффициентов этого уравнения: $3+(-2)+(-1) = 0$. Число 1 является корнем этого уравнения.

Это верно и в общем случае, т.е. если мы решаем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и сумма его коэффициентов равна нулю $a + b + c = 0$, то один из корней уравнения равен 1.

Задание 5. Решите уравнение $-x^2 + 0{,}1 = 0{,}9x$. В ответе укажите произведение его корней.

Решение.

Перенесем слагаемые в левую часть уравнения.

$$-x^2 + 0{,}1 - 0{,}9x = 0$$

$$x^2 + 0{,}9x - 0{,}1 = 0.$$

Чтобы избавиться от десятичных дробей, умножим обе части уравнения на 10.

$$10x^2 + 9x - 1 = 0$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1) = 121$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{20}$$

$$x = -1 \text{ или } x = 0{,}1.$$

Не забудем, что в задании есть дополнительный вопрос. Произведение корней уравнения равно $-0{,}1$.

Ответ: $-0{,}1$.

Замечание: на дополнительный вопрос в задании можно было ответить, даже не находя корней уравнения. Вспомните формулировку теоремы Виета (4).

После того как вы убедились в существовании корней ($D > 0$), можно просто найти их произведение. Из двух уравнений $x^2 + 0{,}9x - 0{,}1 = 0$ и $10x^2 + 9x - 1 = 0$ только первое является приведенным, поэтому теорему Виета применяем к первому уравнению: $x_1 \cdot x_2 = -0{,}1$.

Если в квадратном уравнении коэффициент при x — четный, можно использовать формулу (3) для нахождения корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.

Задание 6. Решите уравнение $x^2 - 32x + 31 = 0$.

Решение.

В уравнении $a = 1$, $b = -32$, $c = 31$.

1-й способ

Применим формулу для уравнений с четным вторым коэффициентом (3).

$$\frac{D}{4} = (-16)^2 - 1 \cdot 31 = 256 - 31 = 225$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{225}}{1}$$

$$x = 31 \text{ или } x = 1.$$

2-й способ

Применим основную формулу (2).

$$D = (-32)^2 - 4 \cdot 31 = 1024 - 124 = 900$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1}.$$

Ответ: 1; 31.

Замечание: в уравнении $x^2 - 32x + 31 = 0$ сумма коэффициентов $1 + (-32) + 31 = 0$, поэтому 1 является корнем уравнения. А второй корень можно найти по теореме Виета, так как $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot x_2 = 31$, то $x_2 = 31$.

Задание 7. Решите уравнение $(3x-2)(4x-3)=0$. В ответе укажите больший корень.

Решение.

В левой части уравнения записано произведение, причем произведение равно 0.

$$(3x-2)(4x-3)=0$$

$$3x-2=0 \text{ или } 4x-3=0$$

$$x=\frac{2}{3} \text{ или } x=\frac{3}{4}.$$

Чтобы выбрать больший корень, можно либо привести дроби к одному знаменателю и сравнить числители дробей $\left(\frac{2}{3}=\frac{8}{12};\ \frac{3}{4}=\frac{9}{12}\right)$, либо перевести обе дроби в десятичные дроби $\left(\frac{2}{3}=0{,}666\ldots=0{,}(6),\ \frac{3}{4}=0{,}75\right)$.

Ответ: 0,75.

В курсе алгебры рассматривают также различные уравнения, сводимые к решению квадратных уравнений.

Уравнения высших степеней

Уравнения, степень которых выше второй, обычно решаются двумя основными методами: введением новой переменной и разложением на множители.

Метод введения новой переменной

Задание 8. Найдите корни уравнения

$$x^4-11x^2-12=0.$$

Замечание: уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$, являющиеся квадратными относительно x^2, называют **биквадратными уравнениями**.

Решение.

Это уравнение можно свести к квадратному с помощью замены $a=x^2$.

$$x^4 - 11x^2 - 12 = 0$$

$$a = x^2$$

$$a^2 - 11a - 12 = 0$$

$$a = -1 \text{ или } a = 12.$$

Вернемся к переменной x.

$$x^2 = -1 \text{ или } x^2 = 12.$$

Первое уравнение решений не имеет, а второе уравнение имеет два корня $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $-\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$.

Ответ: $\pm 2\sqrt{3}$.

Замечание: уравнение $x - 11\sqrt{x} - 12 = 0$ тоже можно свести к квадратному $a^2 - 11a - 12 = 0$ заменой $a = \sqrt{x}$. Правда, тогда, после решения уравнения с переменной a, придется решать простейшие иррациональные уравнения: $\sqrt{x} = -1, \sqrt{x} = 12$. И корнем исходного уравнения будет только $12^2 = 144$.

Не всегда замена переменной так очевидна, как при решении биквадратных уравнений.

Задание 9. Найдите наименьший корень уравнения

$$(x+3)^4 + 3x^2 + 18x - 1 = 0.$$

Решение.

Рассмотрим первое слагаемое $(x+3)^4$. Вспомним, что $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Сгруппируем второе и третье слагаемые $3x^2 + 18x$. Если вынести общий множитель 3 за скобки, тогда имеем $3(x^2 + 6x)$.

Введем новую переменную $a = (x+3)^2$, $a \geq 0$, тогда

$$3x^2 + 18x = 3x^2 + 18x + 27 - 27 =$$

$$= 3\left(x^2 + 6x + 9\right) - 27 = 3a - 27.$$

Исходное уравнение будет иметь вид

$a^2 + 3a - 27 - 1 = 0$. Получили квадратное уравнение относительно переменной a. Решим его.

$$a^2 + 3a - 28 = 0$$

$$a = -7 \text{ или } a = 4$$

$$a = -7 \text{ — посторонний корень.}$$

Вернемся к переменной x.

$$(x + 3)^2 = 4.$$

Как проще решить это уравнение?

1-й способ. Раскрыть квадрат суммы и применить основную формулу корней квадратного уравнения.

2-й способ. Перенести 4 в левую часть и применить формулу разности квадратов.

3-й способ. Извлечь квадратный корень из обеих частей уравнения.

$$x + 3 = 2 \text{ или } x + 3 = -2.$$

$$x = -1 \text{ или } x = -5.$$

Прежде чем записать ответ, вспомните, на какой вопрос требуется ответить в задании.

Ответ: -5.

Метод разложения на множители

Прежде чем приступать к решению уравнений с помощью данного метода, советуем повторить тему «Числа и выражения. Преобразование выражений».

Задание 10. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 - 32x + 96 = 0$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

Решение.

В левой части уравнения четыре слагаемых, поэтому применяем метод группировки.

$$\left(x^3 - 3x^2\right) - (32x - 96) = 0$$

$$x^2(x - 3) - 32(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)\left(x^2 - 32\right) = 0.$$

Произведение равно 0, значит, $x - 3 = 0$ или $x^2 - 32 = 0$.

Уравнение имеет три корня: 3; $\pm 4\sqrt{2}$.

Ответ: 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Решите уравнение $x - 5(x - 4) = 6x + 5$.

Ответ: ____________.

2. Найдите корень уравнения $4 - \frac{x}{2} = 3$.

Ответ: ____________.

3. Какое из уравнений имеет бесконечное число корней?

1) $0 \cdot x = 0$
2) $0 \cdot x = 1$
3) $0 + x = 0$
4) $0 - x = 0$

4. Решите уравнение $\frac{m+4}{6} - \frac{m}{9} = -1$.

Ответ: ____________.

5. Найдите корни уравнения $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)(0{,}2x - 1) = 0$.

Ответ: ____________.

6. Решите уравнение $4n - 10{,}5 = 5n - 3(2n - 1{,}5)$.

Ответ: ____________.

7. Корнем квадратного уравнения $-5x^2 = -25$ является число

1) -5
2) $\frac{1}{5}$
3) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$
4) $-\sqrt{5}$

8. Найдите корни уравнения $-2k^2 + 32 = 0$.

Ответ: ____________.

9. Найдите корни уравнения $-2k^2 + 32k = 0$.

Ответ: ____________.

10. Решите уравнение $-9x^2 + \frac{9}{25}x = 0$. В ответе укажите наименьший из его корней.

1) $-\frac{5}{3}$ 2) 0 3) $-\frac{9}{25}$ 4) $\frac{1}{25}$

11. Укажите верную формулу корней квадратного уравнения $kx^2 + mx + n = 0$.

1) $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2}$ 3) $x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4k}}{2k}$

2) $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4kn}}{2}$ 4) $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2k}$

12. Решите уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$.

1) $3 - \sqrt{2};\ 3 + \sqrt{2}$ 3) $6 - 2\sqrt{2};\ 6 + 2\sqrt{2}$

2) $3 - \sqrt{3};\ 3 + \sqrt{3}$ 4) $-3 - \sqrt{2};\ -3 + \sqrt{2}$

13. Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

1) $0{,}2x^2 - 5x = 0$; 2) $0{,}2x^2 - 5 = 0$; 3) $0{,}2x^2 = 0$.

а) 0; б) -5 и 5; в) 0 и 25.

14. Найдите положительный корень уравнения

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

1) 1 2) 2 3) 5 4) 2,5

15. Укажите наименьший корень уравнения

$$x^2 + 2x = 24.$$

Ответ: ____________.

16. Решите уравнение $\frac{y+7}{(y-7)(y+9)} = 0$.

Ответ: ____________.

17. Решите уравнение $\frac{y-7}{(y-7)(y+9)} = 0$.

Ответ: ____________.

18. Решите уравнение $\frac{(y-7)(y+9)}{y+7} = 0.$

Ответ: ____________.

19. Решите уравнение $\frac{(y-7)(y+9)}{y-7} = 0.$

Ответ: ____________.

20. Решите уравнение $\frac{6}{x-4} = \frac{5}{x+2}.$

Ответ: ____________.

21. Решите уравнение $\frac{2x^2 - 3x - 14}{x+2} = 0.$

Ответ: ____________.

22. Решите уравнение $\frac{2x^2 - 5x - 7}{x+1} = 0.$

Ответ: ____________.

23. Укажите количество корней уравнения

$$\frac{x^2 - 8}{x-2} = \frac{2x}{2-x}.$$

Ответ: ____________.

24. Найдите сумму корней уравнения

$$x^2 - 28x + 27 = 0.$$

Ответ: ____________.

Тема 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Системы уравнений можно решить различными методами. В первой части экзаменационной работы требуется решить системы уравнений либо методом подстановки, либо методом сложения, либо графическим методом.

При решении систем уравнений из второй части экзаменационной работы приходится применять специальные приемы решения систем уравнений, в частности метод введения новых неизвестных, а также решать системы уравнений с параметром.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. **Решением системы уравнений** с двумя неизвестными называется пара значений неизвестных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Метод подстановки

Задание 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 10, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим второе уравнение системы. Выразим неизвестное x через y и подставим в первое уравнение.

$$\begin{cases} (2y+1)y = 10, \\ x = 2y+1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы.

$$(2y+1)y = 10$$

$$2y^2 + y - 10 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

$$y = \frac{-1 \pm 9}{4}$$

$$y = 2 \quad \text{или} \quad y = -2{,}5.$$

Соответствующие значения x можно найти, подставив найденные значения y в одно из уравнений исходной системы, например во второе уравнение.

$$\begin{cases} y = 2, \\ x = 2 \cdot 2 + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 5. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = -2{,}5 \\ x = 2 \cdot (-2{,}5) + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2{,}5, \\ x = -4. \end{cases}$$

Ответ можно записать так: $(5;2)$, $(-4;-2{,}5)$ — или так: $x_1 = 5, y_1 = 2; x_2 = -4, y_2 = -2{,}5$.

Ответ: $(5;\ 2)$, $(-4;\ -2{,}5)$.

Метод сложения

Задание 2. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13, \\ 3x - 5y = -7. \end{cases}$$

Решение.

1-й способ. Метод сложения

Сложим оба уравнения исходной системы

$$3x + 5y + (3x - 5y) = 13 - 7$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Найдем соответствующее значение y, подставив найденное значение x в любое из уравнений системы, например в первое.

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 5y = 13, \\ x = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

2-й способ. Метод подстановки

Выразим x из первого уравнения $x = \frac{13-5y}{3}$ и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} x = \frac{13-5y}{3}, \\ 3 \cdot \frac{13-5y}{3} - 5y = -7. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$13 - 5y - 5y = -7$$

$$-10y = -20$$

$$y = 2$$

Найдем соответствующее значение x из первого уравнения

$$x = \frac{13-5 \cdot 2}{3},\ x = 1.$$

Ответ: (1; 2).

Задание 3. Вычислите координаты точки пересечения прямых $6x + 5y = -1$, $7x - 3y = -10$.

Решение.

Точка пересечения прямых принадлежат как первой прямой, так и второй прямой, поэтому, чтобы найти ее координаты, надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 5y = -1, \\ 7x - 3y = -10. \end{cases}$$

Метод подстановки в данном случае неудобен, так как надо выражать переменные и при этом придется делить либо на 6, либо на 5, либо на 7, либо на 3.

Попробуем применить метод сложения. Как получить слагаемые, отличающиеся только знаком?

Умножим первое уравнение на (-7), а второе на 6.

$$\begin{cases} 6x + 5y = -1, & \big| \times(-7) \\ 7x - 3y = -10; & \big| \times 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -42x - 35y = 7, \\ 42x - 18y = -60. \end{cases}$$

Почленно сложим уравнения.

$$-42x - 35y + 42x - 18y = 7 + (-60)$$

$$-53y = -53$$

$$y = 1.$$

Подставим найденное значение y в любое из уравнений исходной системы, например во второе.

$$\begin{cases} y = 1, \\ 7x - 3 \cdot 1 = -10; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1;\ 1)$.

Метод введения новых неизвестных

Задание 4. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x-y} - \dfrac{2}{x+y} = 1, \\ \dfrac{4}{x+y} - \dfrac{15}{x-y} = -1. \end{cases}$$

1) $(-3{,}5;\ -1{,}5)$
2) $(3{,}5;\ 1{,}5)$
3) $(3{,}5;\ -1{,}5)$
4) $(-3{,}5;\ 1{,}5)$

Решение.

Введение новых неизвестных позволяет упростить вид выражений, входящих в систему уравнений. В данном случае можно ввести следующие неизвестные $a = \dfrac{1}{x+y}$, $b = \dfrac{1}{x-y}$, тогда получим систему

$$\begin{cases} 10b - 2a = 1, \\ 4a - 15b = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

Далее применяем уже известные методы: метод подстановки или метод сложения. Учитывая коэффициенты при неизвестных, выберем для решения метод сложения.

Чтобы получить слагаемые, отличающиеся только знаком, умножим первое уравнение на 2.

$$\begin{cases} 10b - 2a = 1, \mid \times 2 \\ 4a - 15b = -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 20b - 4a = 2, \\ 4a - 15b = -1. \end{cases}$$

Сложим уравнения. Получим $5b = 1, b = 0{,}2$. Найдем соответствующее значение переменной a, подставив в любое из уравнений системы значение b (*).

$$\begin{cases} a = 0{,}5, \\ b = 0{,}2. \end{cases}$$

Вернемся к переменным x и y.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 0{,}5, \\ \dfrac{1}{x-y} = 0{,}2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Далее систему уравнений можно решить либо методом сложения, либо методом подстановки. Окончательно получаем:

$$\begin{cases} x = 3{,}5, \\ y = -1{,}5. \end{cases}$$

Ответ: 3.

Замечание: получить правильный ответ в **задании 4** можно и иначе, например, поочередно подставив возможные решения из вариантов 1), 2), 3), 4) в систему и проверяя, не получили ли мы верное равенство. Здесь главное не ошибиться в вычислениях.

Задание 5. Сколько решений имеет система уравнений?

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} = 5. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим второе уравнение системы. Если обозначим $\frac{x}{y} = a$, то $\frac{y}{x} = \frac{1}{a}$. Имеем уравнение $a + \frac{4}{a} = 5$. Это дробно-рациональное уравнение (см. решение таких уравнений в теме «Уравнения»).

Решим его.

$$\frac{a^2 - 5a + 4}{a} = 0.$$

Его корни 1 и 4.

Вернемся к неизвестным x и y. Исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{x}{y} = 1; \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{x}{y} = 4; \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

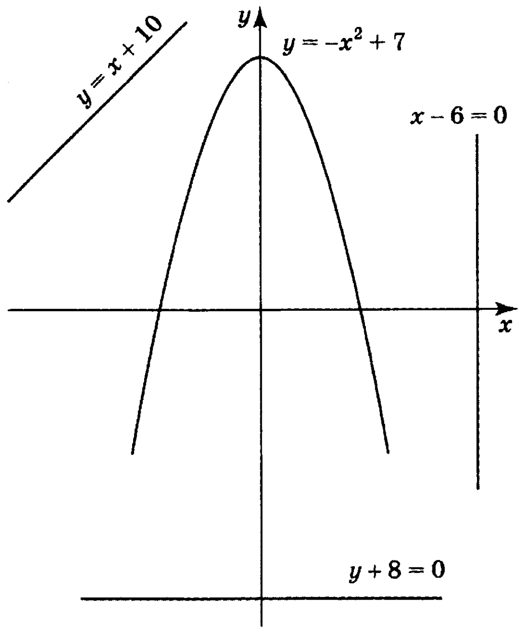
$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x = y; \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 8, \\ x = 4y. \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Решением системы (I) является пара чисел (4; 4). Решением системы (II) является пара чисел (6,4; 1,6). Исходная система имеет два решения.

Ответ: два решения.

Графический метод

Задание 6. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет 2 решения.



1) $\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ y = x + 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ x - 6 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ y + 8 = 0. \end{cases}$

4) все три указанные системы

Решение.

Каждая система содержит уравнение параболы $y = x^2 + 7$ и уравнение прямой. Если система имеет два решения, то парабола и прямая должны иметь две общие точки. Проанализируем рисунок.

Прямая $y = x + 10$ и парабола не пересекаются. Система из варианта 1) решений не имеет.

Прямая $x - 6 = 0$ и парабола пересекаются в одной точке (это можно заметить, если мысленно продлить параболу и прямую). Система из варианта 2) имеет одно решение.

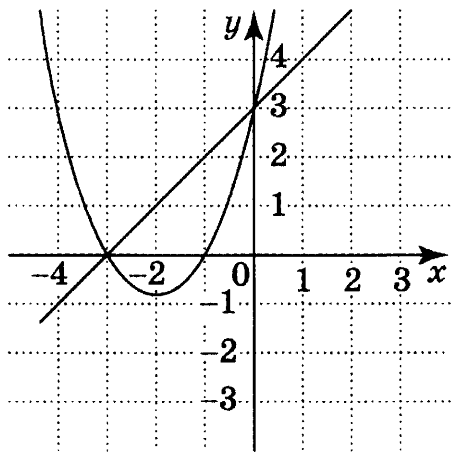
Прямая $y + 8 = 0$ и парабола пересекаются в двух точках (это можно заметить, если мысленно продлить параболу и прямую).

Значит, ответ на вопрос задачи — система из варианта 3.

Ответ: 3.

Задание 7. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = x + 3$. Используя графики, решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3, \\ y = x + 3. \end{cases}$$



Решение.

Координаты каждой из точек пересечения параболы $y = x^2 + 4x + 3$ и прямой $y = x + 3$ удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением исходной системы. Остается найти координаты этих точек.

Ответ: $(-3;\ 0)$, $(0;\ 3)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 3x + 4y = 19. \end{cases}$

Ответ: ____________.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = -6, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

Ответ: ____________.

3. Вычислите координаты точки пересечения прямых $2x - 3y = -8$, $4x + 2y = 0$.

Ответ: ____________.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 7y = 31, \\ 5x + 7y = -11. \end{cases}$$

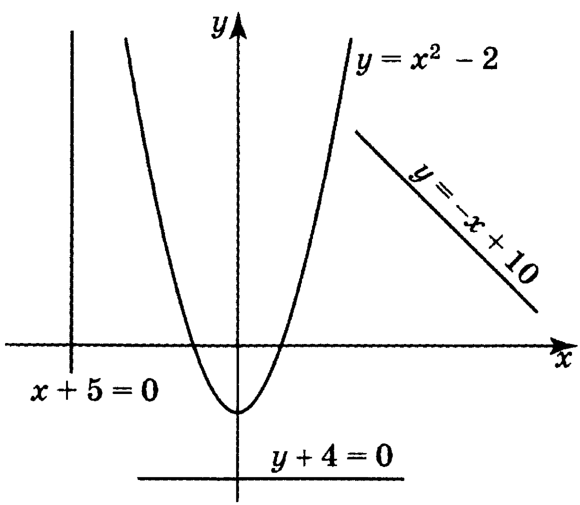
Ответ: ____________.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 11y = 36, \\ 3x + 11y = -30. \end{cases}$$

Ответ: ____________.

6. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет 2 решения.



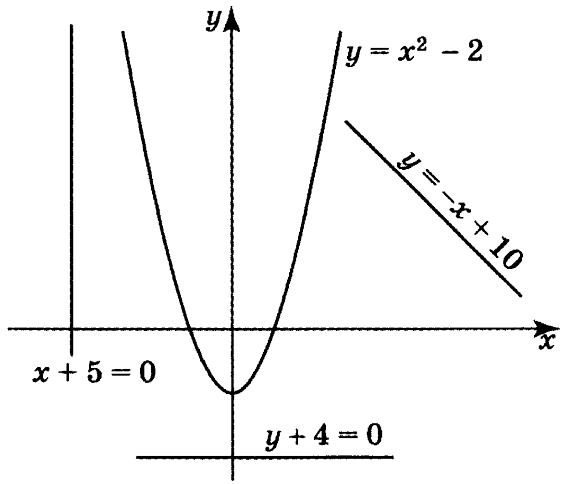
1) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = -x + 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + 5 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

4) все три указанные системы

7. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая не имеет решения.



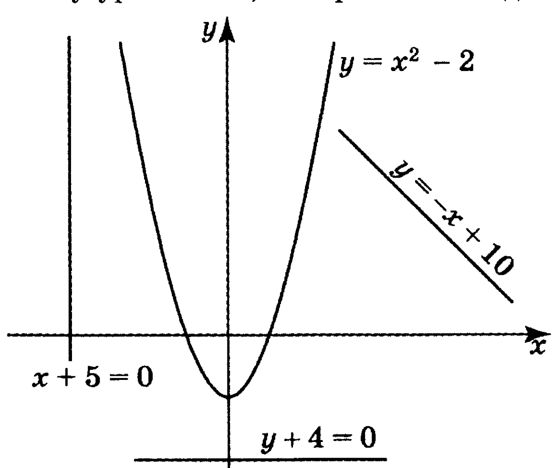
1) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = -x + 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + 5 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

4) все три указанные системы

8. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет одно решение.



1) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = -x + 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + 5 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

4) все три указанные системы

9. Из данных уравнений подберите второе уравнение системы

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x}, \\ \ldots \end{cases}$$

так чтобы система имела 2 решения (используйте графические представления).

1) $y = -x$

2) $y = x$

3) $-y = x^2$

4) $y = x^2$

10. Из данных уравнений подберите второе уравнение системы

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x}, \\ \ldots \end{cases}$$

так чтобы система не имела решения (используйте графические представления).

1) $y = -x$

2) $y = x$

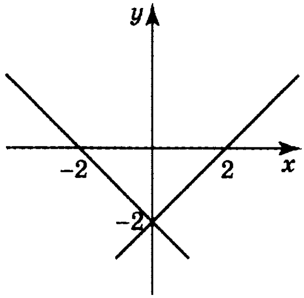
3) $-y = x^2$

4) $y = x^2$

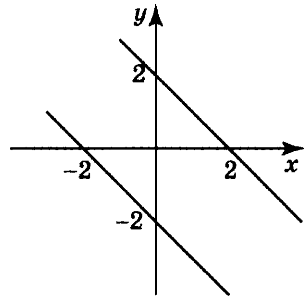
11. Укажите рисунок, на котором приведена графическая иллюстрация решения системы уравнений

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = -x - 2. \end{cases}$$

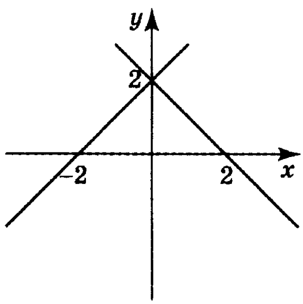
1)



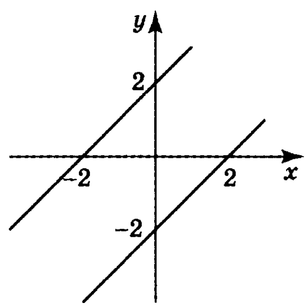
3)



2)



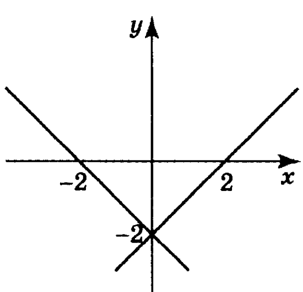
4)



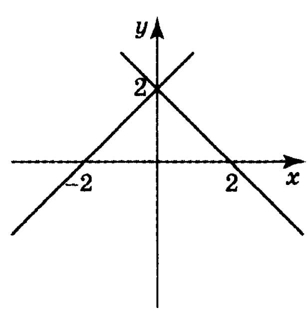
12. Укажите рисунок, на котором приведена графическая иллюстрация решения системы уравнений

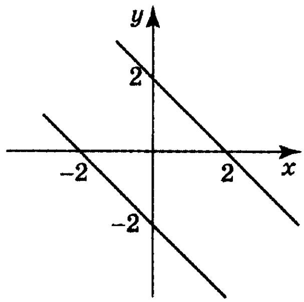
$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

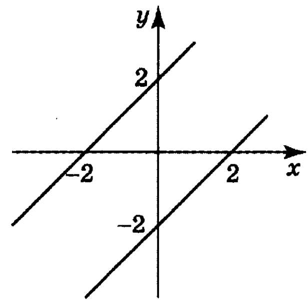
1)



2)

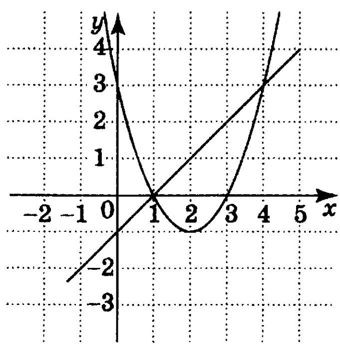


3)


4)


13. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = x - 1$. Используя графики, решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3, \\ y = x - 1. \end{cases}$$



Ответ: ____________.

Часть 2

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y}{6} = 2, \\ \dfrac{x+2}{6} - \dfrac{y}{4} = -2{,}5. \end{cases}$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases}$$

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$$

17. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = 21\,? \end{cases}$$

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = -11. \end{cases}$$

19. Решите систему уравнений и укажите наименьшую сумму $x_к + y_к$, где $(x_к;\ y_к)$ — решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 2x^2 - y^2 = 46. \end{cases}$$

20. Решите систему уравнений и укажите наибольшую сумму $x_к + y_к$, где $(x_к;\ y_к)$ — решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 10, \\ x^2 - y^2 + x = 2. \end{cases}$$

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 12, \\ \dfrac{x}{y} + 8 \cdot \dfrac{y}{x} = 6. \end{cases}$$

22. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x-y} - \dfrac{4}{x+y} = 1, \\ \dfrac{6}{x-y} + \dfrac{12}{x+y} = 8. \end{cases}$$

23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 5)(y + 2) = 0, \\ x^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

24. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^4 - y^4 = 65? \end{cases}$$

Тема 4. НЕРАВЕНСТВА

Решение большинства неравенств сводится к решению соответствующих уравнений. Рассмотрим решение линейных и квадратных неравенств, а также специальный метод решения неравенств — метод интервалов.

В первой части экзаменационной работы обычно требуется решить неравенства без дополнительных условий. Во второй части часто приходится совершать алгебраические преобразования, выбирать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям, а также решать неравенства и системы неравенств с параметром.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Всякое значение неизвестного, при котором данное неравенство с неизвестным обращается в верное числовое неравенство, называется **решением неравенства. Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение. Неравенства вида $ax + b > 0 \,(< 0,\ \geq 0,\ \leq 0)$, где x — неизвестное, a и b — некоторые действительные числа ($a \neq 0$), называются неравенствами первой степени, или **линейными неравенствами.**

Определение. Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0\,(< 0,\ \geq 0,\ \leq 0),$$

где $a \neq 0$, называют неравенствами второй степени с одним неизвестным, или **квадратными неравенствами**.

Свойства числовых неравенств
(a, b, c — действительные числа)

1) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
2) Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

3) Если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$.

4) Если $a > b$ и c — отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Использование свойств числовых неравенств

Задание 1. Если $a < b$, то верно неравенство:

1) $-2b > -2a$

2) $a - 2 < b - 2$

3) $5 - a < 5 - b$

4) $\frac{a}{5} > \frac{b}{5}$

Решение.

Попытаемся получить из неравенства $a < b$ каждое из неравенств из вариантов 1), 2), 3), 4).

Так как $-2 < 0$, то из неравенства $a < b$ следует $-2a > -2b$ (свойство (4)). И неравенство из варианта 1) неверно.

Так как $a < b$, то по свойству (2) верно $a - 2 < b - 2$. И неравенство из варианта 2) **верно.**

Так как $a < b$, то $-a + 5 > -b + 5$ (свойства (4) и (2)). И неравенство из варианта 3) неверно.

Так как $\frac{1}{5} > 0$, то из неравенства $a < b$ следует неравенство $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$. И неравенство из варианта 4) неверно.

Ответ: 2.

Линейные неравенства

Задание 2. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$-x + 0{,}5(x + 4) < 4.$$

Решение.

Сначала раскроем скобки.

$$-x + 0{,}5x + 2 < 4.$$

При решении линейных неравенств обычно переносят неизвестные слагаемые в левую часть неравенства, а известные — в правую часть и приводят подобные слагаемые.

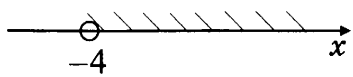
$$-0{,}5x < 2.$$

Чтобы выразить x, надо разделить обе части неравенства на $(-0{,}5)$. Знак неравенства меняется на противоположный.

$$-0{,}5x < 2$$

$$x > -4.$$

Отметим решение неравенства на координатной прямой.



Наименьшим целым решением является число (-3), а не (-4).

Ответ: -3.

Задание 3. Найдите число целых решений неравенства

$$-3 \le \frac{x}{4} - 1 < 1.$$

1) 14
2) 15
3) 16
4) 17

Решение.

Исходное неравенство называется двойным неравенством. Его можно решать разными способами.

1-й способ (непосредственно)

$$-3 \le \frac{x}{4} - 1 < 1$$

$$-3 + 1 \le \frac{x}{4} < 1 + 1$$

$$-2 < \frac{x}{4} < 2$$

$$-8 \le x < 8.$$

2-й способ (с помощью системы)

Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{4} - 1 \geq -3, \\ \frac{x}{4} - 1 < 1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство.

$$\frac{x}{4} \geq -3 + 1$$

$$\frac{x}{4} \geq -2$$

$$x \geq -8.$$

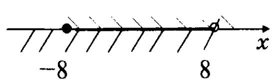
Решим второе неравенство.

$$\frac{x}{4} < 1 + 1$$

$$\frac{x}{4} < 2$$

$$x < 8.$$

Отметим решения и первого, и второго неравенства на координатной прямой.



Решением системы неравенств будет промежуток $[-8;\ 8)$.

Количество целых чисел, входящих в промежуток, равно 16.

Ответ: 3.

Квадратные неравенства

Решение квадратных неравенств

$$ax^2 + bx + c > 0 \ (< 0,\ \geq 0,\ \leq 0)$$

состоит из 5 этапов:

1. Вводим соответствующую функцию $y = ax^2 + bx + c$.

2. Определяем направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ (при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз).
3. Находим нули функции, т.е. решаем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Если уравнение имеет корни, то отмечаем корни на координатной прямой и схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей. Если уравнение не имеет корней, то схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей.
5. Находим решение неравенства с учетом смысла знака неравенства.

Решение квадратных неравенств, в зависимости от дискриминанта соответствующего квадратного уравнения, разбивается на 3 случая: 1) $D > 0$; 2) $D = 0$; 3) $D < 0$.

Рассмотрим первый случай: $D > 0$.

Задание 4. Решите неравенство $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Решение.

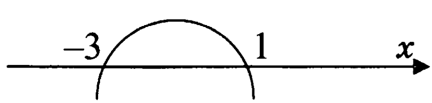
1. Пусть $y = -x^2 - 2x + 3$.

2. Так как $a = -1$, то ветви параболы направлены вниз.

3. Решим уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

Его корни: $x = 1$ и $x = -3$.

4. Отметим числа 1 и (-3) на координатной прямой и построим эскиз графика функции



5. Так как знак неравенства ($\geq$), то решением его будет отрезок $[-3; 1]$.

Ответ: $[-3; 1]$.

Рассмотрим случай, когда $D = 0$.

Задание 5. Решите неравенство: $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

Решение.

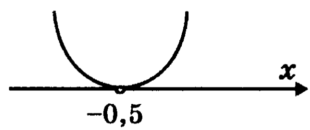
В соответствии со схемой решения квадратного неравенства получаем:

1. Пусть $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

2. $a = 4 > 0$, значит, ветви параболы $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ направлены вверх.

3. Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет совпавшие корни $x_1 = x_2 = -0{,}5$. Парабола касается оси абсцисс.

4.



5. Так как знак неравенства (>), то решением его являются все числа, кроме $x = -0{,}5$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}5) \cup (-0{,}5; +\infty)$.

Замечание: Решением неравенства $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$. Решением неравенства $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ является только число $-0{,}5$. Неравенство $4x^2 + 4x + 1 < 0$ решений не имеет.

Рассмотрим случай, когда $D < 0$.

Задание 6. Решите неравенство $-x^2 - 6x - 10 < 0$.

Решение.

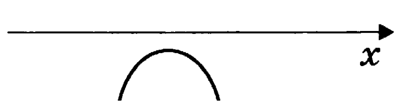
Имеем:

1) $f(x) = -x^2 - 6x - 10$;

2) ветви параболы направлены вниз (почему?);

3) уравнение $-x^2 - 6x - 10 = 0$ решений не имеет. Парабола не пересекает ось абсцисс и не касается ее.

4)



Так как знак неравенства (<), то решением его являются все числа.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Замечание: неравенство $-x^2 - 6x - 10 > 0$ решений не имеет.

Область определения выражения

> Значения переменной, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменной. Множество всех допустимых значений переменной называют **областью определения выражения**.

Задание 7. При каких значениях x имеет смысл следующее выражение:

1) $\sqrt{-x+6}$;

2) $\frac{1}{-x+6}$;

3) $\frac{\sqrt{-x+6}}{x-1}$.

Решение.

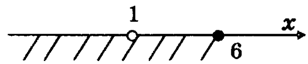
1) Так как выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$ (арифметический квадратный корень определен только для неотрицательных чисел), то решим неравенство $-x + 6 \geq 0$. Областью определения исходного выражения будет промежуток $(-\infty; 6]$.

2) Так как выражение $\frac{1}{a}$ имеет смысл при $a \neq 0$, то $-x + 6 \neq 0$ и $x \neq 6$. Областью определения исходного выражения будет объединение промежутков $(-\infty; 6)$ и $(6; +\infty)$.

3) Решим систему

$$\begin{cases} -x + 6 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Отметим решения системы на координатной прямой.



Областью определения исходного выражения будет объединение промежутков $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ 6]$.

Ответ: 1) $(-\infty;\ 6]$; 2) $(-\infty;\ 6)$ и $(6; +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ 6]$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Сколько целых чисел входит в промежуток $(-1;\ 5]$?

1) 6
2) 7
3) 5
4) 4

2. Число 5 является решением неравенства

1) $(2x-10)^2 < x^2 - 26$
2) $(2x-10)^2 < x^2 + 25$
3) $x^2 < 2x - 10$
4) $x^2 - 50 > (x-5)^2$

3. Решите неравенство $7x + 5 < 4x - 7$.

Ответ: ____________.

4. Решите неравенство $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} \le 1$.

Ответ: ____________.

5. Для любых значений x верно неравенство:

1) $(x-2)^2 < 0$
2) $(x+3)^2 > 0$
3) $x^2 < 2$
4) $x^2 - 10x + 25 \ge 0$

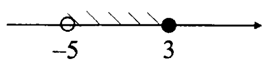
6. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение $\frac{3}{2\sqrt{x}}$?

1) $x \geq 0$
2) $x < 0$
3) $x > 0$
4) x — любое действительное число

7. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение $\frac{2\sqrt{x}}{5}$?

1) $x \geq 0$
2) $x \leq 0$
3) $x \neq 0$
4) x — любое действительное число

8. На рисунке изображен промежуток



1) $[-5; 3]$ 2) $(-5; 3]$ 3) $(-5; 3)$ 4) $[-5; 3)$

9. Если $a < b$, то для любых a и b верно неравенство:

1) $-5b > -5a$
2) $a^2 < b^2$
3) $2 - a < 2 - b$
4) $a + 4 < b + 4$

10. Если $a > m$, то для любых a и m верно неравенство:

1) $-3a > -3m$
2) $\frac{a}{m} > 1$
3) $3 - a < 3 - m$
4) $a - 3 < m - 3$

11. Если $2 < x < 5$, $4{,}5 < y < 6$, то значение выражения $x + y$ принадлежит промежутку:

1) $(7; 10{,}5)$ 2) $(6{,}5; 11)$ 3) $(9; 30)$ 4) $[7; 10{,}5]$

12. Решите двойное неравенство $-30 \leq 3 - 11y \leq -8$.

Ответ: ____________.

13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5x - 2 \geq -12, \\ 0{,}5x \leq 4. \end{cases}$$

Ответ: ____________.

14. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + 2 \geq 0, \\ x - 1 > 2x. \end{cases}$

Ответ: ____________.

15. Решите неравенство $(x+5)^2 \leq 25 - x^2$.

Ответ: ____________.

16. Решите неравенство $8x - 3x^2 + 3 \geq 0$.

Ответ: ____________.

17. Решите неравенство $x^2 - 10x + 25 > 0$.

Ответ: ____________.

18. Решите неравенство $x^2 - 10x + 25 \leq 0$.

Ответ: ____________.

19. Решите неравенство $x^2 - 10x + 26 < 0$.

Ответ: ____________.

Часть 2

20. Найдите наибольшее целое значение n, при котором разность $(3 - 2n) - (8 - 1{,}5n)$ положительна.

21. При каких значениях t выражение $3 - 2t$ принимает положительные значения, меньшие 2.

22. Укажите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{6} + \dfrac{x+3}{4} > 3, \\ -x - 2 < -3. \end{cases}$$

23. Укажите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 5x - 4(2x - 1) > 3(x + 2), \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

24. Найдите корень уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$, удовлетворяющий неравенству $-(x-1) < -(5x+3)$.

25. Решите неравенство:

$$(m-1)^2 + (m+1)^2 \geq 2(m-1)(m+1).$$

26. Найдите область определения выражения $\sqrt{1-x^2}$.

27. Найдите область определения выражения $\frac{\sqrt{1-x}}{x+5}$.

28. Найдите корень уравнения $\frac{x^2-3x+2}{x^2-9} = 0$, удовлетворяющий неравенству $-(5-2x) > -(6{,}5-3x)$.

29. При каком значении a решением неравенства $ax < 5$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$?

30. Укажите число целых решений неравенства $(2x-1)^2 - 3(2x-1) < 0$.

Тема 5. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

5.1. Уравнения прямой, параболы и гиперболы

В первой части работы чаще всего представлены задания, требующие установить соответствие между графиком функции и ее аналитическим заданием, т.е. формулой, задающей функцию. Среди графиков функций встречаются прямые, параболы и гиперболы.

Для выполнения заданий по этой теме из любой части работы полезно:

– знать уравнения прямых, парабол и гипербол;

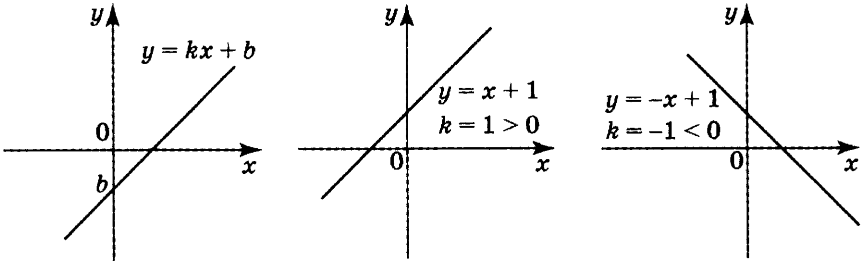
– знать геометрический смысл коэффициентов k и b для уравнения прямой $y = kx + b$ и коэффициентов a и c уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$;

– уметь находить координаты вершины параболы, точки пересечения прямых или прямой и параболы, точки пересечения параболы с осями;

– уметь проверять принадлежность некоторой точки прямой или параболе.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Графиком линейной функции является ***прямая***. Уравнение $y = kx + b$ является уравнением прямой, пересекающей ось Oy в точке, ордината которой равна b. Коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой.



Две прямые $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$ являются ***параллельными***, если их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны и $b_1 \neq b_2$. Например, прямые $y = 5x - 3$ и $y = 5x - 4$ параллельны.

Две прямые $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$ являются ***пересекающимися***, если $k_1 \neq k_2$. Например, прямые $y = 4x - 3$ и $y = 5x - 4$ пересекаются. Две пересекающиеся прямые имеют одну общую точку, координаты которой удовлетворяют каждому из уравнений прямых.

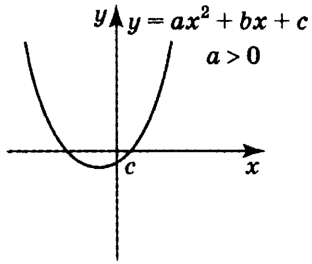
Точка лежит на прямой, если ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Например, точка $M(2;\ 7)$ лежит на прямой $y = 5x - 3$, так как координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $7 = 5 \cdot 2 - 3$.

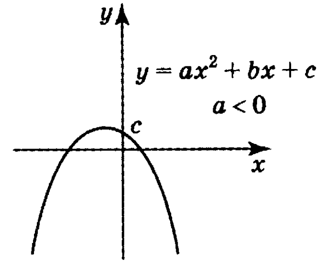
Если точка лежит на *оси абсцисс* (Ox), то ее ордината равна нулю ($y = 0$).

Если точка лежит на *оси ординат* (Oy), то ее абсцисса равна нулю ($x = 0$).

Для построения прямой достаточно знать координаты двух точек.

График квадратичной функции называется ***параболой***. Уравнение $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа и $a \neq 0$, является уравнением параболы, пересекающей ось Oy в точке, ордината которой равна c. Коэффициент a называется старшим коэффициентом. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.





Координаты вершины параболы ($x_в$; $y_в$) находят с помощью формул:

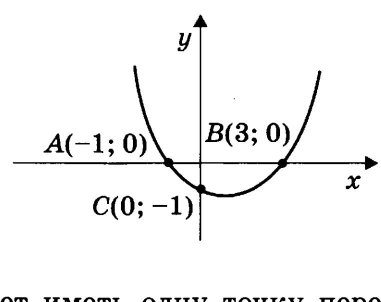
$$x_в = -\frac{b}{2a}, \quad y_в = ax_в^2 + bx_в + c.$$

Координаты точек пересечения параболы с осями находят с помощью следующих рассуждений.

Абсцисса точки пересечения параболы с **осью Oy** равна *нулю*, а ордината точки пересечения равна c (т.к. $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c, y = c$).

Ордината точки пересечения параболы с **осью Ox** равна *нулю*, а абсциссу точки пересечения можно найти, решив уравнение $0 = ax^2 + bx + c$.

На рисунке парабола пересекает ось OY в точке $C\,(0;\ -1)$, а ось OX в точках $A(-1;\ 0)$ и $B(3;\ 0)$.

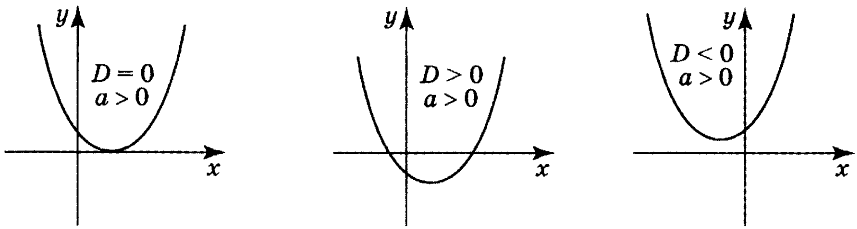


Парабола может иметь одну точку пересечения с осью Ox, может иметь две точки, а может не иметь таких точек. Определить количество точек пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью Ox можно с помощью исследования дискриминанта квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

– если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ равен нулю, то точка пересечения одна;

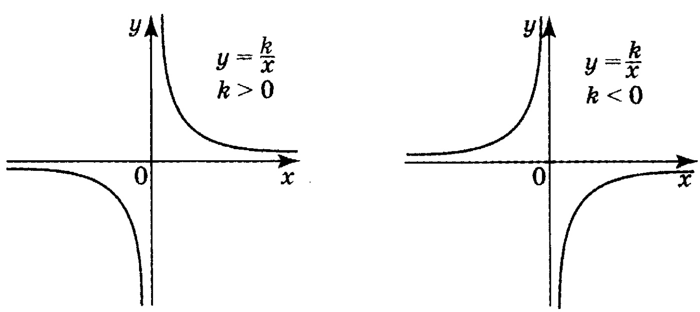
– если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ больше нуля, то точек пересечения две;

– если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ меньше нуля, то точек пересечения нет.



Для нахождения координат точек пересечения (или касания) прямой и параболы нужно решить в системе уравнения прямой и параболы (см., например, решение задания № 10).

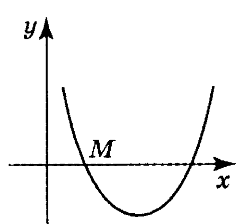
График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ называется ***гиперболой***. Число k — коэффициент, $k \neq 0$. В зависимости от знака коэффициента k гипербола будет располагаться либо в I и III квадранте, либо во II и IV квадранте.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Задание 1. На рисунке изображен график функции $y = 4x^2 - 19x + 12$. Укажите координату точки M.

1) (0,75; 0)
2) (4; 0)
3) (0; 4)
4) (0; 0,75)



Решение.

Точка M, координаты которой нужно найти, является точкой пересечения параболы с осью абсцисс. Ордината точки M равна 0, так как точка лежит на оси абсцисс. Абсциссу точки M можно найти из уравнения: $4x^2 - 19x + 12 = 0$, $x = 0{,}75$ или $x = 4$.

Так как точка M расположена на оси Ox левее другой точки пересечения параболы с осью, то абсцисса точки M меньше абсциссы другой точки пересечения: $x = 0{,}75$. Точка M имеет координаты $(0{,}75;\ 0)$.

Ответ: 1.

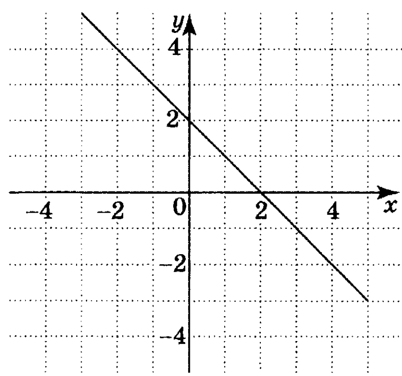
Задание 2. График какой функции изображен на рисунке?

1) $y = -x - 2$

2) $y = 2 - x$

3) $y = x - 2$

4) $y = x + 2$



Решение.

1-й способ. Прямая, являющаяся графиком функции, проходит через точки с координатами (2; 0) и (0; 2). Подставим эти координаты в общее уравнение прямой $y = kx + b$:

$$\begin{cases} 0 = 2k + b, \\ 2 = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} k = -1, \\ b = 2. \end{cases}$$

Получим уравнение прямой $y = -x + 2$.

2-й способ. Точки лежат на прямой, значит, их координаты (2; 0) и (0; 2) удовлетворяют уравнению этой прямой. Можно проверить принадлежность этих точек каждой из четырех прямых.

3-й способ. Прямая, изображенная на графике, получена сдвигом прямой $y = -x$ на две единицы вверх. Поэтому на графике — прямая $y = -x + 2$.

Ответ: 2.

Задание 3. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке (3; 0), а ось Oy в точке (0; 9). Запишите уравнение этой прямой. Проходит ли эта прямая через точку (−1; 11)?

Решение.

Если задана точка, лежащая на оси Oy, то коэффициент b известен и равен ординате точки, т.е. $b = 9$. Для того чтобы найти коэффициент k, нужно подставить координаты точки (3; 0) в уравнение $y = kx + 9$, $k = -3$.

Уравнение прямой можно найти и другим способом. Прямая проходит через две точки, поэтому их координаты (3; 0) и (0; 9) удовлетворяют уравнению прямой:

$$\begin{cases} 0 = 3k + b, \\ 9 = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} k = -3, \\ b = 9. \end{cases}$$

Уравнение прямой $y = -3x + 9$.

Прямая $y = -3x + 9$ не проходит через точку (−1; 11), так как ее координаты не удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, $11 \neq -3(-1)+9$.

Ответ: $y = -3x + 9$. Прямая не проходит через точку (−1; 11).

Задание 4. Парабола с вершиной в точке (−1; 2) проходит через точку с координатами (1; 8). В каких точках парабола пересекает ось абсцисс?

Решение.

Уравнению параболы удовлетворяют координаты двух заданных в условии точек:

$$\begin{cases} 2 = (-1)^2 a + b(-1) + c, \\ 8 = a + b + c; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = a - b + c, \\ 8 = a + b + c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = a - b + c, \\ 6 = 2b; \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3, \\ a + c = 5. \end{cases}$$

Точка $(-1;\ 2)$ является вершиной параболы, значит, по формуле координат вершины параболы

$$x_b = -\frac{b}{2a},\ -1 = -\frac{b}{2a},\ b = 2a.$$

Получили, что $b = 2a = 3$, значит $a = 1{,}5$.

Имеем $b = 3$, $a = 1{,}5$, коэффициент c найдем из второго уравнения системы $c = 3{,}5$. Уравнение параболы имеет вид $y = 1{,}5x^2 + 3x + 3{,}5$.

Для того чтобы определить, в каких точках парабола пересекает ось абсцисс, нужно решить уравнение

$$1{,}5x^2 + 3x + 3{,}5 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения меньше нуля, поэтому уравнение корней не имеет, следовательно, парабола не пересекает ось абсцисс.

Ответ: $y = 1{,}5x^2 + 3x + 3{,}5$; пересечений с осью Ox нет.

Задание 5. При каком значении параметра k парабола $y = 4x^2 + 12x + k$ касается оси абсцисс?

Решение.

1-й способ. Найдем абсциссу точки касания. Так как касание возможно только в вершине, то найдем абсциссу вершины: $x_a = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$.

Вершина параболы лежит на оси абсцисс, поэтому ордината вершины равна нулю:

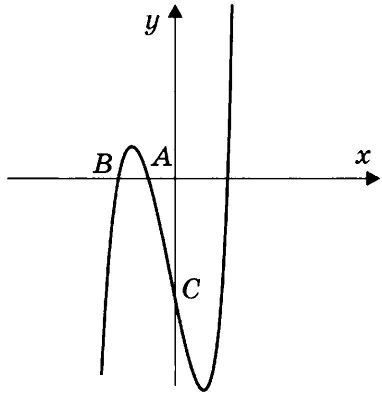
$$0 = 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + k.$$

Отсюда найдем k; $k = 9$.

2-й способ. По условию парабола с осью абсцисс имеет только одну общую точку. Это возможно только в том случае, если дискриминант квадратного уравнения $4x^2 + 12x + k = 0$ равен нулю. Так как $D = 144 - 16k = 0$, то $k = 9$.

Ответ: 9.

Задание 6. На рисунке изображен график функции $y = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Найдите координаты точек A, B, и C.



Решение.

Точки A и B являются точками пересечения графика функции с осью Ox. Для того чтобы найти их координаты, решим уравнение:

$$x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0,\ \ x^2(x+1) - 5(x+1) = 0,$$

$$(x^2 - 5)(x+1) = 0.$$

Решениями уравнения являются числа $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ и -1. Все эти числа являются абсциссами точек пересечения графика функции с осью Ox. Так как $-\sqrt{5} < -1$, то точка B имеет координаты $\left(-\sqrt{5};\ 0\right)$, точка A имеет координаты $(-1;\ 0)$.

Координаты точки C найти проще: абсцисса равна нулю, а ордината равна $y(0) = -5$.

Ответ: $A\ (-1;\ 0)$, $B\,(-\sqrt{5};\ 0)$, $C\,(0;\ -5)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Установите соответствие между функциями и их графиками. Функции заданы формулами:

а) $y = \dfrac{-4}{x}$; б) $y = -4x^2 - x$; в) $y = -4x - 1$.

1) парабола; 2) гипербола; 3) прямая.

Ответ: ____________.

2. Графику функции $y = -\frac{5}{x}$ принадлежит точка

1) $(0;\ 1)$
2) $(10;\ -2)$
3) $(-10;\ 0{,}2)$
4) $(25;\ -\frac{1}{5})$

3. Графику функции $y = \frac{3}{x}$ принадлежит точка

1) $(0;\ 3)$
2) $(-10;\ 0{,}3)$
3) $(-10;\ -0{,}3)$
4) $(18;\ \frac{1}{9})$

4. Графику функции $y = -\frac{7}{x}$ принадлежит точка

1) $(0;\ -7)$
2) $\left(49;\ \frac{1}{7}\right)$
3) $(-10;\ 0{,}7)$
4) $(14;\ 2)$

5. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если ему принадлежит точка $(-2;\ -5)$?

1) III 2) I и III 3) I и II 4) III и IV

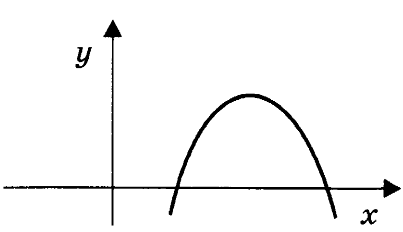
6. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если ему принадлежит точка $(-5;\ 2)$?

1) III 2) II и III 3) II и IV 4) I и IV

7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если ему принадлежит точка $(2;\ -5)$?

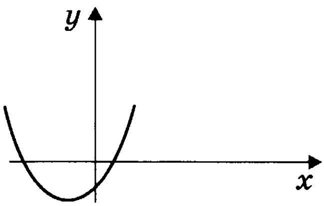
1) I 2) I и IV 3) II и IV 4) III и IV

8. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a и c.



1) $a < 0$ и $c < 0$
2) $a < 0$ и $c > 0$
3) $a > 0$ и $c < 0$
4) $a > 0$ и $c > 0$

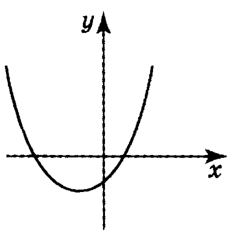
9. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a и c.



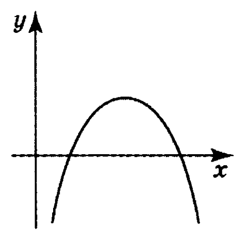
1) $a < 0$ и $c < 0$
2) $a < 0$ и $c > 0$
3) $a > 0$ и $c < 0$
4) $a > 0$ и $c > 0$

10. На каком из рисунков изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что $a < 0$ и квадратный трехчлен имеет корни разных знаков?

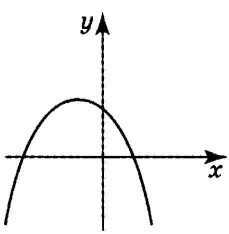
1)



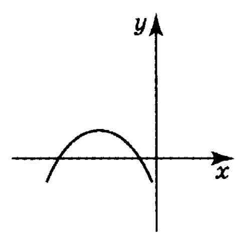
3)



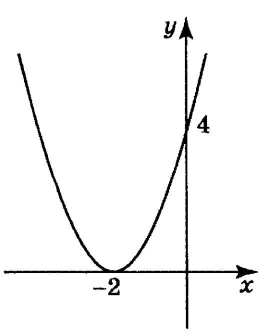
2)



4)



11. На рисунке изображена парабола. Графиком какой из функций она является?

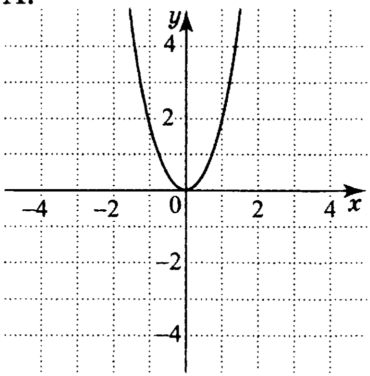


1) $y = (x + 2)^2$
2) $y = x^2 - 2$
3) $y = (x - 2)^2$
4) $y = (x + 2)^2 + 2$

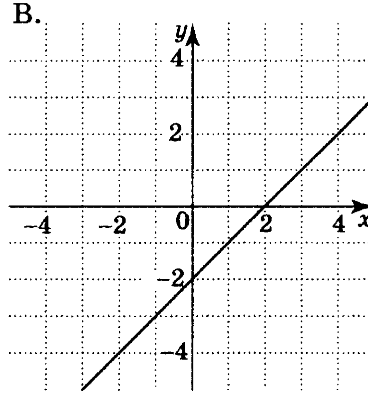
12. Установите соответствие между функциями и их графиками.

1) $y = \frac{2}{x}$ 2) $y = 2x^2$ 3) $y = x - 2$ 4) $y = 2x$

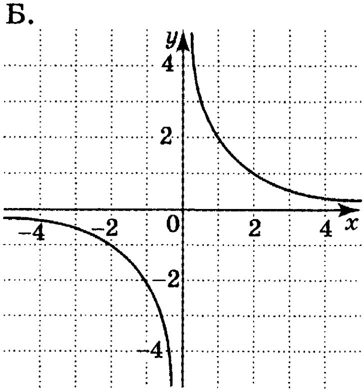
А.



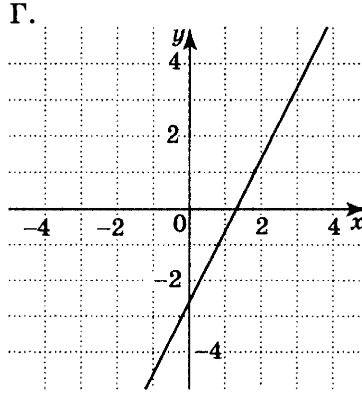
В.



Б.



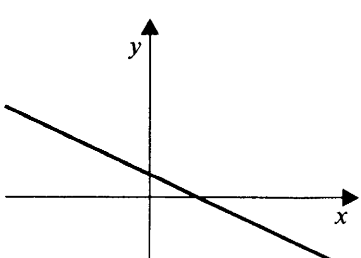
Г.



Ответ:

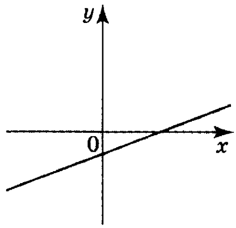
А	Б	В	Г

13. По графику линейной функции $y = kx + b$ определите знаки коэффициентов k и b.



1) $k < 0$ и $b < 0$
2) $k < 0$ и $b > 0$
3) $k > 0$ и $b < 0$
4) $k > 0$ и $b > 0$

14. По графику линейной функции $y = kx + b$ определите знаки коэффициентов k и b.



1) $k < 0$ и $b < 0$
2) $k < 0$ и $b > 0$
3) $k > 0$ и $b < 0$
4) $k > 0$ и $b > 0$

15. Графики функций $y = 5x - 7$ и $y = 2x - 1$ пересекаются в точке

1) (2; 3)
2) (−2; 3)
3) (3; −2)
4) (−3; −2)

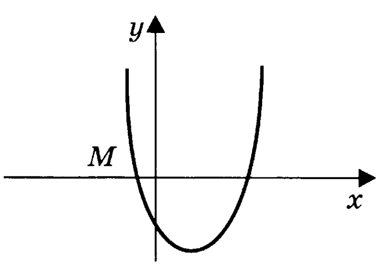
16. Графики функций $y = 12x - 5$ и $y = 3x + 4$ пересекаются в точке

1) (−7; 1)
2) (7; −1)
3) (1; 7)
4) (7; 1)

17. На рисунке изображен график функции

$$y = x^2 - 3x - 4.$$

Укажите координату точки M.



1) (0; −1)
2) (0; 1)
3) (1; 0)
4) (−1; 0)

Часть 2

18. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке (−2; 0), а ось Oy в точке (0; 6). Запишите уравнение этой прямой. Проходит ли эта прямая через точку (1; 9)?

19. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке (4; 0), а ось Oy в точке с ординатой −1. Запишите уравнение этой прямой. В какой координатной четверти нет точек этой прямой?

20. При каком значении k парабола $y = 2x^2 + 3x + k$ касается оси абсцисс?

21. При каком значении m парабола $y = 2x^2 - 4x + m$ касается оси абсцисс?

22. При каком значении k парабола $y = -5x^2 + 4x + k$ касается оси абсцисс? Найдите точку касания.

23. Прямая $y = -9x$ пересекает параболу $y = x^2 - 10$ в двух точках. Выясните координаты точки B, если известно, что она лежит ниже оси абсцисс.

24. Проходят ли через одну точку прямые $y = 8 - 2x$, $y = 2x$, $y = 3x - 2$.

5.2. Уравнение окружности

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение окружности с центром в начале координат O (0; 0) и радиусом R имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности с центром в точке A $(a;\ b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Задание 1. Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 8$. Укажите радиус этой окружности.

1) 8 2) 4 3) 2 4) $2\sqrt{2}$

Решение.

По условию задано уравнение окружности, с центром в начале координат. В соответствии с общим видом уравнения такой окружности получаем, что $R^2 = 8$. Так как значение радиуса окружности всегда положительно, то $R = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: 4.

Задание 2. Уравнение окружности имеет вид

$$(x+9)^2+(y-2)^2=16.$$

Определите координаты центра окружности.

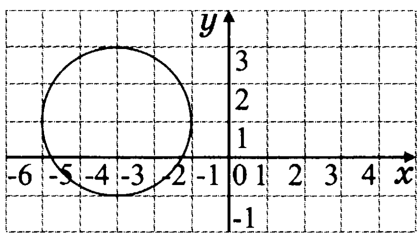
1) $(9;\ -2)$ 2) $(-9;\ 2)$ 3) $(9;\ 4)$ 4) $(3;\ 2)$

Решение.

Сравним уравнение окружности с центром в точке A $(a;\ b)$ и радиусом R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ с уравнением, заданным по условию $(x+9)^2+(y-2)^2=16$. Получим, что $a=-9$, $b=2$, тогда координаты центра окружности $(-9;\ 2)$.

Ответ: 2.

Задание 3. На рисунке изображена окружность. Запишите ее уравнение.



Решение.

Для того чтобы записать уравнение окружности, нужно знать координаты центра окружности $A(a;\ b)$ и радиус окружности R. Из чертежа центр окружности имеет координаты $(-3;\ 1)$, а $R=2$. Теперь подставим найденные значения в уравнение окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Получим $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

Ответ: $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

Задание 4. Окружность задана уравнением

$$x^2+y^2+2x-8y-8=0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

Решение.

Преобразуем данное уравнение, выделив в каждой скобке полный квадрат:

$$(x^2+2x)+(y^2-8y)-8=0,$$

$$(x^2+2x+1)+(y^2-8y+16)-8-1-16=0.$$

Получим $(x+1)^2+(y-4)^2=25$. Из последнего уравнения находим радиус окружности: $R^2=25$, $R=5$. Центр окружности — точка $(-1;\ 4)$.

Ответ: центр окружности — точка $(-1;\ 4)$, радиус $R=5$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Часть 1

1. Уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=16$. Определите координаты центра окружности.

Ответ:______________.

2. Уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=4$. Определите радиус окружности.

1) 8 2) 2 3) 4 4) 16

3. Уравнение окружности имеет вид

$$(x+1)^2+(y+3)^2=4.$$

Определите координаты центра окружности.

1) $(-1;3)$ 2) $(1;3)$ 3) $(-1;\ -3)$ 4) $(1;\ -3)$

4. Уравнение окружности имеет вид

$$(x-1)^2+(y+3)^2=4.$$

Определите координаты центра окружности.

1) $(-1;\ 3)$ 2) $(3;\ 1)$ 3) $(-1;\ -3)$ 4) $(1;\ -3)$

5. Уравнение окружности имеет вид

$$(x+4)^2+(y-9)^2=1.$$

Определите координаты центра окружности.

1) $(-4;9)$ 2) $(2;\ -3)$ 3) $(-2;\ 3)$ 4) $(9;1)$

6. Уравнение окружности имеет вид

$$(x-1)^2+(y-2)^2=12.$$

Определите радиус окружности.

1) 12 2) 6 3) $4\sqrt{3}$ 4) $2\sqrt{3}$

7. Уравнение окружности имеет вид

$$(x-9)^2+(y-4)^2=1.$$

Определите радиус окружности.

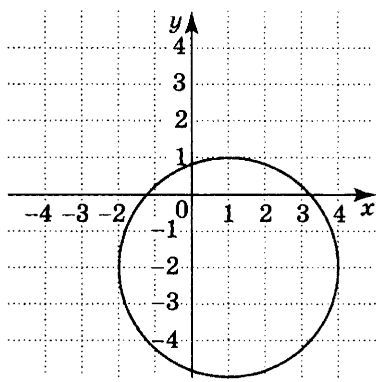
1) 3 2) 2 3) 1 4) 0,5

8. Уравнение окружности имеет вид

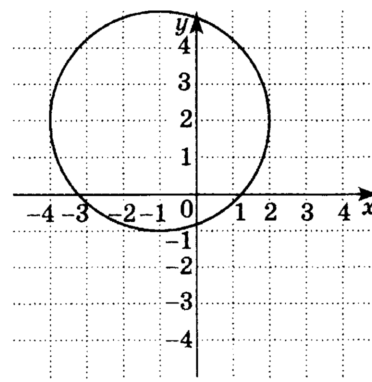
$$(x-1)^2+(y-2)^2=9.$$

Укажите рисунок, на котором изображена эта окружность.

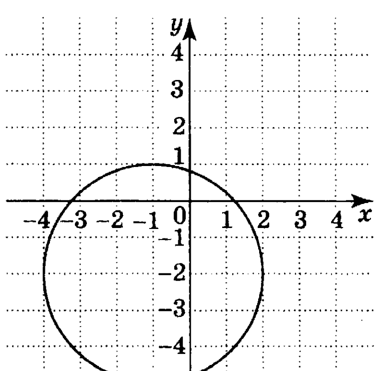
1)



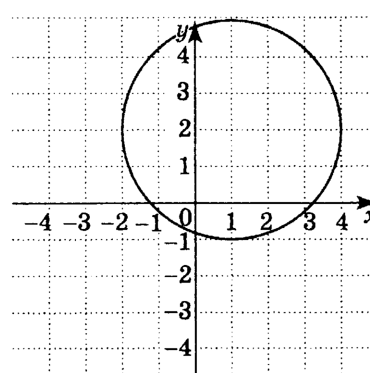
3)



2)

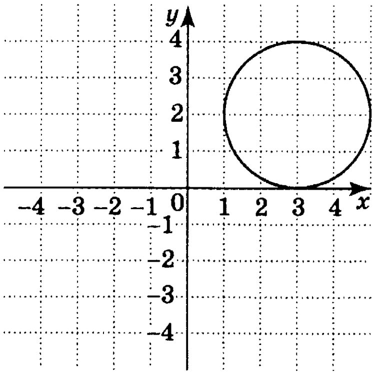


4)

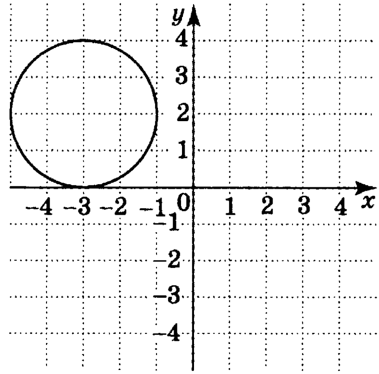


9. Уравнение окружности имеет вид $(x+3)^2+(y-2)^2=4$. Укажите рисунок, на котором изображена эта окружность.

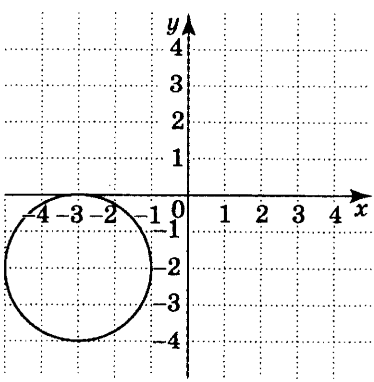
1)



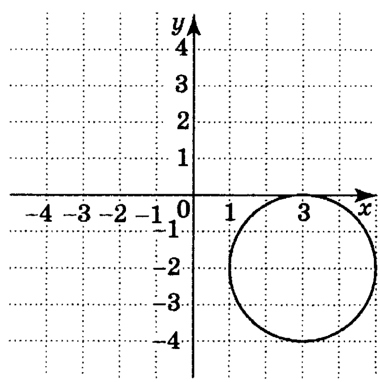
3)



2)

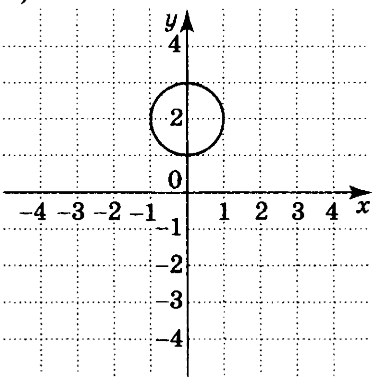


4)

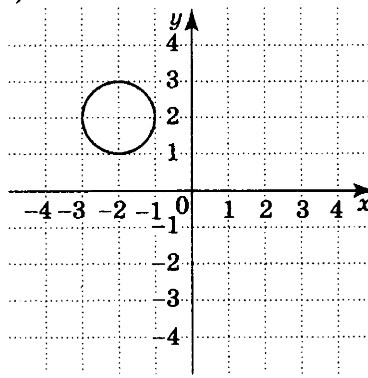


10. Уравнение окружности имеет вид $(x + 2)^2 + y^2 = 1$. Укажите рисунок, на котором изображена эта окружность.

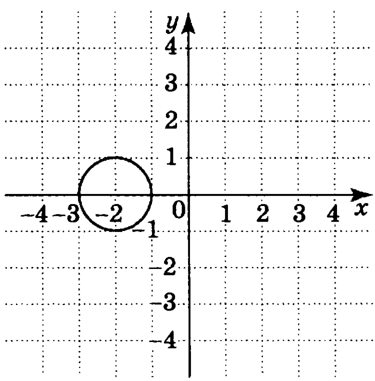
1)



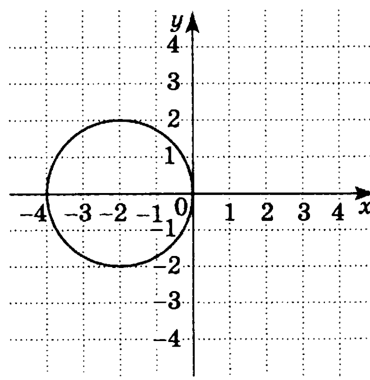
3)



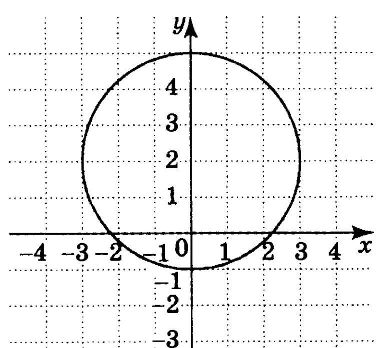
2)



4)

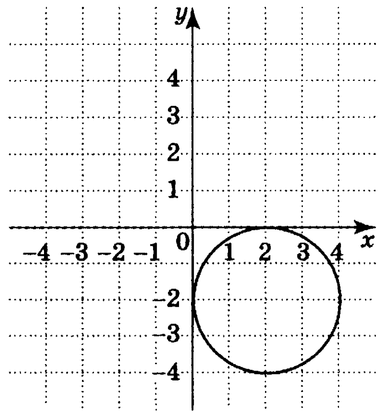


11. На рисунке изображена окружность. Запишите уравнение этой окружности.



Ответ: ____________.

12. На рисунке изображена окружность. Запишите уравнение этой окружности.



Ответ: ______________.

Часть 2

13. Постройте окружность, заданную уравнением

$$121 - x^2 - y^2 = 0.$$

14. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

15. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

16. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

Тема 6. ФУНКЦИИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

$D(y)$ — область определения функции y — множество, на котором задается функция. При графическом способе задания функции ее область определения может считываться по графику. Для нахождения области определения надо спроектировать все точки графика функции на ось Ox. Если функция задана аналитически (формулой) и ее область определения не указана, то это означает, что функция задается на естественной области определения.

$E(y)$ — множество значений (область значений) функции y, которые она принимает при всех значениях аргумента из ее области определения. Проще всего находить множество значений функции, если задан ее график. В этом случае надо спроектировать все точки графика функции на ось Oy. Получившееся множество точек будет множеством значений функции. Это множество может задаваться конечным числом точек, состоять из одного или нескольких промежутков.

Нули функции. Для функции $f(x)$, заданной графически, — это абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось абсцисс или касается ее. Чтобы найти нули функции, заданной аналитически, надо решить уравнение $f(x) = 0$.

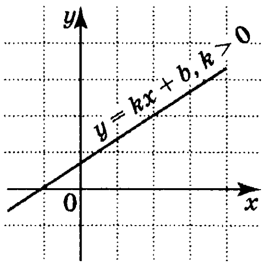
Функция $f(x)$ возрастает на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из множества X, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Иными словами, функция называется *возрастающей* на множестве X, если для любых двух значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

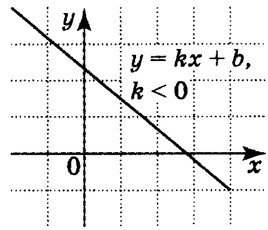
Функция $f(x)$ убывает на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из множества X, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Иными словами, функция называется *убывающей* на множестве X, если для любых двух значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Свойства линейной функции $y = kx + b, k \in R, b \in R$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.
2) Область значений: $E(y) = (-\infty;+\infty)$, если $k \neq 0$. $E(y) = \{b\}$, если $k = 0$.
3) Монотонность:

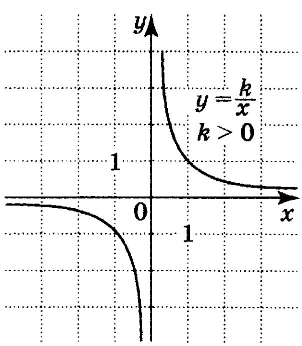
– если $k > 0$, то функция y возрастает на всей области определения;
– если $k < 0$, то функция y убывает на всей области определения.

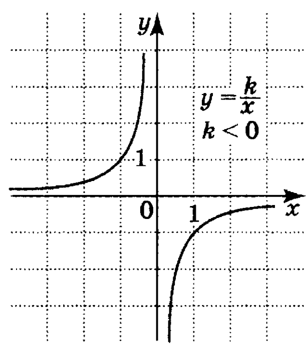




Свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
2) Область значений: $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
3) Монотонность:
– если $k > 0$, то функция y убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$ и на промежутке $(-\infty;\ 0)$;
– если $k < 0$, то функция y возрастает на промежутке $(0;\ +\infty)$ и на промежутке $(-\infty;\ 0)$.





Свойства дробно-рациональной функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x

1) Область определения $D(y)$ — любые действительные x, не обращающие знаменатель $Q(x)$ в нуль.

2) Множество значений $E(y)$ зависит от конкретной функции.

Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$
$a \in R, b \in R, c \in R$ — коэффициенты, $a \neq 0$

1) Область определения $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

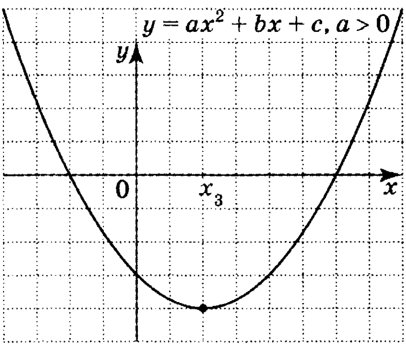
2) График квадратного трехчлена — парабола с вершиной в точке с абсциссой $x_в = -\dfrac{b}{2a}$,

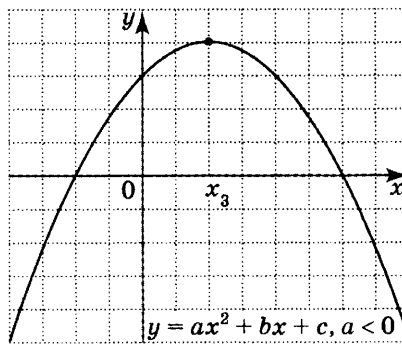
направленная ветвями вверх, если $a > 0$;

направленная ветвями вниз, если $a < 0$.

3) Множество значений: $E(y) = [y_в;\ +\infty)$, если $a > 0$;

$E(y) = (-\infty;\ y_в]$, если $a < 0$, $y_в$ — ордината вершины параболы.



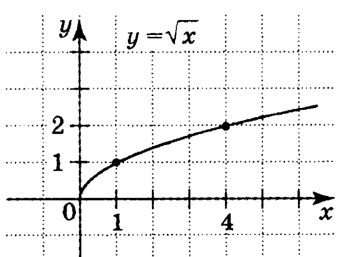


Свойства функции $y = \sqrt{x}$

1) Область определения $D(y) = [0;\ +\infty)$.

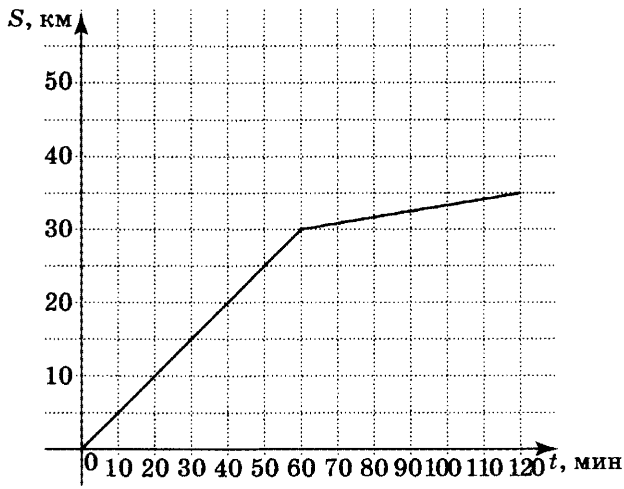
2) Множество значений $E(y) = [0;\ +\infty)$.

3) Монотонность: функция у возрастает на всей области определения.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Задание 1. График описывает движение парусной яхты, которая первую часть пути прошла под парусом. Спустив парус, она продолжила движение.



1) Найдите скорость яхты «под парусом» и «без паруса» (выразив ее в км/ч).

2) На каком расстоянии от начала движения находилась яхта через 50 минут, через 2 часа?

3) Сколько времени потребуется яхте на обратный путь, если она будет двигаться с той же скоростью, что и на первом участке «под парусом»?

Решение.

1) Под парусом яхта прошла 30 км за 60 мин, т.е. за 1 ч, значит ее скорость была $v = \frac{s}{t} = 30$ км/ч. Без паруса яхта прошла 5 км за 60 мин, значит ее скорость была 5 км/ч.

Ответ: скорость яхты «под парусом» 30 км/ч, скорость яхты «без паруса» 5 км/ч.

2) На графике найдем точку с абсциссой, равной 50. Найдем ординату этой точки. Она равна 25. Получили, что за 50 мин яхта пройдет 25 км. Аналогично, за 120 мин — 35 км.

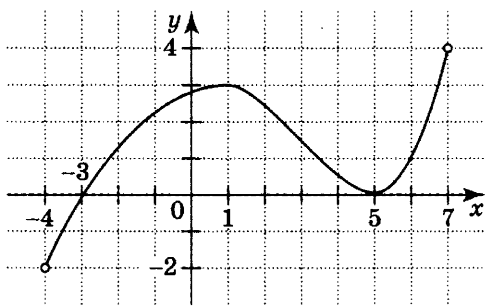
Ответ: 25 км, 35 км.

3) Обратный путь составляет 35 км. Скорость яхты 30 км/ч.

Найдем время обратного пути: $t = \frac{s}{v} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$ ч, что составляет 1 час 10 минут.

Ответ: 1 ч 10 мин.

Задание 2. Функция задана графиком.



Укажите:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) промежутки, на которых функция принимает только положительные значения;

г) нули функции;

д) промежутки возрастания функции.

Решение.

а) Для того чтобы найти область определения функции, заданной графически, надо спроектировать все точки графика на ось Ox. Полученный промежуток и будет областью определения функции $D(y) = (-4;\ 7)$.

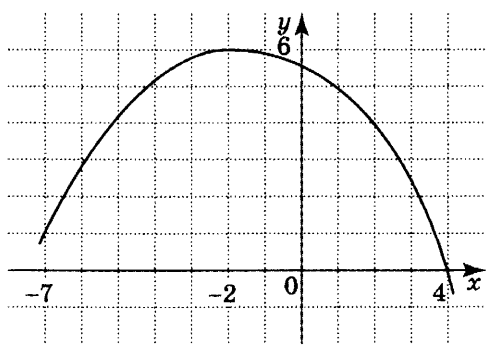
б) Для того чтобы найти множество значений функции, заданной графически, надо спроектировать все точки графика на ось Oy. Полученный промежуток и будет множеством значений функции $E(y) = (-2;\ 4)$.

в) Надо найти те промежутки оси Ox, на которых график функции расположен выше оси Ox. Положительные значения функция принимает на промежутке $(-3;\ 5)$ и на промежутке $(5;\ 7)$. В точке $x = 5$ функция обращается в нуль.

г) Надо найти те точки, в которых график функции пересекает ось Ox или касается ее. Нулями функции будут 5 и -3.

д) Для определения промежутков возрастания функции можно воспользоваться определением, но для того чтобы прочитать график, достаточно знать графическую интерпретацию возрастания функции на промежутке: график функции «поднимается вверх». Получаем, что функция возрастает на промежутке $(-4;\ 1]$ и на промежутке $[5;\ 7)$.

Задание 3. Используя график функции $y = f(x)$, определите, какое утверждение верно.



1) Нулями функции являются числа $-7;\ -2;\ 4$.
2) Функция убывает на промежутке $[-2;\ +\infty)$.
3) $f(x) < 0$ при $-7 < x < 0$.
4) $f(0) = 4$.

Решение.

Нулями функции являются числа -7 и 4.

$f(-2) = 6 \neq 0$, поэтому $x = -2$ не является нулем функции. $f(0)>0$.

Функция принимает положительные значения ($f(x) > 0$), т.е. график функции расположен выше оси абсцисс, при $-7 < x < 4$.

Функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ -2]$. Функция убывает на промежутке $[-2;\ +\infty)$.

Ответ: 2.

Задание 4. Постройте график функции $y = \frac{2}{3}x + 2$.

а) При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

б) Какова область ее значений?

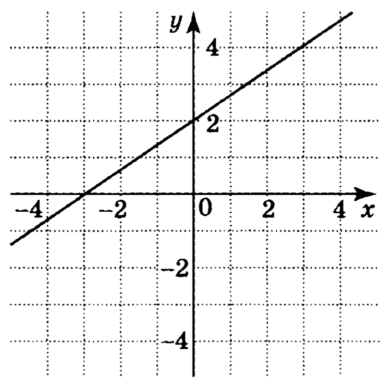
в) Какие значения принимает функция, если $-3 \le x \le 1{,}5$?

г) Найдите координаты точки пересечения графика с осями.

Решение.

Построим график функции и с помощью его ответим на вопросы. Графиком линейной функции является прямая. Для построения прямой достаточно знать координаты любых двух точек, принадлежащих этой прямой. Найдем их.

x	-3	3
y	0	4



Ответим на вопросы:

а) Функция принимает положительные значения ($y > 0$). Графически это можно определить следующим образом:

– выше оси абсцисс находится та часть прямой, ординаты точек которой больше нуля;

– найдем абсциссы этих точек: $(-3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-3;\ +\infty)$.

б) Функция может принимать любые значения, поэтому область значений $(-\infty;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

в) $y(-3) = 0$, $y(1{,}5) = 3$.

Если $-3 \le x \le 1{,}5$, то $0 \le y \le 3$.

Ответ: $[0;\ 3]$.

г) Точка пересечения с осью абсцисс уже найдена: $(-3;\ 0)$. Точку пересечения с осью ординат найдем по графику: $(0;\ 2)$.

Ответ: $(-3;\ 0)$ — точка пересечения с осью абсцисс и $(0;\ 2)$ — точка пересечения с осью ординат.

Задание 5. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 5$.

а) При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

б) Укажите наименьшее значение функции.

в) Какова область ее значений?

г) Найдите координаты точек пересечения графика с осью Ox.

д) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

е) Какие значения принимает функция, если $0 \le x \le 4$?

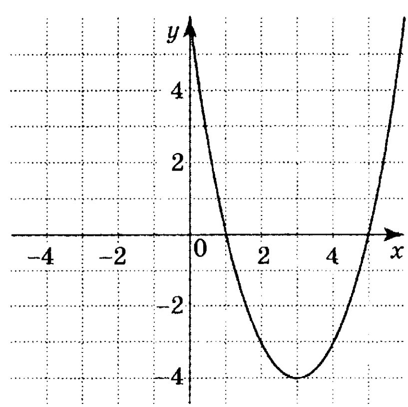
Решение.

Построим график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Графиком квадратичной функции является парабола. Для ее построения найдем координаты вершины параболы и точки пересечения с осями координат.

$x_в = -\dfrac{b}{2a} = 3$, $y_в = y(3) = -4$. Ветви параболы направлены вверх, координаты вершины $(3;-4)$.

Найдем точки пересечения с осями координат:

x	0	1	5
y	5	0	0



а) Выше оси абсцисс ($y > 0$) находятся точки графика с абсциссами больше 5 или меньше 1.

Ответ: $(-\infty;\ 1)$ и $(5;\ +\infty)$;

б) Наименьшее значение функции $y = -4$ функция принимает в своей вершине.

Ответ: -4 — наименьшее значение функции;

в) Функция может принимать все значения, большие, чем значение в своей вершине.

Ответ: $[-4; +\infty)$.

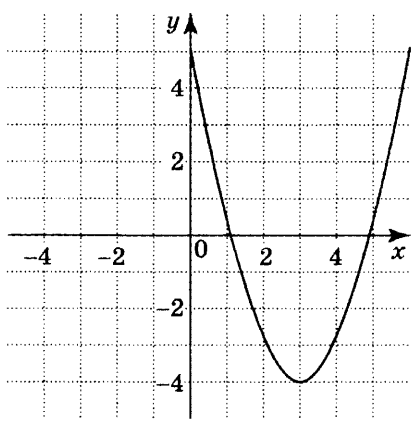
г) Точек пересечения с осью Ox две. Их координаты $(1; 0)$ и $(5; 0)$.

Ответ: $(1; 0)$ и $(5; 0)$.

д) Правее абсциссы вершины функция возрастает, а левее — убывает.

Ответ: промежуток возрастания функции $[3; +\infty)$, промежуток убывания функции $(-\infty; 3]$.

е) Изобразим график функции $y = x^2 - 6x + 5$, если $0 \leq x \leq 4$.



Для того чтобы найти значения функции, можно найти ординаты всех точек получившегося графика. Спроектируем точки графика на ось ординат, получим отрезок $[-4; 5]$.

Ответ: $[-4; 5]$.

Замечание. Обратите внимание на то, что для нахождения области значений ***недостаточно*** было найти значения функции на концах промежутка [0; 4]: $y(0) = 5$, $y(4) = -3$. Функция убывает на промежутке [0; 3] и возрастает на промежутке [3; 4], поэтому на промежутке [2; 4] принимает значения меньше -3.

Задание 6. Постройте график функции $y = \frac{x^2-9}{9-3x}$. Найдите ее область значений.

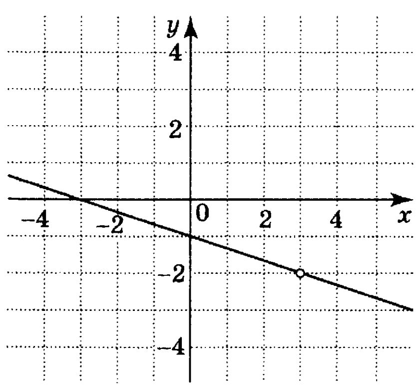
Решение.

После преобразований получим $\begin{cases} y = -\frac{x}{3} - 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Построим график линейной функции с выколотой точкой. Графиком линейной функции является прямая. Для ее построения найдем координаты двух точек, принадлежащих прямой.

x	0	-3
y	-1	0

Построим прямую и «выколем» точку, которая не принадлежит прямой. Координаты этой точки $(3;\ -2)$.



Областью значений функции являются два промежутка $(-\infty;\ -2)$ и $(-2;\ +\infty)$.

Ответ: область значений — множество всех чисел, кроме -2.

Задание 7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 15, \ |x| \le 3, \\ -x + 3, \ x > 3, \\ -4x - 24, \ x < -3. \end{cases}$$

а) При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

б) Какова область ее значений? Найдите значение функции при $x = 5$.

в) При каких значениях x выполняется неравенство

$$y \le -12?$$

г) Найдите координаты точек пересечения графика с осью Ox и осью Oy.

д) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

Решение.

Построим график кусочно заданной функции. Для этого на каждом из трех заданных интервалов построим заданную на нем функцию.

1) На интервале $-3 \le x \le 3$ построим график функции $y = x^2 + 2x - 15$. Графиком этой функции является парабола.

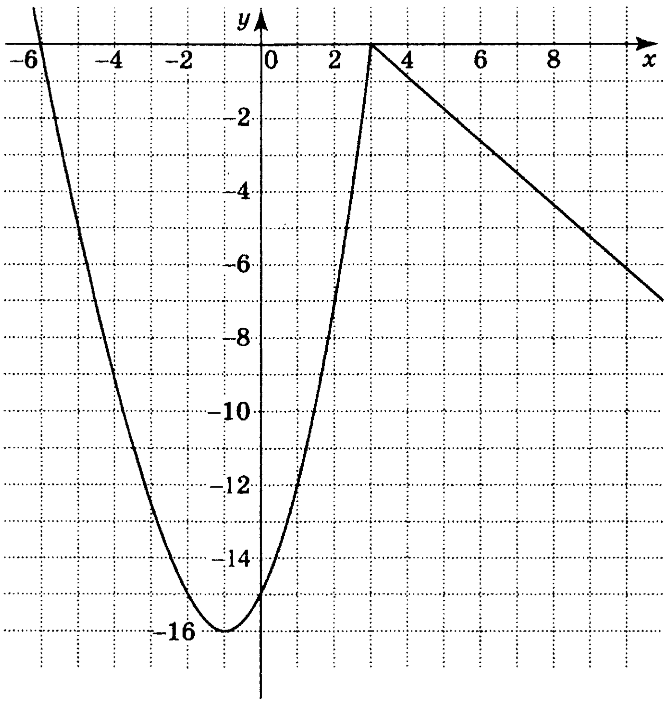
Найдем ее вершину. $x_в = -1$, $y_в = -16$. Одна точка пересечения графика с осью Ox (3; 0) принадлежит интервалу, другая — (−5; 0) не принадлежит ему.

2) На интервале $x > 3$ построим график функции $y = -x + 3$. Для построения прямой, являющейся графиком этой функции, достаточно знать координаты двух точек.

x	4	5
y	−1	−2

3) На интервале $x < -3$ построим график функции $y = -4x - 24$. Для построения прямой, являющейся графиком этой функции, достаточно знать координаты двух точек.

x	−4	−6
y	−8	0



По графику ответим на дополнительные вопросы.

а) Функция принимает положительные значения при $x < -6$.

б) Функция может принимать любые значения. Область значений функции $(-\infty; +\infty)$. $Y(5) = -2$.

в) $y \le -12$ при $-3 \le x \le 1$, а также ординаты точек прямой $y = -x + 3$ могут быть меньше или равны -12. Найдем абсциссы этих точек: $-x + 3 \le -12$, $x \ge 15$.

Ответ: на двух промежутках $[-3; 1]$ и $[15; +\infty)$.

г) Точки пересечения графика функции с осью Ox: $(-6; 0)$, $(3; 0)$.

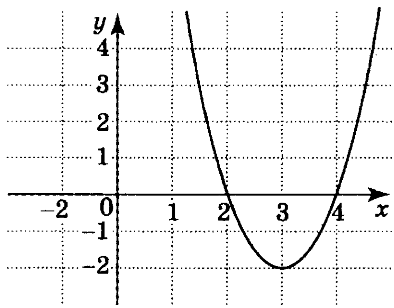
Точка пересечения графика функции с осью Oy: $(0; -15)$.

д) Функция возрастает при $-1 \le x \le 3$. Функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$ и на промежутке $[3; +\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Функция задана графиком.



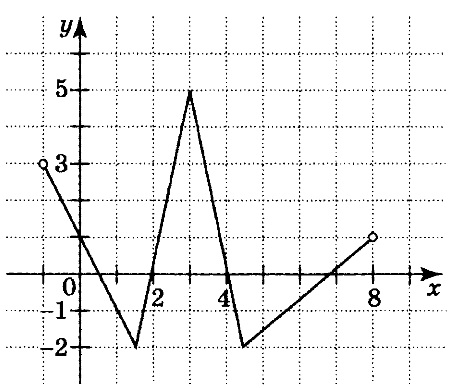
а) Укажите область определения этой функции.

1) $(-\infty;+\infty)$
2) $[2;\ 4]$
3) $[-2;\ +\infty)$
4) $(-\infty;2)\cup(4;\ +\infty)$

б) Укажите область значений этой функции.

1) $(-\infty;\ +\infty)$
2) $[2;\ 4]$
3) $[-2;+\infty)$
4) $(-\infty;\ 2)\cup(4;+\infty)$

2. Функция задана графиком.



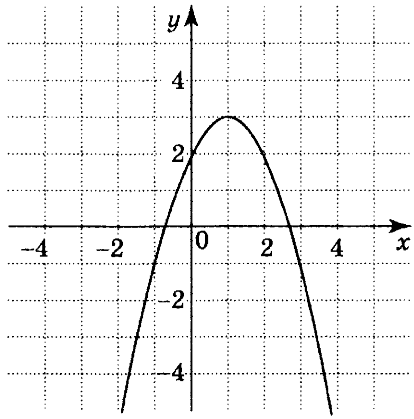
а) Укажите область определения этой функции.

1) $[-2;\ 5]$ 2) $(3;\ 1)$ 3) $(-1;\ 8)$ 4) $[0;\ 8)$

б) Укажите область значений этой функции.

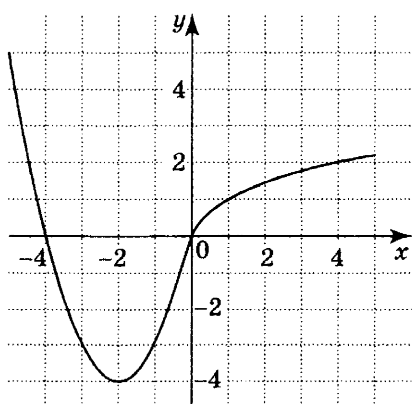
1) $[-2;\ 5]$ 2) $(3;\ 1)$ 3) $(-1;\ 8)$ 4) $[0;\ 8)$

3. Используя график функции $y = f(x)$, определите, какое утверждение верно.



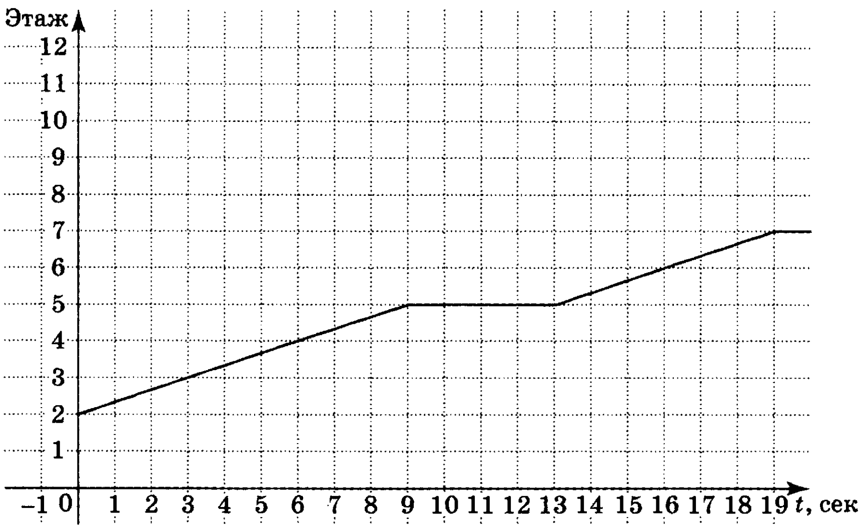
1) $f(3) = -1$.
2) Функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.
3) Наибольшее значение функция принимает при $x = 3$.
4) $f(-1) = 1$.

4. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Из приведенных утверждений выберите верное.



1) Наименьшее значение функции $y=f(x)$ равно -2.
2) Функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$.
3) $f(-1) > f(-4)$.
4) $f(x) < 0$ при $x < 0$.

5. Лифт поднимался со второго этажа и останавливался на требуемых этажах.



1) На высоте какого этажа окажется лифт через 12 секунд от начала движения?

Ответ: ______________.

2) На сколько этажей поднялся лифт за все время движения?

Ответ: ______________.

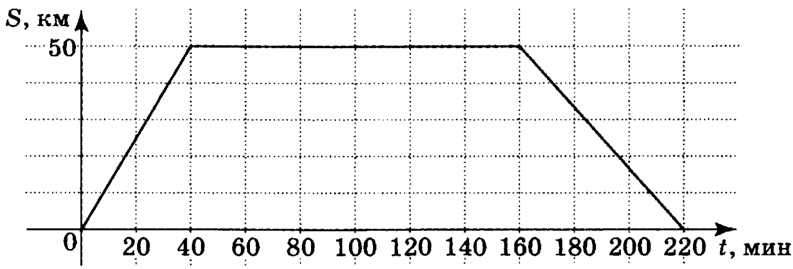
3) Какова скорость лифта, если высота этажа 3 метра?

Ответ: ______________.

4) Между какими этажами будет лифт через 14 секунд?

Ответ: ______________.

6. Грузовая машина отправилась из магазина на склад и вернулась обратно. На складе под загрузкой она провела 2 часа. График описывает зависимость пройденного машиной пути (s, км/ч) от времени пути (t, мин).



1) Найдите скорость машины при движении из магазина на склад и обратно.

Ответ: ______________.

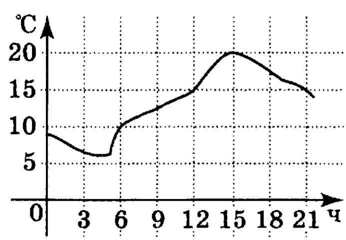
2) На сколько минут больше потребовалось машине на обратную дорогу?

Ответ: ______________.

3) Сколько километров прошла машина через 2 ч 40 мин?

Ответ: ______________.

7. На рисунке изображен график изменения температуры в течение дня.



Определите по графику:

1) Максимальное значение температуры в этот день.

Ответ: ______________.

2) В какое время наблюдается температурный максимум?

Ответ: ______________.

3) В какой промежуток времени температура была выше 15 °C?

Ответ: ______________.

4) В какое время температура была 10 °C?

Ответ: ______________.

Часть 2

8. Постройте график функции $y = -\frac{x}{3} + 4$. Какие значения она принимает при $0 \le x \le 6$?

9. Постройте график функции $y = -0{,}2x - 1$. Какие значения она принимает при $2 \le x \le 5$?

10. Постройте график функции $y = 2x + 5$. Какие значения она принимает при $-2 \le x \le 1$?

11. Постройте график функции $y = \frac{5-x}{2}$. Какие значения она принимает при $-1 \le x \le 4$?

12. Постройте график функции $y = (x - 3)^2 - 2$. Укажите ее область значений.

13. Постройте график функции $y = \frac{x^2 + x}{x}$. Укажите ее область значений.

14. Постройте график функции $y = 3x^2 - x + 5$. Какие значения принимает функция, если $1 \le x \le 2$?

15. Постройте график функции $y = -4x^2 + 5x - 8$. Какие значения принимает функция, если $2 \le x \le 3$?

16. Постройте график функции $y = -x^2 + 6x - 1$. Какие значения принимает функция, если $0 \le x \le 4$?

Тема 7. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

В школьном курсе алгебры изучаются арифметическая и геометрическая прогрессии. В первой части экзаменационной работы обычно представлены задачи, решаемые либо с помощью формулы n-ого члена прогрессии, либо с помощью формулы суммы n первых членов прогрессии. Эти формулы надо знать наизусть.

Во второй части экзаменационной работы предлагаются задания, требующие применения рекуррентных формул, характеристического свойства прогрессий, а также задания, решение которых сводится к решению уравнений и их систем, неравенств и их систем.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

	Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	Арифметической прогрессией (a_n) называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d (d — разность прогрессии)	Геометрической прогрессией (b_n) называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q (q — знаменатель прогрессии)
Рекуррентная формула	Для любого натурального n $a_{n+1} = a_n + d$ (1)	Для любого натурального n $b_{n+1} = b_n \cdot q,\ b_n \neq 0$ (6)
Формула n-ого члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$ (2)	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ \ b_n \neq 0$ (7)
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n > 1$ (3)	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n > 1$ (8)
Сумма n первых членов	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (4) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (5)	$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1},\ q \neq 1$ (9) $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$ (10)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Формула n-го члена

Арифметическая прогрессия

Задание 1. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = -5$, $a_2 = -7$. Найдите двадцать первый член этой прогрессии.

Решение.

По формуле n-ого члена (2)

$$a_{21} = a_1 + d(21 - 1) = a_1 + 20d.$$

Так как по условию $a_1 = -5$, то $a_{21} = -5 + 20d$. Осталось найти разность прогрессии:

$$d = a_2 - a_1, \text{т.е.}\, d = -7 - (-5) = -2.$$

$$a_{21} = -5 + 20 \cdot (-2) = -45.$$

Ответ: $a_{21} = -45$.

Задание 2. Какое число не является членом арифметической прогрессии 4; 7; 10; ...?

1) 28 2) 64 3) 95 4) 127

Решение.

Запишем формулу n-ого члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В исходной прогрессии $a_1 = 4$, $d = 7 - 4 = 3$, поэтому $a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$.

Проверим: является ли число 28 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $28 = 3n + 1$. Получаем, что $n = 9$, т.е. 28 — девятый член прогрессии ($a_9 = 28$).

Проверим: является ли число 64 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $64 = 3n + 1$. Получаем, что $n = 21$, т.е. 64 — двадцать первый член прогрессии ($a_{21} = 64$).

Проверим: является ли число 95 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $95 = 3n + 1$. Получаем, что $n = \frac{94}{3} = 31\frac{1}{3}$, т.е. n — не натуральное число и число 95 **не является** членом прогрессии.

Проверим: является ли число 127 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $127 = 3n + 1$. Получаем, что $n = 42$, т.е. 127 — сорок второй член прогрессии ($a_{42} = 127$).

Итак, только число 95 не является членом исходной прогрессии.

Ответ: 3.

Задание 3. Бригада в январе изготовила 8 деталей, а в каждый следующий месяц изготавливала на 7 деталей больше, чем в предыдущий. Сколько деталей бригада изготовит в сентябре?

Решение.

Так как бригада каждый следующий месяц изготавливала на 7 деталей больше, чем в предыдущий, то мы имеем арифметическую прогрессию с разностью 7. Первый член прогрессии равен 8. Формула n-ого члена для данной прогрессии будет иметь вид: $a_n = 8 + 7(n - 1)$, т.е. $a_n = 7n + 1$. Так как $n = 9$, то $a_9 = 7 \cdot 9 + 1 = 64$.

Ответ: 64.

Задание 4. Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n): $-18;\ -17{,}3;\ \ldots$?

Решение.

Что требуется найти? Сколько членов прогрессии отрицательны, т.е. требуется найти число n.

Запишем формулу n-ого члена для данной прогрессии $a_n = -18 + d(n - 1)$. Как найти разность прогрессии?

$$d = a_2 - a_1 = -17{,}3 - (-18) = 0{,}7.$$

Подставим значение d в формулу n-ого члена: $a_n = -18 + 0{,}7(n - 1)$. При каких n члены прогрессии отрицательны?

Решим неравенство $a_n < 0$.

$$-18 + 0{,}7(n - 1) < 0$$

$$-18{,}7 + 0{,}7n < 0$$

$$7n < 187$$

$$n < 26\frac{5}{7}$$

Значит, двадцать шестой член прогрессии — последний отрицательный член прогрессии, а двадцать седьмой — первый положительный член прогрессии.

В этом можно убедиться, используя формулу n-го члена.

$$a_{26} = -18 + 0{,}7(26 - 1) = -18 + 0{,}7 \cdot 25 = -18 + 17{,}5 = -0{,}5$$

$$a_{27} = -18 + 0{,}7(27 - 1) = -18 + 0{,}7 \cdot 26 = -18 + 18{,}2 = 0{,}2$$

Ответ: 26.

Задание 5. Известно, что в арифметической прогрессии (a_n) $a_1 + a_5 = -4$, $a_2 \cdot a_6 = -16$. Найдите разность и первый член прогрессии.

Решение.

По условию известно, что

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = -4, \\ a_2 \cdot a_6 = -16. \end{cases}$$

Чтобы решить систему уравнений, выразим каждый из членов прогрессии через a_1 и d. Используем формулу n-го члена для a_2, a_5, a_6.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = -4, \\ (a_1 + d) \cdot (a_1 + 5d) = -16. \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки, для этого выразим из первого уравнения a_1 и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} a_1 = -2 - 2d, \\ (-2 - 2d + d)(-2 - 2d + 5d) = -16. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы — квадратное уравнение относительно переменной d.

$$(-2-d)(-2+3d) = -16$$

$$4+2d-6d-3d^2 = -16$$

$$-3d^2-4d+20=0$$

$$3d^2+4d-20=0$$

Его корни: 2 и $-3\frac{1}{3}$.

Система имеет два решения:

$$\begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d = -3\frac{1}{3}, \\ a_1 = 4\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $a_1 = -6$, $d = 2$; $a_1 = 4\frac{2}{3}$, $d = -3\frac{1}{3}$.

Геометрическая прогрессия

Задание 6. Найдите шестой член геометрической прогрессии -2; 6; ...

1) 243 2) 336 3) 486 4) 546

Решение.

1-й способ (с помощью формулы n-го члена)

По формуле n-го члена геометрической прогрессии (7)

$$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1} = b_1 \cdot q^5.$$

Так как $b_1 = -2$, а $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{-2} = -3$, то $b_6 = -2\cdot(-3)^5 = 2\cdot 243 = 486$. В ответе пишем 3).

2-й способ (с помощью рекуррентной формулы)

Так как знаменатель прогрессии равен -3, то

$$b_3 = 6\cdot(-3) = -18,$$

$$b_4 = -18\cdot(-3) = 54,$$

$$b_5 = 54\cdot(-3) = -162,$$

$$b_6 = -162\cdot(-3) = 486.$$

Ответ: 3.

Задание 7. Между числами 2 и 32 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

Из условия задания имеем $b_1 = 2$, $b_5 = 32$. Следует найти b_2, b_3, b_4.

По формуле n-ого члена $b_5 = b_1 \cdot q^4$, т.е. $32 = 2 \cdot q^4$ и $q^4 = 16$. Для знаменателя прогрессии две возможности: 1) $q = 2$; 2) $q = -2$.

В первом случае имеем геометрическую прогрессию 2; 4; 8; 16; 32.

Во втором: 2; -4; 8; -16; 32.

Ответ: 2; 4; 8; 16; 32 или 2; -4; 8; -16; 32.

Рекуррентная формула

Задание 8. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 4, b_{n+1} = b_n \cdot 3$. Найдите пятый член прогрессии.

Решение.

1-й способ (с помощью рекуррентной формулы)

По рекуррентной формуле имеем:

$b_2 = b_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12,$

$b_3 = b_2 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36,$

$b_4 = b_3 \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108,$

$b_5 = b_4 \cdot 3 = 108 \cdot 3 = 324.$

2-й способ (с помощью формулы n-ого члена)

Необходимо найти b_5. Так как в геометрической прогрессии $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то $q = 3$. Формула n-ого члена имеет вид $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ и $b_5 = 4 \cdot 3^{5-1} = 4 \cdot 81 = 324$.

Ответ: 324.

Характеристическое свойство

Задание 9. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{71}=38$, $a_{73}=-128$. Найдите семьдесят второй член этой прогрессии.

Решение.

Для арифметической прогрессии характеристическое свойство имеет вид $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n > 1$, поэтому $a_{72} = \frac{a_{71}+a_{73}}{2}$. Подставим известные данные.

$$a_{72} = \frac{38+(-128)}{2} = -45.$$

Ответ: -45.

Задание 10. В геометрической прогрессии (b_n) $b_9=4^{11}$, $b_{11}=4^{13}$. Найдите знаменатель и первый член этой прогрессии.

Решение.

Так как заданы девятый и одиннадцатый члены прогрессии, то можно найти десятый член прогрессии. Воспользуемся характеристическим свойством: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

$$b_{10}^2 = b_9 \cdot b_{11}$$

$$b_{10}^2 = 4^{11} \cdot 4^{13} = 4^{24}$$

1) $b_{10} = 4^{12}$ или 2) $b_{10} = -4^{12}$.

Тогда знаменатель прогрессии равен

1) $q = \frac{b_{11}}{b_{10}} = \frac{4^{13}}{4^{12}} = 4$ или 2) $q = \frac{b_{11}}{b_{10}} = \frac{4^{13}}{-4^{12}} = -4$.

Запишем формулу n-го члена для десятого члена прогрессии $b_{10} = b_1 \cdot q^9$, т.е.

1) $4^{12} = b_1 \cdot 4^9$ и $b_1 = 4^{12}:4^9 = 4^{12-9} = 4^3 = 64$;

2) $-4^{12} = b_1 \cdot (-4)^9$ и $b_1 = -4^{12}:(-4)^9 = 4^{12-9} = 4^3 = 64$.

Ответ: знаменатель прогрессии равен 4 или (-4); первый член прогрессии равен 64.

Сумма n первых членов

Задание 11. В арифметической прогрессии (a_n) $a_n = 3n - 4$. Найдите сумму шестнадцати первых членов.

Решение.

Для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии используют две формулы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Какую из них в данном случае удобнее применять?

По условию известна формула n-го члена исходной прогрессии: $a_n = 3n - 4$. Можно найти сразу и a_1, и a_{16} без нахождения d. Поэтому воспользуемся первой формулой.

$$S_{16} = \frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 16,$$

где $a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$, а $a_{16} = 3 \cdot 16 - 4 = 44$.

$$S_{16} = \frac{-1+44}{2} \cdot 16 = 43 \cdot 8 = 344.$$

Ответ: 344.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Часть 1

1. Найдите девятый член арифметической прогрессии 3; 7; ...

   1) 33 2) 34 3) 35 4) 36

2. Найдите восьмой член арифметической прогрессии $a_n = 5 - 0{,}5n$.

   Ответ: ______________.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = -1$, $a_2 = -3$. Найдите двенадцатый член этой прогрессии.

   Ответ: ______________.

4. Какое число **не является** членом арифметической прогрессии: 5; 8; 11; ...?

   1) 53 2) 62 3) 82 4) 95

5. Найдите шестой член геометрической прогрессии 128; 64; ...

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

6. Найдите пятый член геометрической прогрессии $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Ответ: ______________.

7. Найдите четвертый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_3 + a_5 = 24$.

1) 9 2) 10 3) 15 4) 21

8. Найдите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии 4; 11; ...

1) 286 2) 288 3) 290 4) 292

9. Каждой последовательности, заданной формулой n-ного члена, поставьте в соответствие верное утверждение.

А. $a_n = 3n^2$ Б. $b_n = 3n$ В. $c_n = 3^n$

1) последовательность — арифметическая прогрессия;
2) последовательность — геометрическая прогрессия;
3) последовательность не является прогрессией.

10. Ракета за первую секунду пролетела 300 м. За каждую следующую секунду ракета пролетала на 200 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние (в километрах) пролетела ракета за шестую секунду?

Ответ: ______________.

11. Ракета за первую секунду пролетела 300 м. За каждую следующую секунду ракета пролетала на 200 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние (в метрах) пролетела ракета за шесть секунд?

Ответ: ______________.

12. Поезд за первую минуту прошел 200 м. За каждую следующую минуту поезд проходил на 100 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние (в метрах) прошел поезд за n-ю минуту?

1) $100n + 200$ 3) $200n + 100$
2) $100n + 100$ 4) $200n + 200$

13. Найти шестой член последовательности, заданной рекуррентным способом $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+1} = b_{n-1} + b_n$ $(n > 2)$.

1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

14. Последовательность a_n задана формулой

$$a_n = n^2 - 2n - 1.$$

Найдите номер члена последовательности, равного 7.

Ответ: ____________.

Часть 2

15. Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию ($AB < AC < BC$). Периметр треугольника ABC равен 36 см. Найдите длину стороны AC.

16. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_3 = 3$, $a_5 = 4$. Найдите сумму семи первых членов прогрессии.

17. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 8$, $b_3 = 24$. Найдите b_5.

18. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_{12} = 4$, $a_{14} = 16$. Найдите тринадцатый член прогрессии.

19. Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n): -16; $-15{,}6\ldots$?

20. Дана арифметическая прогрессия: 3,3; 2,9 ... Сколько положительных членов она содержит?

21. Найти шестой член арифметической прогрессии: a_1; a_2; 9,4; a_4; 11,6 ...

22. Между числами 3 и 48 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию. В ответе запишите найденные три числа.

23. В геометрической прогрессии (b_n) $b_7 = 5^{11}$, $b_8 = 5^{12}$. Найдите первый член этой прогрессии.

Тема 8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ЧАСТИ 1

ЗАДАЧИ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (с комментариями, решениями, ответами)

Задачи (на составление уравнения, системы уравнений, отношения)

Задание 1. Из 42 поездов, приходящих на станцию, отношение пассажирских к скорым поездам составляет 4 : 3. Сколько скорых поездов приходит на станцию.

Решение.

Из всех поездов 4 части составляют пассажирские поезда, а 3 части — скорые. Получаем, что из 7 частей складывается число поездов, приходящих на станцию. На одну часть приходится $42 : 7 = 6$ поездов. Так как скорых — 3 части, то их $3 \times 6 = 18$ поездов.

Ответ: 18 поездов.

Задание 2. Два карандаша и три ластика были куплены за 45 рублей, а три карандаша и четыре ластика — за 65 рублей. Сколько стоит один карандаш и один ластик?

Решение.

1-й способ — арифметический.

2 карандаша и 3 ластика стоят 45 руб., поэтому 6 карандашей и 9 ластиков стоят в три раза дороже $45 \times 3 = 135$ руб.

Так как 3 карандаша и 4 ластика стоят 65 руб., то 6 карандашей и 8 ластиков стоят $65 \times 2 = 130$ руб.

6 карандашей и 9 ластиков стоят 135 руб.

6 карандашей и 8 ластиков стоят 130 руб.

1 ластик стоит 5 руб.

Получаем, что карандаш стоит $\dfrac{45-15}{2} = 15$ руб., а вместе они стоят 20 рублей.

2-й способ — алгебраический.

Пусть один карандаш стоит x рублей, а один ластик y рублей, тогда составим систему уравнений по условию задачи:

$\begin{cases} 2x + 3y = 45, \\ 3x + 4y = 65; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x + 9y = 135, \\ 6x + 8y = 130; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5, \\ x = 15. \end{cases}$

Один карандаш и один ластик стоят

$x + y = 15 + 5 = 20$ (руб.)

Ответ: 20 руб.

Задачи на проценты

Процентом числа называется его сотая часть, например:

1% — это одна сотая числа,

1% от числа 500 — это число 5,

3% — это три сотых числа,

3% от числа 500 — это число 15.

Отсюда легко получаются соотношения, которые полезно помнить:

50% числа x — это его половина ($0{,}5\ x$);

25% числа x — это его четверть ($0{,}25\ x$ или $\frac{1}{4}x$);

20% числа x — это его пятая часть ($0{,}2\ x$ или $\frac{1}{5}x$);

75% числа x — это его три четверти ($0{,}75\ x$ или $\frac{3}{4}x$);

100% числа x — это все число (x).

Решение любых задач на проценты сводится к основным **трем действиям** с процентами:

— нахождение процентов от числа

Пример. Найти 15% от числа 60.

$0{,}15 \cdot 60 = 9.$

Ответ: 9.

— нахождение числа по его процентам

Пример. Найти число, 12% которого равны 30.

12% искомого числа нам известны — это 30. Какое же это число? Это число (x) принимаем за 100% и находим его:

$$12\% — 30$$
$$100\% — x$$

$$\frac{12}{100} = \frac{30}{x}, \quad x = \frac{30 \cdot 100}{12} = 250.$$

Ответ: 250.

— нахождение процентного отношения чисел

Пример. Сколько процентов составляет 120 от 600?

$$\frac{120}{600} \cdot 100\% = 20\%.$$

Ответ: 20%.

Среди задач на проценты, предлагающихся на экзамене, можно выделить несколько типов.

Задание 3. Спрос на товар увеличился в 5 раз. На сколько процентов увеличился спрос?

1) 500% 2) 100% 3) 200% 4) 400%

Решение.

Первоначальный спрос на товар (a) составлял 100%. Спрос увеличился и стал $5a$. Произошло увеличение на $4a$. Увеличение составило 400%.

Ответ: 400%.

Задание 4. Объем товаров увеличился на 200%. Во сколько раз произошло увеличение?

Решение.

Первоначальный объем товаров (a) составлял 100%. Он увеличился и стал $a + 2a = 3a$. Произошло увеличение в три раза по сравнению с первоначальным объемом.

Ответ: в три раза.

Задание 5. Квартплата составляла 2000 руб. Какой стала квартплата после ее увеличения на 20%?

Решение.

2000 руб. составляют 100%,
x руб. составляет 120%.

Найдем из пропорции, какой стала квартплата после увеличения: $x = (2000 \cdot 120) : 100 = 2400$.

Ответ: 2400 руб.

Задание 6. Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% овощей, проданных в первый день. В третий день — оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

Решение.

Обозначим за x (кг) — вес имевшихся в магазине овощей. Тогда в первый день магазин продал $0{,}4 \cdot x$ (кг), а за второй день — $0{,}8 \cdot (0{,}4 \cdot x)$ кг. Зная, что в третий день было продано 28 кг овощей, составляем уравнение:

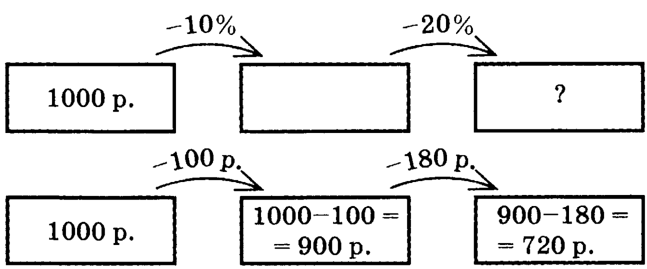
$$0{,}4 \cdot x + 0{,}8 \cdot (0{,}4 \cdot x) + 28 = x,$$
$$0{,}28\,x = 28,$$
$$x = 100.$$

Ответ: 100 кг.

Задание 7. Цена изделия составляла 1000 руб. и была снижена сначала на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

Решение.

Подобные задачи, на наш взгляд, удобно решать с помощью такой схемы рассуждений:



Первое снижение цены товара было на $0{,}1 \cdot 1000 = 100$ руб. После первого снижения цена товара составила $1000 - 100 = 900$ руб. Второе снижение цены товара было на $0{,}2 \cdot 900 = 180$ руб. После второго снижения цена товара составила $900 - 180 = 720$ руб.

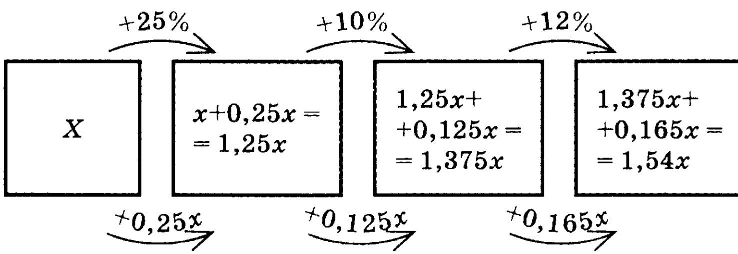
Ответ: 720 рублей.

Задание 8. Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

Решение.

Обозначим первоначальную цену товара за x (руб.), тогда после первого повышения цена товара стала — $1{,}25x$. Второе повышение цены было на $0{,}1 \cdot 1{,}25x$. После него цена товара стала — $1{,}25x + 0{,}1 \cdot 1{,}25x = 1{,}375x$. Третье повышение цены на 12% производилось от цены, полученной после второго повышения, и составило $0{,}12 \cdot 1{,}375x = 0{,}165x$. После последнего повышения цена товара составила $1{,}375x + 0{,}165\,x = 1{,}54x$.

Схема рассуждений была следующей:



Осталось выяснить процент повышения первоначальной цены. Цена была повышена на $1{,}54x - x = 0{,}54x$ руб., что составляет 54% от первоначальной цены.

Ответ: 54%.

Задание 9. Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 1000 рублей через 2 года?

Решение.

Эта задача на так называемые «сложные проценты». Так говорят, когда в задаче идет речь о поэтапном изменении некоторой величины. В данном случае рассмотрим два этапа — на первом начисляется процент на сумму, находившуюся на счету первый год, а на втором этапе производится начисление процентов на сумму, получившуюся после первого этапа, т.е. на сумму с уже начисленными процентами после первого года.

1000 руб. — первоначальная сумма вклада. Начисленные проценты после первого года составят $0{,}03 \cdot 1000$. По окончании первого года на счету окажется $1000 + 0{,}03 \times 1000 = 1030$. По окончании второго года проценты составят $0{,}03 \cdot 1030 = 30{,}9$. Таким образом, после двух лет сумма вклада составит $1030 + 30{,}9 = 1060{,}9$. Первоначальный вклад был увеличен на 60,9 руб.

Ответ: 60,9 рублей.

Задание 10. После истечения двух лет сумма банковского вклада, положенного под 3% годовых, выросла на 304,5 рубля. Найдите первоначальную сумму вклада.

Решение.

Пусть A рублей — первоначальная сумма вклада. Тогда через год сумма вклада составила

$$A + 0{,}03A = A \cdot (1 + 0{,}03) = 1{,}03 \cdot A \text{ руб.}$$

За второй год проценты составили $0{,}03 \cdot (1{,}03 \cdot A)$. Через два года сумма вклада станет равной

$$1{,}03 \cdot A + 0{,}03 \cdot (1{,}03 \cdot A) = 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot A.$$

Получаем уравнение:

$$1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot A = A + 304{,}5,$$

$$0{,}0609 \cdot A = 304{,}5,$$

$$A = 5000.$$

Ответ: 5000 рублей.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Цену товара повысили на 100%, а затем снизили на 50%. Как изменится цена товара?

1) не изменится
2) возрастет в 2 раза
3) возрастет вполовину
4) возрастет в полтора раза

2. Цену товара повысили на 50%, а затем снизили на 50%. Как изменится цена товара?

1) не изменится
2) снизится на четверть
3) возрастет на треть
4) снизится на треть

3. Некоторое число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

1) на 20%
2) на 25%
3) на 50%
4) на 120%

4. Вкладчик положил в сбербанк 10 000 руб. из расчета 1% годовых. Каким будет его вклад через один год?

1) 10 001
2) 10 010
3) 10 100
4) 11 000

5. Сбербанк в конце года начисляет 4% годовых к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 2500 р. через один год?

1) 2504 2) 2550 3) 2580 4) 2600

6. Найдите периметр прямоугольного участка площадью 192 м^2, одна из сторон которого больше другой на 4 м.

Ответ: ______________.

7. Найдите периметр прямоугольного участка площадью 252 м^2, одна из сторон которого больше другой на 4 м.

Ответ: ______________.

8. На одном и том же расстоянии от стен комнаты прямоугольной формы площадью 24 м^2 находится ковер размерами 3 м × 2 м. Каково расстояние от ковра до стен комнаты? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

9. Сберегательный банк в конце года начисляет 2% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 5000 руб. через 3 года?

Ответ: ______________.

10. Сбербанк в конце года начисляет 5% к сумме, находившейся на счету. На сколько процентов увеличится первоначальный вклад в 2000 руб. через 2 года?

Ответ: ______________.

11. Изделие, цена которого 500 руб., сначала подорожало на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена изделия?

12. Цену на некоторый товар сначала снизили на 30%, а затем повысили на 20%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

13. Цену некоторого товара снизили на 15%, а потом еще на 20%. Найдите общий процент снижения цены.

14. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трех лет она выросла на 765,1 руб. при 2% годовых.

15. В первый день со склада было отпущено 20% имевшихся яблок. Во второй день — 180% от того количества яблок, которое было отпущено в первый день. В третий день — оставшиеся 88 кг яблок. Сколько килограммов яблок было на складе первоначально?

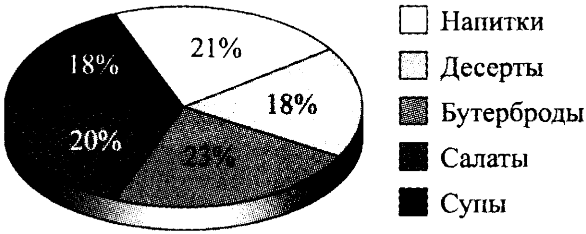
16. При повышении цены билета на 25% число зрителей в кинотеатре уменьшилось на 22%. На сколько процентов изменилась выручка театра?

17. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом еще на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена одного товара больше первоначальной цены другого товара.

18. Зарплата была повышена два раза за один год на один и тот же процент. При таком повышении вместо 100 руб. за один день рабочий стал получать 125,44 руб. Определите, на сколько процентов повысилась зарплата.

19. В столовой предприятия обедают 400 человек. Диаграмма распределения продаж обеденных блюд представлена на рисунке. Какие утверждения относительно продажи обеденных блюд верны?

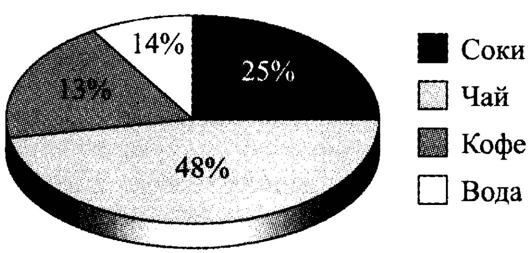
Продажи обеденных блюд



1. Супы выбирают менее 80 человек.
2. Бутерброды выбирают более 80 человек.
3. Супы и десерты выбирают одинаковое количество людей.
4. Чаще всего выбирают салаты.
5. Напитки с десертами выбирают более 30% работников предприятия.

20. В столовой предприятия обедают 400 человек. Диаграмма распределения продаж напитков представлена на рисунке.

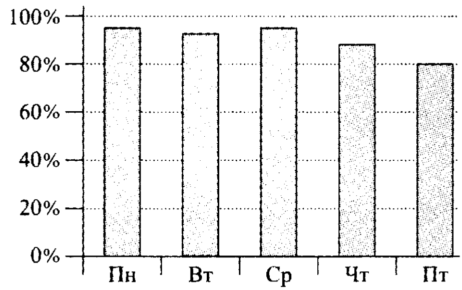
Продажа напитков



Какие утверждения относительно продажи напитков неверны?

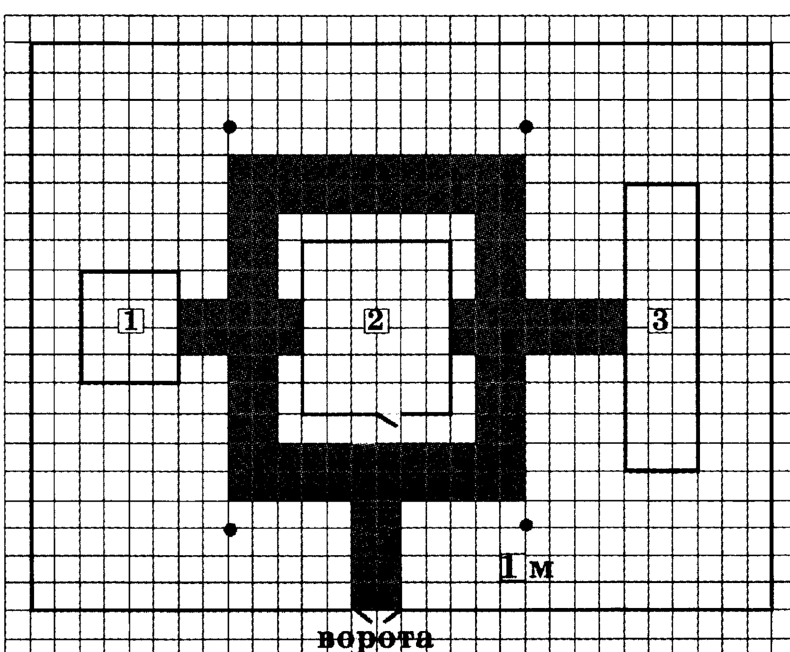
1. Соки выбирают менее 120 человек.
2. Кофе выбирают более 100 человек.
3. Воду и соки выбирают больше, чем кофе.
4. Чаще всего выбирают чай.
5. Кофе, воду и соки выбирают менее 200 работников предприятия.

21. Посещаемость начальной школы в разные дни недели представлена на диаграмме. Укажите верные утверждения, если в начальной школе обучается 500 учащихся.



1. Больше 90% учащихся присутствовало на уроках три дня в неделю.
2. Больше 80% учащихся присутствовало на уроках четыре дня в неделю
3. Меньше всего учащихся на уроках в четверг.
4. В пятницу присутствовало 400 человек.
5. В понедельник отсутствовало менее 50 человек.

22. Прочитайте внимательно текст и выполните задания.



На рисунке изображен дом с участком. Участок имеет прямоугольную форму: 30 метров длиной и 20 метров шириной. В центре участка расположен дом, рядом с ним клумба, теплица с квадратным основанием и четыре фонаря. Все дорожки внутри участка имеют ширину 2 м и вымощены тротуарной плиткой размером 50 см на 50 см.

1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность трех цифр.

Объекты	Жилой дом	Клумба	Теплица
Цифры			

Ответ: ____________.

2. Тротуарная плитка продается в упаковках по 10 штук. Сколько упаковок плитки понадобилось, чтобы выложить все дорожки?
Ответ: ____________.

3. Найдите площадь всего участка. Ответ дайте в квадратных метрах.
Ответ: ____________.

4. Найдите площадь, которую занимает дом. Ответ дайте в квадратных метрах.
Ответ: ____________.

5. По границе участка решили поставить забор с воротами. Найдите длину забора (без ворот). Ответ дайте в метрах.
Ответ: ____________.

6. По границе дома проложен светодиодный кабель для освещения. Найдите его длину. Ответ дайте в метрах.
Ответ: ____________.

7. Найдите площадь, которую занимает клумба. Ответ дайте в квадратных метрах.
Ответ: ____________.

8. К клумбе проложена дорожка, которая примыкает к ее большей стороне, вдоль этой стороны расположена труба для полива. Найдите ее длину. Ответ дайте в метрах.

Ответ: ____________.

9. Найдите расстояние от жилого дома до клумбы (расстояние между двумя ближайшими точками на прямой).

Ответ: ____________.

10. Найдите расстояние от жилого дома до теплицы (расстояние между двумя ближайшими точками на прямой).

Ответ: ____________.

11. Найдите расстояние от жилого дома до ближайшего фонаря (расстояние между двумя ближайшими точками на прямой).

Ответ: ____________.

12. Бригаде строителей потребовался резервуар (без крышки) для технической воды. Резервуар должен быть сделан из оцинкованной стали и иметь форму прямоугольного параллелепипеда шириной 140 см, длиной 240 см, высотой 30 см. Какое наименьшее количество листов оцинкованной стали прямоугольной формы размером 600×1000 мм нужно купить, если расход на швы составляет 0,5% всей площади листа?

Ответ: ____________.

13. В дом надо провести интернет. Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «Обычный»	Нет	6 руб. за 1 Мбит
2. План «Легкий»	400 руб./мес за 75 Мбит/с трафика в месяц	20 руб. за 1 Мбит сверх 75 Мбит
3. План «Продвинутый»	470 руб. за 80 Мбит/с трафика в месяц	5 руб. за 1 Мбит сверх 80 Мбит

Семья, живущая в доме, планирует, что трафик интернета составит 80 Мбит и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей семья заплатит за интернет в месяц, если трафик действительно будет равен 80 Мбит?

Ответ: ____________.

14. Хозяин дома для строительства гаража взял в банке кредит 210 000 руб. на год под 12% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Ответ: ____________.

15. Хозяин дома после выплаты кредита решил открыть вклад, чтобы оплатить обучение сына в вузе через 3 года. Он положил в банк 1 млн рублей под 5% годовых. Какую сумму сможет забрать хозяин дома через 3 года?

Ответ: ____________.

16. Семья, живущая в доме (в семье 4 человека: мама, папа, сын и дочь), возвращается из отпуска. Им надо проехать 1200 км. Можно ехать поездом, а можно — на машине. Аренда машины стоит 3000 рублей. Билет на поезд стоит 2000 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 1200 км, а цена бензина равна 44 рубля за литр. Какая поездка будет самой дешевой? В ответе укажите стоимость этой поездки.

Ответ: ____________.

Тема 9. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ЧАСТИ 2

Задачи на «движение»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Действие движения характеризуется тремя компонентами: пройденный путь, скорость и время. Известно соотношение между ними:

$$\textit{Путь} = \textit{скорость} \times \textit{время}$$

Задание 1. Скорость велосипедиста от поселка до станции была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. На обратный путь он затратил на 2 минуты больше. Расстояние между пунктами 7 км. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.

Решение.

Пусть x (км/ч) — скорость велосипедиста.

Если x км/ч — скорость велосипедиста от поселка до станции, то $(x - 1)$ км/ч — скорость велосипедиста на обратном пути. Время велосипедиста от поселка до станции $\frac{7}{x}$, а время обратного движения $\frac{7}{x-1}$.

Так как время обратного движения на 2 минуты (т.е. на $\frac{1}{30}$ ч) больше, составим и решим уравнение: $\frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$.

Ответ: 15 км/ч — скорость велосипедиста.

Задание 2. Катер прошел 16 км по течению реки и 7 км обратно, затратив на весь путь 45 мин. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

Решение.

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера.

Скорость катера по течению $(x + 2)$ км/ч, а против течения $(x - 2)$ км/ч. Время движения катера по течению $\frac{16}{x+2}$, а против течения $\frac{7}{x-2}$.

На весь путь катер потратил $\frac{16}{x+2} + \frac{7}{x-2}$, или 45 мин.

Переведем 45 мин в часы: 45 мин $= \frac{3}{4}$ (ч).

Решим уравнение $\frac{16}{x+2} + \frac{7}{x-2} = \frac{3}{4}$.

Ответ: собственная скорость катера — 30 км/ч.

Задачи «на работу»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Работу характеризует три компонента действия:

— время работы;

— объем работы;

— производительность (количество произведенной работы в единицу времени).

Существует следующее соотношение между этими компонентами:

Объем работы = время работы × производительность.

Задание 3. Две копировальные машины печатают рукопись. Если всю рукопись будет печатать первая машина, то работа будет выполнена на 4 минуты позже, чем две машины, работая вместе. Если печатать всю рукопись будет вторая машина, то она напечатает на 25 минут позже, чем обе машины, работая вместе. За сколько минут может напечатать эту рукопись вторая машина?

Решение.

Пусть время печати всей рукописи первой машиной — x (мин), а второй — y (мин). Тогда время общей работы двух машин можно найти двумя способами: $x - 4$ и $y - 25$. Поэтому получим первое уравнение: $x - 4 = y - 25$.

Примем за единицу работу по печати всей рукописи.

Производительность первой машины — $\frac{1}{x}$, производительность второй машины — $\frac{1}{y}$, общая их производительность — $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Зная их общее время работы $(x - 4)$, можно составить второе уравнение $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x - 4) = 1$.

Решая систему $\begin{cases} x - 4 = y - 25, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x - 4) = 1 \end{cases}$, получим, что вторая машина может напечатать рукопись за 35 минут.

Ответ: вторая машина может напечатать рукопись за 35 минут.

Задачи на «концентрацию», на «смеси и сплавы»

ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В таких задачах часто встречаются понятия «процентное содержание» или «концентрация». Например, если в задаче идет речь о 9%-ном растворе уксуса, то можно понять, что в этом растворе 9% чистого уксуса, а остальные 91% приходится на воду, с которой смешивался чистый уксус. Также можно сказать, что 0,09 части составляет в этом растворе чистый уксус, а 0,91 части приходится на воду. Понятно, что объем всего раствора принимается за 100% (или за 1).

В задачах этого типа обычно присутствуют три величины, соотношение между которыми позволяет составлять уравнение:

— концентрация (доля чистого вещества в смеси);

— количество чистого вещества в смеси (или сплаве);

— масса смеси (сплава).

Соотношение между этими величинами следующее:

Масса смеси × *концентрация* = *количество чистого вещества.*

Задание 4. Сколько литров воды надо добавить к 20 л пятипроцентного раствора соли, чтобы получить четырехпроцентный раствор?

Решение.

Соль содержится в каждом из растворов. В 20 л 5%-ного раствора соли содержится $20 \times 0{,}05 = 1$ (ед.) соли. Ее количество не меняется. Доливается только вода. Узнаем, каково ее количество.

Обозначим x (л) — количество добавленной воды. Из условия задачи получаем, что 4%-ную концентрацию раствора характеризует уравнение $\frac{1}{20+x} = 0{,}04$. Решением уравнения является $x = 5$.

Ответ: 5 л.

Задание 5. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 42% и 65% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив, получить сплав, содержащий 50% меди?

Решение.

Изобразим схематически условие задачи:

концентрация 0,42 масса сплава x количество меди $0{,}42x$	+	концентрация 0,65 масса сплава y количество меди $0{,}65y$	$\longrightarrow$	концентрация 0,5 масса сплава $x+y$ количество меди $0{,}5(x+y)$

Количество меди в каждом сплаве найдено с помощью соотношения между величинами. Можем составить уравнение: $0{,}42\ x + 0{,}65\ y = 0{,}5(x+y)$.

В этом уравнении две неизвестных, а в задаче требуется найти их отношение $\frac{x}{y}$. Решая уравнение, получим

$42x + 65y = 50(x + y)$, $15y = 8x$, $x : y = 5 : 2$.

Ответ: нужно взять первый и второй сплавы в отношении 5 к 2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Скорость теплохода по течению реки равна 45,2 км/ч, а против течения реки равна 36,2 км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

2. Скорость моторной лодки по течению реки равна 25,6 км/ч, а против течения реки равна 16,2 км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость моторной лодки.

3. От двух пристаней, расстояние между которыми равно 9,6 км, одновременно навстречу друг другу отправились две лодки. Скорость каждой из них в стоячей воде равна 3,2 км/ч. Скорость течения реки равна 2,7 км/ч. Через какое время лодки встретятся? Ответ дайте в минутах.

4. Моторная лодка, собственная скорость которой равна 18 км/ч, за 5 часов движения против течения реки проходит такой же путь, как за 4 часа движения по течению реки. Какое расстояние проплывет за четверть часа брошенная в эту реку спичка? Ответ укажите в метрах.

5. Лодка плыла 3 ч по течению и 4 ч против течения. За это время она прошла 108 км. Скорость лодки против течения составляет 60 % скорости лодки по течению. Найти скорость течения реки.

6. За 2 часа грузовик проезжает на 20 км больше, чем легковой автомобиль за 1 час. Скорость легкового автомобиля в 1,5 раза больше скорости грузовика. Определите скорость каждого.

7. Два мотоциклиста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 200 км, и встречаются через 4 ч. Определите скорость каждого велосипедиста, если скорость у одного из них на 10 км/ч больше, чем у другого.

8. Два туриста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 44 км, и встречаются через 4 ч. Определите скорость каждого пешехода, если скорость у одного из них она на 1 км/ч больше, чем у другого.

9. Если велосипедист будет ехать со скоростью 12 км/ч, то он опоздает на 1 час. Если же он будет ехать со скоростью 18 км/ч, то он приедет на 1 ч раньше. С какой скоростью он должен ехать, чтобы приехать вовремя?

10. Если турист будет идти со скоростью 3 км/ч, то он опоздает на 2 часа. Если же он будет идти со скоростью 5 км/ч, то он придет на 2 ч раньше. С какой скоростью он должен идти, чтобы прибыть вовремя?

11. Из городов В и А, расстояние между которыми равно 90 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста, скорость одного из них была на 3 км/ч больше скорости другого. Через 3 часа велоси-

педисты оказались на расстоянии 9 км друг от друга. С какой скоростью ехал каждый велосипедист?

12. Из городов С и А, расстояние между которыми равно 320 км, выехали одновременно навстречу друг другу два мотоциклиста, скорость одного из них была на 5 км/ч больше скорости другого. Через 4 часа мотоциклисты оказались на расстоянии 20 км друг от друга. С какой скоростью ехал каждый мотоциклист?

13. Чтобы выполнить задание в срок, рабочий должен был изготавливать ежедневно по 10 деталей. Усовершенствовав станок, он увеличил ежедневную выработку на 30% и потому выполнил задание на 3 дня раньше срока. Сколько всего деталей должен был изготовить рабочий?

14. Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен был изготавливать ежедневно по 50 деталей. Усовершенствовав станок, он увеличил ежедневную выработку на 10% и потому выполнил задание на 1 день раньше срока. Сколько всего деталей должен был изготовить рабочий?

15. Чтобы выполнить задание в срок, рабочий должен был изготавливать ежедневно по 20 деталей. Усовершенствовав станок, он увеличил ежедневную выработку на 40% и потому выполнил задание на 2 дня раньше срока. Сколько всего деталей должен был изготовить рабочий?

16. К 40%-ному раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найдите первоначальный вес раствора.

17. Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9%-ного раствора уксуса, чтобы получить 3%-ный раствор?

18. Сплавили два слитка, содержание цинка в которых было 64% и 84% соответственно. Получился сплав, содержащий 76% цинка. Его вес 50 г. Сколько весил каждый из сплавленных слитков?

19. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 30% и 55% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив, получить сплав, содержащий 40% меди?

20. Какое количество воды надо добавить к 2 л 18%-ного раствора соли, чтобы получить 16%-ный раствор?

Тема 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

10.1. Классическое определение вероятности

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Встречаясь с различными случайными событиями, мы часто даем оценку степени их достоверности. Долю успеха того или иного события **А** математики выражают числом и называют вероятностью этого события **Р(А)**. Для вычисления вероятности события, которое может закончиться конечным числом равновозможных элементарных исходов, можно воспользоваться классическим определением вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, при которых событие А происходит, n — число всех равновозможных элементарных исходов.

Достоверным называется событие А, которое в результате опыта обязательно должно произойти, $P(A) = 1$.

Невозможным событием называется событие А, которое в результате опыта не может произойти, $P(A) = 0$.

Таким образом, вероятность любого события заключена между 0 и 1:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Например, для вычисления вероятности наступления события «выпало два очка» при одном бросании игральной кости найдем число всех равновозможных элементарных исходов бросания игральной кости — их шесть; из них число исходов, благоприятствующих наступлению события «выпало два очка», — только одно. Используя определение, получаем, что вероятность события «выпало два очка» при одном бросании игральной кости равна $\frac{1}{6}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (с комментариями, решениями, ответами)

Задание 1. Найдите вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3.

Решение.

В результате одного бросания игральной кости может наступить одним из шести равновозможных элементарных исходов: выпало «одно очко», «два очка», «три очка», «четыре очка», «пять очков», «шесть очков».

При этом числа, кратные 3, выпадают в *двух случаях*: выпало «три очка» и выпало «шесть очков».

Поэтому вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3, равна $\frac{2}{6}$, т.е. $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание 2. Малыш, не умеющий читать, играет с тремя карточками разрезной азбуки «и», «м», «р». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «мир»?

Решение.

Подсчитаем, сколько всех равновозможных элементарных исходов, не обязательно осмысленных, может получиться: «имр», «ирм», «мир», «мри», «рим», «рми», т.е. шесть равновозможных исходов. Только в одном из них получится слово «мир», поэтому вероятность выложить слово «мир» равна $\frac{1}{6}$. Кстати, вероятность выложить слово «рим» тоже равна $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задание 3. В ящике лежат 10 одинаковых на ощупь шаров: 2 — зеленых, 3 — красных, 5 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) зеленый; 2) не зеленый.

Решение.

1) Пусть событие A состоит в том, что вынутый шар — зеленый. Число всех равновозможных элементарных исходов опыта равно 10. Число элементарных исходов, при которых событие A происходит, равно двум. Получаем, что вероятность взять зеленый шар равна $P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

2) Пусть событие A состоит в том, что вынутый шар — не зеленый, т.е. он или красный или синий. Число всех равновозможных элементарных исходов опыта равно 10. Число всех исходов, благоприятствующих наступлению события A, равно 8 (три красных или пять синих). Получаем, что вероятность взять не зеленый шар равна $P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

Ответ: 1) 0,2; 2) 0,8.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Найдите вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 2.
2. Малыш, не умеющий читать, играет с тремя карточками разрезной азбуки «о», «с», «к». Найдите вероятность то-

го, что, используя все карточки, он выложит слово «сок»?

3. Малыш, не умеющий читать, играет с тремя карточками разрезной азбуки «о», «к», «к». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «кок»?

4. Малыш, не умеющий читать, играет с четырьмя карточками разрезной азбуки «а», «м», «м», «а». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «мама»?

5. Малыш, не умеющий читать, играет с четырьмя карточками разрезной азбуки «т», «с», «о», «л». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «стол»?

6. В ящике лежат 10 одинаковых на ощупь шаров: 1 – зеленый, 3 — красных, 6 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) красный; 2) не красный.

7. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 — зеленых, 3 — красных, 5 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) синий; 2) не синий.

8. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 — зеленых, 3 — красных, 5 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар красный или синий?

9. В барабане лежат одинаковые на ощупь шары лотереи с номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер вынутого наудачу шара делится: 1) на 3; 2) на 4?

10. В барабане лежат одинаковые на ощупь шары лотереи с номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер вынутого наудачу шара окажется: 1) простым числом; 2) составным числом; 3) квадратом какого-либо натурального числа?

11. На карте необитаемого острова отмечено 10 мест, в двух из них зарыты клады. Бывший пират выбирает наудачу одно из отмеченных мест и начинает копать. Какова вероятность того, что пират наткнется на клад?

12. На карте необитаемого острова отмечено 10 мест, в двух из них зарыты клады. Бывший пират выбирает наудачу одно из отмеченных мест и начинает копать. Убедившись, что в выбранном месте клада нет, он случайным образом выбирает одно из оставшихся мест. Какова вероятность того, что пират наткнется на клад?

10.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий **A** или **B**.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном появлении события **A** и события **B**.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теоремы сложения вероятностей. Несовместные события. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теоремы сложения вероятностей. Совместные события. Вероятность суммы двух совместных событий выражается следующей формулой: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Теоремы умножения вероятностей

Рассмотрим формулу для суммы двух совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Обычно вероятности каждого из событий А или В известны, поэтому эта формула сводит вычисление вероятности суммы событий к нахождению вероятности их произведения. Последняя задача не имеет определенного решения.

I. Если событие А включает в себя событие В, то P(AB) = P(B).

Например, вероятность нахождения произведения событий «выпадение хотя бы одной цифры и выпадение цифры на первой монете» равна вероятности события «выпадение хотя бы одной цифры».

II. Если события А и В не пересекаются, то P(AB) = 0.

Например, вероятность нахождения произведения событий «выпадение двух гербов и выпадение двух цифр» равна 0.

Возможны и различные промежуточные случаи. Однако есть случай, когда по известным вероятностям событий А и В можно определить вероятность их произведения. Этот случай, когда события независимы.

События А и В называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. И для независимых событий имеет место следующая формула $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Например, вероятность нахождения произведения событий «выпадение герба на первой монете и выпадение герба на второй монете» равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями и ответами)

Задание 1. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: $Г_1$ — появление герба на первой монете, $Г_2$ — появление герба на второй монете, $Ц_1$ — появление цифры на первой монете, $Ц_2$ — появление цифры на второй монете, А — появление хотя бы одного герба, В — появление хотя бы одной цифры, С — появление одного герба и одной цифры, D — непоявление ни одного герба, Е — непоявление ни одной цифры, F — появление двух гербов, G — появление двух цифр. Определить каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) $Г_1 + Г_2$;

2) $Г_1 \cdot Г_2$;

3) $Ц_1 + Ц_2$;

4) $Ц_1 \cdot Ц_2$.

Решение.

Рассмотрим множество всех равновозможных элементарных исходов. Их всего **четыре**:

a) Появление герба на первой монете и появление цифры на второй монете.

b) Появление цифры на первой монете и появление герба на второй монете.

c) Появление герба на первой монете и появление герба на второй монете.

d) Появление цифры на первой монете и появление цифры на второй монете.

1) Появление герба на первой монете или появление герба на второй монете равносильно событию «появление хотя бы одного герба», т. е. $Г_1 + Г_2 = A$.

2) Появление герба на первой монете и появление герба на второй монете равносильно событию «появление двух гербов» или «непоявление ни одной цифры», т. е. $Г_1 \cdot Г_2 = F$ (или $Г_1 \cdot Г_2 = E$).

3) Появление цифры на первой монете или появление цифры на второй монете равносильно событию «появление хотя бы одной цифры», т. е. $Ц_1 + Ц_2 = B$.

4) Появление цифры на первой монете и появление цифры на второй монете равносильно событию «появление двух цифр» или «непоявление ни одного герба», т. е. $Ц_1 \cdot Ц_2 = G$ (или $Г_1 \cdot Г_2 = D$).

Ответ: 1) A; 2) F (или E); 3) B; 4) G (или D).

Задание 2. Опыт состоит в бросании двух монет. Найдите вероятность появление двух гербов или появления двух цифр.

Решение.

Появление двух гербов и появление двух цифр при бросании двух монет являются несовместными событиями, поэтому

$$P(Г_1 \cdot Г_2 + Ц_1 \cdot Ц_2) = P(Г_1 \cdot Г_2) + P(Ц_1 \cdot Ц_2) = 0{,}25 + 0{,}25.$$

Ответ: 0,5.

Задание 3. Опыт состоит в бросании двух монет. Найдите вероятность появление хотя бы одного герба или появления хотя бы одной цифры.

Решение.

События «появление хотя бы одного герба» и «появления хотя бы одной цифры» могут появиться вместе ($Г_1 \cdot Ц_2$ или $Ц_1 \cdot Г_2$), поэтому эти события являются совместными.

Вероятность появление хотя бы одного герба равна $\frac{3}{4}$ (события $Г_1 \cdot Ц_2$, $Ц_1 \cdot Г_2$, $Г_1 \cdot Г_2$).

Вероятность появление хотя бы одной цифры равна $\frac{3}{4}$ (события $Г_1 \cdot Ц_2$, $Ц_1 \cdot Г_2$, $Ц_1 \cdot Ц_2$).

Вероятность произведения этих событий равна $\frac{1}{2}$ (события $Г_1 \cdot Ц_2$, $Ц_1 \cdot Г_2$).

Имеем по формуле $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$:

$$P(Г_1 \cdot Ц_2 + Ц_1 \cdot Г_2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; второго — 0,6. Какова вероятность двух попаданий, если каждый сделал по одному выстрелу?

Решение.

Так как выстрелы двух стрелков независимы друг от друга, то вероятность двух попаданий равна произведению вероятностей: «вероятности попадания первого стрелка» и «вероятности попадания второго стрелка». Искомая вероятность равна $0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$.

Ответ: 0,42.

Замечание: Событие $\overline{A}$ называется **противоположным событию** A, если оно состоит в непоявлении события A. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Задание 5. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; второго — 0,6. Какова вероятность ровно одного попадания, если каждый сделал по одному выстрелу?

Решение.

Мишень может быть поражена ровно один раз в двух случаях:

1) попал первый стрелок и не попал второй стрелок;

2) не попал первый стрелок и попал второй стрелок.

Вероятность ровно одного попадания равна $0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46$.

Ответ: 0,46.

Задание 6. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени, вероятность попадания для первого 0,9; для второго — 0,7; для третьего — 0,6. Найдите вероятность того, что: 1) все три попали в цель; 2) все три промахнулись; 3) хотя бы один попал в цель, если каждый сделал по одному выстрелу.

Решение.

Обозначим события следующим образом: A_1 — попадание первого стрелка, A_2 — попадание второго стрелка, A_3 — попадание третьего стрелка.

1) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}378$.

2) $P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}012$.

3) *1-й способ.* Вероятность события «хотя бы один стрелок попал в цель» равна сумме вероятностей «ровно один

попал в цель», «ровно два стрелка попали в цель», «ровно три стрелка попали в цель».

$$P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 +$$
$$+ \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 +$$
$$+ A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 +$$
$$+ A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}988.$$

2-й способ. Рассмотрим событие, противоположное событию «хотя бы один из стрелков попал в цель», — это событие «все три стрелка промахнулись». Вероятность этого события равна 0,012, значит, вероятность события «хотя бы один стрелок попал в цель» равна

$$1 - 0{,}012 = 0{,}988.$$

Ответ: 1) 0,378; 2) 0,012; 3) 0,988.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 2

1. В ящике лежат 10 одинаковых на ощупь шаров: 3 — зеленых, 5 — красных, 2 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) не синий; 2) не зеленый; 3) не красный; 4) красный или зеленый; 5) зеленый или синий; 6) красный или синий.

2. В корзине 3 белых и 7 черных одинаковых на ощупь шаров. Из корзины вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что: 1) оба шара будут белыми; 2) оба шара будут черными; 3) вынуты разноцветные шары.

3. В корзине 3 белых и 7 черных одинаковых на ощупь шаров. Из корзины вынимают последовательно два шара, после вынимания первого он возвращается в корзину. Найти вероятность того, что: 1) оба шара будут белыми; 2) оба шара будут черными; 3) вынуты разноцветные шары.

4. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: $Г_1$ — выпадение герба на первой монете, $Ц_1$ — выпадение цифры на первой монете, $Г_2$ — выпадение герба на второй монете, $Ц_2$ — выпадение цифры на второй монете, A — выпадение хотя бы одного герба, B — выпадение хотя бы одной цифры, C — выпадение одного герба и одной цифры, D — невыпадение ни одного герба, E — выпадение двух гербов. Определите вероятности следующих событий: 1) $Г_1 + Г_2$; 2) $Г_1 \cdot Г_2$; 3) $Ц_1 \cdot Ц_2$; 4) $Ц_1 + Ц_2$; 5) AB; 6) A + B; 7) C + A; 8) GA; 9) AE; 10) A + E.

5. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,8; второго — 0,7. Найдите вероятности: 1) хотя бы одного попадания; 2) ровно одного попадания; 3) ровно двух попаданий; 4) не больше одного попадания; 5) попадания в мишень не раньше, чем при втором выстреле, если каждый сделал по одному выстрелу.

6. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,8; второго — 0,7; третьего — 0,9. Найдите вероятности: 1) ни одного попадания; 2) хотя бы одного попадания; 3) ровно одного попадания; 4) хотя бы двух попаданий; 5) ровно двух попаданий; 6) трех попаданий; 7) не больше одного попадания; 8) не больше двух попаданий, если каждый сделал по одному выстрелу.

7. Фирма среди своих сотрудников разыгрывает новогоднюю лотерею. В лотерее 10 билетов, из которых 6 выигрышных. Сотрудник фирмы покупает 2 билета. Какова вероятность того, что у этого сотрудника выиграет хотя бы один билет? Результат округлите до сотых.

Тема 11. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Статистические данные позволяют принимать правильные управленческие решения, выявлять закономерности, описывать явления повседневной жизни.

Сравнивать между собой несколько совокупностей статистических данных, можно, используя различные их **числовые характеристики.**

Размахом набора чисел называется разность между наибольшим и наименьшим числом.

Средним арифметическим (средним значением) нескольких чисел называется число, равное отношению суммы этих чисел к их количеству.

Мода — это число, которое встречается в числовом ряду чаще всего.

Числовой ряд может иметь одну моду или несколько, но может и не иметь моды.

Медиана — это число, которое делит упорядоченный ряд чисел на две равные по количеству элементов части. Если число чисел ряда *нечетно*, то медиана — это число, находящееся в середине упорядоченного ряда чисел.

Если количество чисел в ряде *четно*, то медиана равна полусумме чисел, стоящих на средних местах.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Задание 1. Найдите размах, среднее арифметическое, моду, медиану числового ряда 5, 5, 6, 5, 9.

Решение.

9 — наибольшее число ряда, 5 — наименьшее. Размах числового ряда равен $9 - 5 = 4$.

Для нахождения среднего арифметического найдем сумму чисел ряда $5 + 5 + 6 + 5 + 9 = 30$ и их количество — 5 штук. Среднее арифметическое равно

$$\frac{5+5+6+5+9}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Чаще всего в числовом ряду встречается число 5, значит мода ряда равна 5.

Упорядочим ряд чисел по возрастанию и найдем серединное число ряда: 5, 5, **5**, 6, 9.

Медиана ряда равна 5.

Ответ. Размах ряда равен 4, среднее ряда равно 6, мода равна 5, медиана равна 5.

Задание 2. Найдите размах, среднее арифметическое, моду, медиану числового ряда 35, 30, 25, 50, 45, 40.

Решение.

50 — наибольшее число ряда, 25 — наименьшее. Размах числового ряда равен 50 − 25 = 25.

Для нахождения среднего арифметического, найдем сумму чисел ряда $35 + 30 + 25 + 50 + 45 + 40 = 225$ и их количество — 6 штук. Среднее арифметическое равно

$$\frac{35 + 30 + 25 + 50 + 45 + 40}{5} = \frac{225}{6} = 37{,}5.$$

Данный ряд моды не имеет, так как каждое из чисел встречается только один раз.

Упорядочим ряд чисел по возрастанию и найдем серединное число ряда:

25, 30, **35**, **40**, 45, 50.

В данном ряде 6 чисел, поэтому медиану ряда найдем, как среднее арифметическое чисел 35 и 40. Медиана ряда равна 37,5.

Ответ: Размах ряда равен 25, среднее ряда и медиана равны 37,5.

Задание 3. Рост Петра равен 154 см, а медиана ростов всех мальчиков его класса равна 152 см. Какое из утверждений верно?

1) В классе есть обязательно мальчик (не Петр) ростом более 152 см.
2) В классе есть обязательно мальчик ростом менее 152 см.
3) В классе есть обязательно мальчик ниже Петра.
4) В классе есть обязательно мальчик выше Петра.

Решение.

Медиана — это серединное число упорядоченного ряда. Анализ условия показывает, что в классе есть две группы мальчиков. Рост мальчиков первой группы меньше или равен 152 см, рост мальчиков второй группы выше или равен 152 см. Петр входит во вторую группу, значит, один или несколько мальчиков должны быть в первой группе, т.е. их рост должен быть меньше или равен 152 см. Поэтому утверждения 1) и 4) неверны.

Утверждение 2) также неверно. В качестве примера можно взять ряд ростов троих мальчиков: 152, 152, 154.

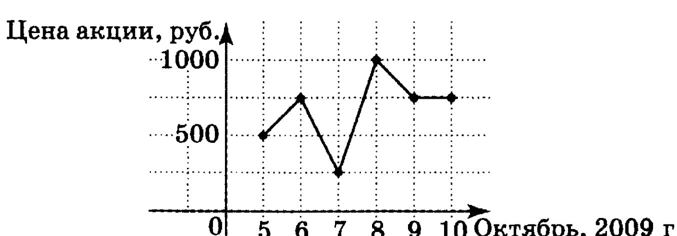
Так как медиана ростов меньше роста Петра, значит, в классе есть мальчик ростом менее 154 см.

Ответ: 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Часть 1

1. Рассмотрите ряд чисел: 5; 5; 1; 4; 3. Найдите: а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану; г) моду.
2. Рассмотрите ряд чисел: 4; 9; 5; 2; 2; 5. Найдите: а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану; г) моду.
3. На графике жирными точками показаны цены одной акции автомобильного завода в период с 5 по 10 октября 2009 года (в рублях за акцию). Для наглядности жирные точки на графике соединены линией.



а) Определите по графику разность наибольшей и наименьшей цены в период с 5 по 7 октября 2009 года. Ответ дайте в рублях.

б) Определите среднее значение и моду цены одной акции с 5 по 9 октября 2009 года.

в) Брокер купил 5 октября 70 акций и продал 9 октября. Чему равна прибыль брокера?

г) Брокер купил 6 октября 40 акций и продал их 7 октября. Сколько потерял он денег на этой сделке?

4. Рост Ольги равен 146 см, а средний рост всех девочек из ее класса равен 148 см. Какое из утверждений верно?

1) В классе все девочки, кроме Ольги, имеют рост 148 см.

2) В классе обязательно есть девочка ростом 148 см.

3) В классе обязательно есть девочка ростом более 148 см.

4) В классе обязательно есть девочка ростом 150 см.

5. Записан рост 5 учащихся: 142, 142, 136, 138, 144. На сколько отличается медиана этого набора чисел от его среднего арифметического?

6. В ряду данных, состоящих из 10 чисел, наибольшее число увеличили на 8. Как изменится при этом: а) среднее арифметическое; б) размах?

7. В ряду данных, состоящих из 10 чисел, наименьшее число уменьшили на 5. Как изменится при этом: а) среднее арифметическое; б) размах?

8. В ряду чисел 4, 6, _, 12, 10 одно число оказалось стертым. Восстановите его, зная, что среднее арифметическое этих чисел равно 7.

9. В ряду чисел 4, 6, _, 12, 10 одно число оказалось стертым. Восстановите его, зная, что размах ряда равен 10.

10. В фермерском хозяйстве отведено под пшеницу два участка 5 га и 15 га. Средняя урожайность на первом участке составляет 25 ц с 1 га, на втором 15 ц с 1 га. Чему равна средняя урожайность пшеницы в этом хозяйстве?

Модуль «Геометрия»

Тема 12. ПЛАНИМЕТРИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

a, b, c — стороны треугольника.

α, β, γ — углы треугольника, $\angle A$ — угол, лежащий против стороны a, $\angle B$ — угол, лежащий против стороны b, $\angle C$ — угол, лежащий против стороны c.

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные из вершин, соответственно на стороны a, b и c.

R — радиус окружности, описанной около треугольника.

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

P — периметр треугольника, p — полупериметр треугольника.

S — площадь многоугольника или круга

C — длина окружности.

Треугольники

Медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}bc\sin A, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (теорема синусов)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ (теорема косинусов)}$$

Прямоугольный треугольник

(a-катет, b-катет, c-гипотенуза)

В прямоугольном треугольнике $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Равнобедренный треугольник

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

В равнобедренном треугольнике три отрезка — высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, равны.

Параллелограмм

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.

Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны.

$S = ah_a$, $S = ab\sin(\angle a,b)$, где a и b — смежные стороны параллелограмма, h_a — высота, проведенная к стороне a.

Прямоугольник

Имеет все свойства параллелограмма.

Диагонали прямоугольника равны.

$S = ab$, где a и b — смежные стороны прямоугольника.

Ромб

Имеет все свойства параллелограмма.

Все стороны ромба равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.

Квадрат

Имеет все свойства прямоугольника.

Стороны квадрата равны.

Диагонали квадрата перпендикулярны и равны.

Трапеция

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции, h — ее высота.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Круг и окружность

$S_{\text{круга}} = \pi r^2$, где r — радиус круга.

$C = 2\pi r$, где r — радиус окружности.

Вписанные углы

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

Вписанный четырехугольник

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна $180°$.

Описанный четырехугольник

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Свойства параллельных прямых

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна $180°$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(с комментариями, решениями, ответами)

Правильный треугольник

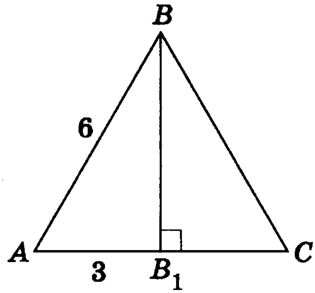
Задание 1. Дан правильный треугольник со стороной 6. Найдите:

1) периметр; 2) высоту; 3) площадь; 4) радиус вписанной окружности; 5) длину вписанной окружности; 6) площадь вписанного круга; 7) радиус вписанной окружности; 8) длину вписанной окружности; 9) площадь вписанного круга; 10) площадь четырехугольника OA_1CB_1.

Решение.

1) Периметр треугольника равен сумме всех его сторон: $P = 6 + 6 + 6 = 18$.

2) Все высоты в равностороннем треугольнике равны. Найдем, например, высоту BB_1 из треугольника ABB_1.



По теореме Пифагора:

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 6^2 - 3^2 = 27.$$

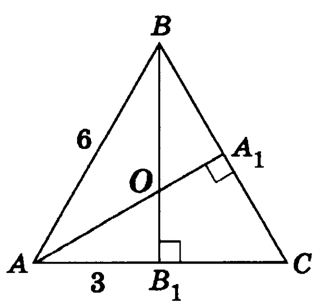
$$BB_1 = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}.$$

3) Найдем площадь треугольника, зная длину стороны AC, и проведенную к ней высоту BB_1:

$$S_{ABC} = 0{,}5 \cdot AC \cdot BB_1 = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

4) В равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают. Центром окружностей является точка пересечения медиан, биссектрис и высот. Радиусом вписанной окружности является

$$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$



5) Длина вписанной окружности C равна $2\pi r$, где $r = OB_1 = \sqrt{3}$. $C = 2\sqrt{3}\pi$.

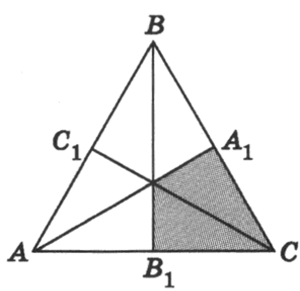
6) Площадь вписанного круга S равна πr^2, где $r = OB_1 = \sqrt{3}$. $S = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi$.

7) В равностороннем треугольнике центр описанной окружности — это точка пересечения медиан, биссектрис и высот, поэтому радиусом описанной окружности является $OB = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

8) Длина описанной окружности C равна $2\pi R$, где $R = OB = 2\sqrt{3}$. $C = 4\sqrt{3}\pi$.

9) Площадь описанного круга равна πR^2, поэтому $S = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi$.

10) Медианы треугольника, пересекаясь, образуют шесть треугольников равных по площади, поэтому $S_{OBC_1} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.



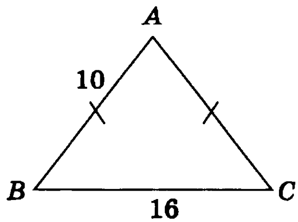
Найдем площадь четырехугольника OA_1CB_1:

$$S_{OA_1CB_1} = 2S_{OB_1C} = 2\cdot\frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{2}{6}\cdot 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Равнобедренный треугольник

Задание 2. Дан равнобедренный треугольник с основанием 16 и боковой стороной 10. Найдите:

1) площадь;
2) радиус описанной окружности;
3) радиус вписанной окружности;
4) определите вид угла A;
5) высоту, проведенную к боковой стороне;
6) медиану, проведенную к боковой стороне.

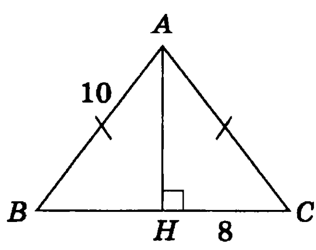


Решение.

1) Проведем высоту AH к основанию BC. Найдем AH по теореме Пифагора из треугольника AHC:

$$AH = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48.$$



Площадь треугольника можно найти и по формуле Герона. Периметр треугольника равен $P = 10 + 10 + 16 = 36$, поэтому полупериметр равен 18.

$$S_{ABC} = \sqrt{18 \cdot (18 - 10) \cdot (18 - 10) \cdot (18 - 16)} =$$
$$= \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = 6 \cdot 8 = 48.$$

2) Радиус описанной окружности R найдем, используя формулу для площади треугольника $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$.

Получим: $R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \dfrac{10 \cdot 16 \cdot 10}{4 \cdot 48} = \dfrac{25}{3} = 8\dfrac{1}{3}$.

3) Радиус вписанной окружности r найдем, используя формулу для площади треугольника $S_{ABC} = p \cdot r$, где

$p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{10 + 16 + 10}{2} = 18$ и $S = 48$. Имеем:

$$r = \frac{48}{18} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

4) Найдем вид угла A. По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A,$$

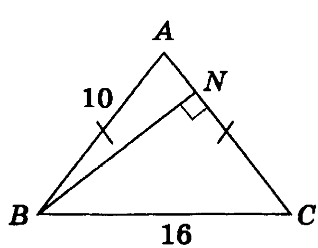
$$16^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\angle A,$$

$$\cos\angle A = \frac{200 - 256}{200} = -0,28.$$

Получили, что $\cos\angle A < 0$, значит, $\angle A$ — тупой.

5) Для нахождения высоты, проведенной к боковой стороне, воспользуемся следующей формулой для площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN. \; BN = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 48}{10} = 9,6.$$



6) Найдем длину медианы BM, проведенной к стороне AC. Найдем $\cos\angle ACB$ из треугольника ACH: $\cos\angle ACB = 0{,}8$.

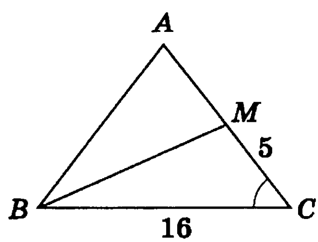
По теореме косинусов

$$BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2BC \cdot MC \cdot \cos\angle ACB,$$

$$BM^2 = 16^2 + 5^2 - 2 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 0{,}8,$$

$$BM^2 = 153,$$

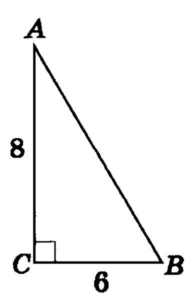
$$BM = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}.$$



Прямоугольный треугольник

Задание 3. Дан прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите:

1) периметр;
2) площадь;
3) радиус описанного круга;
4) радиус вписанной окружности;
5) тригонометрические функции меньшего угла;
6) высоту, проведенную к гипотенузе;
7) медиану, проведенную к гипотенузе;
8) биссектрису большего угла.



Решение.

1) Найдем третью сторону (гипотенузу). По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100.\ AD = 10.$$

Найдем периметр треугольника $P = 6 + 8 + 10 = 24.$

2) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, т.е.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24.$$

3) Центр описанной окружности около прямоугольного треугольника является серединой гипотенузы, поэтому радиус описанной окружности равен половине гипотенузы:

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

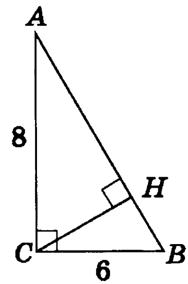
4) Радиус вписанной окружности r найдем, используя формулу для площади треугольника $S_{ABC} = p \cdot r$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$. Получим, $r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{24}{12} = 2.$

5) В исходном треугольнике меньшей стороной является катет BC, поэтому меньшим углом треугольника является угол A.

$$\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10},\ \sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10},$$

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},\ \operatorname{ctg}\angle A = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

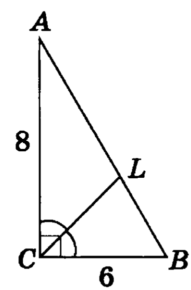
6) Для нахождения высоты, проведенной к гипотенузе, выразим площадь треугольника через гипотенузу и высоту CH: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CH$. Зная площадь, найдем CH:



$$CH = \frac{2S_{ABC}}{AB},\ CH = \frac{2 \cdot 24}{10} = 2{,}8.$$

7) Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, то $CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

8) Для нахождения длины биссектрисы CL прямого угла C используем свойство биссектрисы угла треугольника:



$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$3AL = 4LB.$$

С другой стороны, $AL + LB = 10$.

Решим систему

$$\begin{cases} 3AL = 4LB, \\ AL = 10 - LB; \end{cases} \quad \begin{cases} 3(10 - LB) = 4LB, \\ AL = 10 - LB; \end{cases} \quad \begin{cases} 7LB = 30, \\ AL = 10 - LB. \end{cases}$$

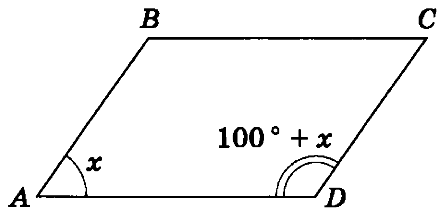
Получим $AL = \frac{40}{7}$, а $BL = \frac{30}{7}$.

По теореме синусов из треугольника CLB:

$$\frac{CL}{\sin\angle B} = \frac{LB}{\sin\angle LCB}, \quad CL = \frac{LB \cdot \sin\angle B}{\sin\angle LCB} = \frac{\frac{30}{7} \cdot 0{,}8}{\sin 45^\circ} = \frac{24\sqrt{2}}{7}.$$

Параллелограмм

Задание 4. Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 100°. Найдите углы параллелограмма.



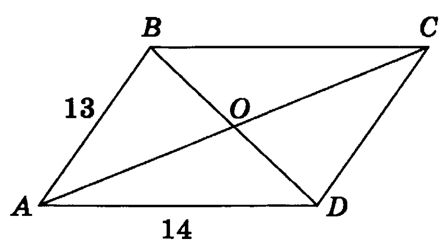
Решение.

1) Пусть меньший угол параллелограмма равен x, тогда больший угол равен $100° + x$. Так как сумма углов, прилежащих к одной стороне, в параллелограмме равна 180°, то $x + 100° + x = 180°$ и $x = 40°$.

2) Больший угол параллелограмма равен 140°.

Ответ: 40° и 140°.

Задание 5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и $AB = 13, AD = 14, BD = 15$.



Найдите:

1) площадь параллелограмма;

2) площадь треугольника ABO;

3) высоты параллелограмма.

Решение.

1) Параллелограмм разбивается диагональю BD на два треугольника, равных по площади. Площадь треугольни-

ка ABD можно найти по формуле Герона или следующим образом. Рассмотрим треугольник ABD. Опустим высоту к BT к стороне AD. Введем обозначения $AT = x$, $TD = 14 - x$. С помощью теоремы Пифагора выразим высоту BT из двух полученных прямоугольных треугольников:

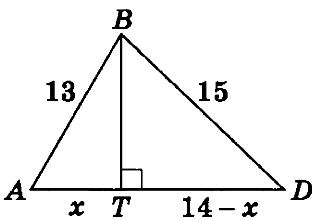
$$BT^2 = 169 - x^2 \text{ и } BT^2 = 225 - (14 - x)^2.$$

Составив равенство, найдем x, а затем и высоту BT.

$$169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2,$$

$$28x = 140,\ x = AT = 5.$$

Из треугольника ABT найдем BT: $BT^2 = 169 - 25$, $BT = 12$.



Найдем площадь треугольника ABD:

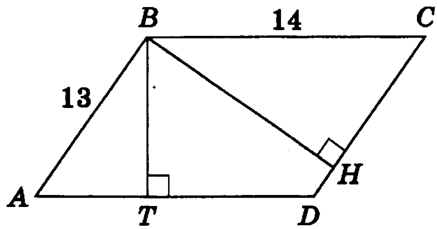
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 = 84.$$

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 168.

2) Диагонали параллелограмма $ABCD$ разбивают его на четыре равновеликих треугольника, поэтому площадь треугольника ABO в четыре раза меньше площади параллелограмма: $S_{ABO} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 42$.

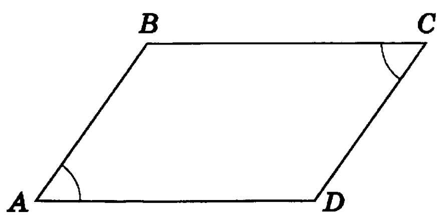
3) Одна высота параллелограмма уже найдена: $BT = 12$.

Для нахождения другой высоты параллелограмма BH, воспользуемся формулой площади параллелограмма, связанной с высотами.



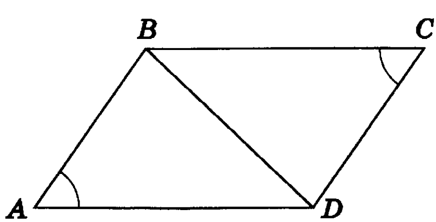
$$S_{ABCD} = BH \cdot DC, \quad 168 = BH \cdot 13, \quad BH = 12\frac{12}{13}.$$

Задание 6. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $\angle A = \angle C$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.



Доказательство

1) Докажем, что $BC \parallel AD$. Проведем диагональ BD и докажем равенство углов ADB и DBC.



2) Из треугольника ADB:

$$\angle ADB = 180° - \angle BAD - \angle ABD \qquad (1)$$

3) Из треугольника DBC:

$$\angle DBC = 180° - \angle BCD - \angle BDC \qquad (2)$$

4) $\angle BAD = \angle BCD$ по условию, а $\angle ABD = \angle BDC$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей BD.

5) Из (1) и (2) следует, что $\angle ADB = \angle DBC$, поэтому $BC \parallel AD$ (по признаку параллельности прямых).

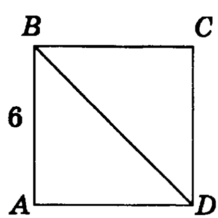
6) Имеем: $AB \parallel CD$ (по условию) и $BC \parallel AD$ (по доказанному), значит, $ABCD$ — параллелограмм по определению.

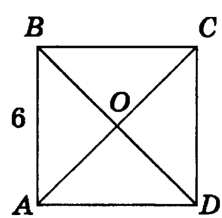
Квадрат

Задание 7. В квадрате со стороной 6 найдите: 1) диагональ; 2) радиус описанной окружности; 3) площадь описанного круга; 4) радиус вписанной окружности; 5) длину вписанной окружности.

Решение.

1) Диагональ квадрата найдем из треугольника ABD по теореме Пифагора: $BD^2 = AB^2 + AD^2$, $BD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.





2) В квадрате центры описанной и вписанной окружностей совпадают с точкой пересечения диагоналей. Радиус описанной окружности R равен половине диагонали:

$$R = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

3) Найдем площадь описанного круга:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\pi.$$

4) Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата:

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

5) Найдем длину вписанной окружности

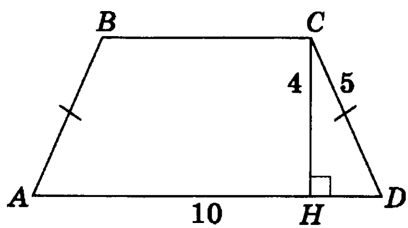
$$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi.$$

Трапеция

Задание 8. Боковые стороны равнобедренной трапеции равны 5. Высота трапеции равна 4, а большее основание равно 10. Найдите:

1) среднюю линию трапеции;

2) площадь трапеции.



Решение.

1) Средняя линия трапеции (L) равна полусумме оснований, значит, требуется найти меньшее основание BC. Для этого выполним дополнительное построение — опустим высоту трапеции из вершины B.

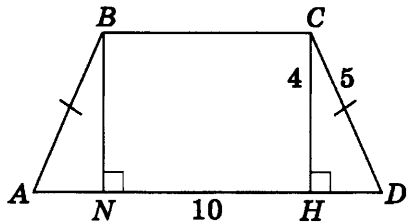
Две высоты равнобедренной трапеции разбивают трапецию на три фигуры: два равных прямоугольных треугольника и прямоугольник $BNHC$. Меньшее основание трапеции $BC = 10 - 2 \cdot HD$. Найдем HD по теореме Пифагора из треугольника CHD: $HD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Получим, что $BC = 10 - 2 \cdot 3 = 4$.

Найдем среднюю линию трапеции

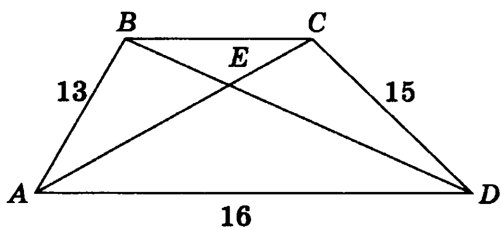
$$L = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4 + 10}{2} = 7.$$

2) Площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{4 + 10}{2} \cdot 4 = 28.$$



Задание 9. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 16$, $BC = 2$. Боковые стороны трапеции равны 13 и 15. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Найдите: 1) среднюю линию трапеции; 2) высоту; 3) площадь.



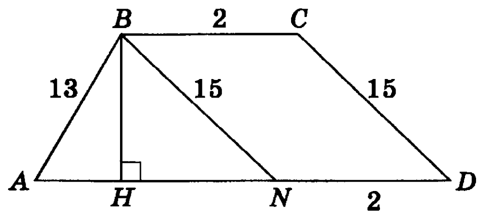
Решение.

1) Средняя линия трапеции (L) равна полусумме оснований трапеции:

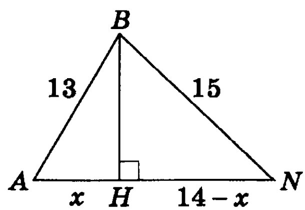
$$L = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2 + 16}{2} = 9.$$

2) Чтобы найти высоту исходной неравнобедренной трапеции, используем дополнительное построение: проведем отрезок BN, параллельный CD. Отрезок BN разбивает трапецию на две части: параллелограмм $BCDN$ и треугольник ABN.

Высота треугольника ABN, опущенная из вершины B, равна высоте исходной трапеции.



Найдем высоту треугольника ABN.



Из треугольника ABH по теореме Пифагора $BH^2 = 13^2 - x^2$.

Из треугольника BHN по теореме Пифагора $BH^2 = 15^2 - (14 - x)^2$.

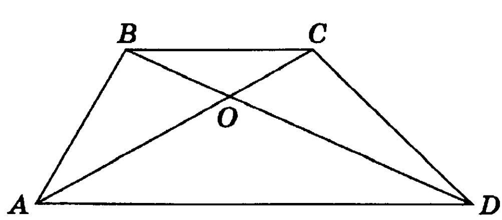
$15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$, $x = 5$ и $BH = 12$.

3) Найдем площадь трапеции:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = 9 \cdot 12 = 108.$$

Задание 10. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O.

Докажите: треугольники BOC и DOA подобны.



Доказательство:

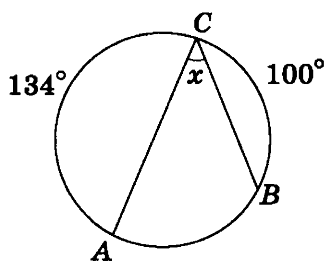
1) Для доказательства подобия треугольников найдем пары равных углов.

$\angle BOC = \angle AOB$ (как вертикальные),

$\angle CBO = \angle ADO$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD), поэтому треугольники BOC и DOA подобны по первому признаку подобия треугольников.

Центральные и вписанные углы

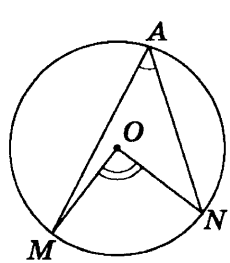
Задание 11. По данным рисунка найдите угол x.



Решение.

Угол ABC является вписанным, поэтому его градусная мера равна половине градусной меры дуги AB, на которую он опирается. Градусная мера дуги AB равна $360° - (134° + 100°) = 360° - 234° = 126°$, поэтому $x = 63°$.

Задание 12. Центральный угол MON на $50°$ больше вписанного угла, опирающегося на дугу MN. Найдите каждый из этих углов.



Р е ш е н и е.

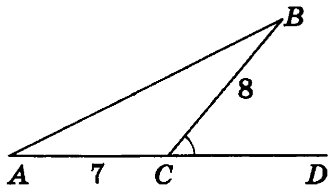
Вписанный угол $\angle MAN$ и центральный $\angle MON$ угол опираются на одну и ту же дугу MN, поэтому

$\angle MAN = \frac{1}{2}\angle MON$. По условию $\angle MON = \angle MAN + 50°$. Получим, что $\angle MON = \frac{1}{2}\angle MON + 50°$, значит, $\angle MON = 100°$ и $\angle MAN = 50°$.

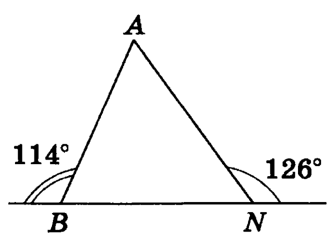
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Часть 1

1. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 7$, $BC = 8$, $\angle DCB = 30°$.



2. Найдите площадь треугольника ABN, если $AB = 7$, $AN = 8$.

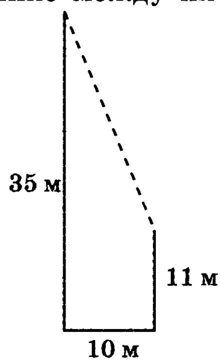


3. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 64°.

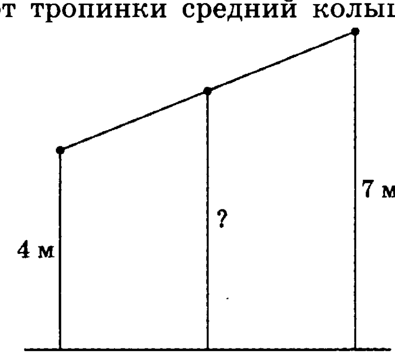
4. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 64°.

5. Две стороны треугольника равны 5 и 10. Высота, проведенная к большей из них, равна 4. Найдите площадь треугольника.

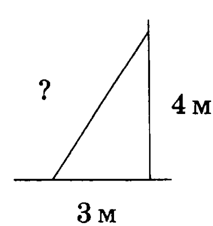
6. В 10 м друг от друга растут две березы. Измерили их высоту: у одной — 35 м, у другой — 11 метров. Найдите расстояние между их верхушками?



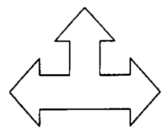
7. Для установки туристического оборудования на равном расстоянии друг от друга вбиты три колышка. Крайние находятся от прямой тропинки на расстоянии 4 м и 7 м. Найдите расстояние, на котором находится от тропинки средний колышек?



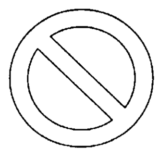
8. Какой минимальной длины должна быть лестница, чтобы она достала до окна дачного домика на высоте 4 метров, если ее нижний конец отстоит от дома на расстоянии 3 метров?



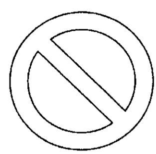
9. Сколько осей симметрии имеет фигура?



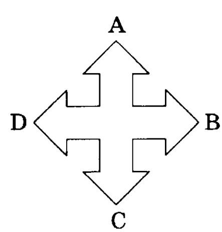
10. Сколько осей симметрии имеет фигура?



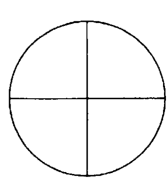
11. Сколько центров симметрии имеет фигура?



12. Сколько осей симметрии имеет фигура, если $ABCD$ — квадрат?



13. На рисунке изображена окружность с горизонтальным и вертикальным диаметрами. Сколько осей симметрии имеет эта фигура?



14. Найдите высоту правильного треугольника со стороной 12.

15. Найдите площадь правильного треугольника со стороной 12.

16. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 12.

17. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 12.

18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 12.

19. Найдите меньшую высоту равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 12.

20. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 12.

21. Найдите периметр прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16.

22. Дан прямоугольный треугольник с катетами 12 и 16. Найдите косинус меньшего угла треугольника.

23. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16.

24. В равнобедренном треугольнике с основанием 16 и боковой стороной 10 найдите высоту, проведенную к основанию.

25. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 16 и боковой стороной 10.

26. В равнобедренном треугольнике с основанием 16 и боковой стороной 10 найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

27. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 20, а косинус угла при основании треугольника равен 0,8. Найдите основание треугольника.

28. Середины сторон правильного треугольника последовательно соединены отрезками. Найдите сторону исходного треугольника, если сторона полученного треугольника равна 4.

29. Середины сторон правильного треугольника последовательно соединены отрезками. Найдите биссектрису исходного треугольника, если сторона полученного треугольника равна 3.

30. Середины сторон правильного четырехугольника последовательно соединены отрезками. Найдите сторону нового четырехугольника, если сторона данного четырехугольника равна $2\sqrt{2}$.

31. Середины сторон правильного четырехугольника последовательно соединены отрезками. Найдите площадь нового четырехугольника, если сторона данного четырехугольника равна 2.

32. Дан ромб с диагоналями 16 и 30. Найдите сторону ромба.

33. Дан ромб с диагоналями 16 и 30. Найдите площадь ромба.

34. Дан ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите высоту ромба.

35. Дан ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

36. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD. Найдите сторону AD параллелограмма, если $AB = 6\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30°$, $\angle BDC = 45°$.

37. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 10 и 14.

38. Большая высота параллелограмма равна 6. Найдите площадь параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 10 и 14.

39. Найдите длину меньшей диагонали параллелограмма со сторонами $3\sqrt{3}$ и 2 и углом 30°.

40. Найдите длину большей диагонали параллелограмма со сторонами $3\sqrt{3}$ и 2 и углом 30°.

41. Дана равнобедренная трапеция, боковые стороны которой равны 10. Высота трапеции равна 6, а большее основание равно 20. Найдите меньшее основание трапеции.

42. В равнобедренной трапеции, боковые стороны равны 10, высота трапеции равна 6, а большее основание равно 20. Найдите среднюю линию трапеции.

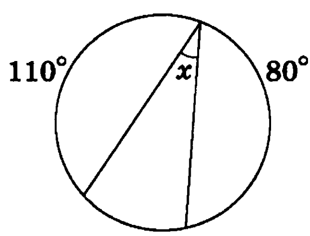
43. Найдите сумму всех внутренних углов правильного шестиугольника.

44. Найдите сумму всех внешних углов правильного шестиугольника.

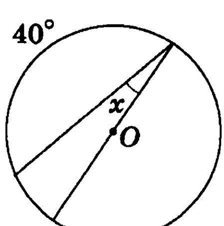
45. Найдите градусную меру внутреннего угла правильного шестиугольника.

46. Найдите градусную меру внешнего угла правильного шестиугольника.

47. По данным рисунка найдите угол x.



48. По данным рисунка найдите угол x (т. O — центр окружности).



49. Центральный угол KOC на $60°$ больше вписанного угла, опирающегося на дугу KC. Найдите угол KOC.

50. Центральный угол LON на $70°$ больше вписанного угла, опирающегося на дугу LN. Найдите этот вписанный угол.

51. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\cup MA = 12°$, $\cup NB = 40°$. Найдите $\cup AB$.

52. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\cup MA = 100°$, $\cup NB = 100°$. Найдите $\cup AB$.

53. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\cup MA = 72°$, $\cup NB = 40°$. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен 12.

54. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\cup MA = 42°$, $\cup NB = 18°$. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен 12.

55. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\cup MA = 72°$, $\cup NB = 18°$. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен 12.

56. Хорда NT стягивает дугу, равную $120°$, а хорда NA — дугу в $110°$. Найдите угол ANN.

57. Хорды MN и AB окружности пересекаются в точке C. Найдите угол BCN, если $\cup MA = 72°$, $\cup NB = 18°$.

58. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
2) Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
3) Если углы вертикальные, то они равны.
4) Если углы равны, то они являются вертикальными.

59. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему.
2) Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
3) Любой равнобедренный треугольник является равносторонним.
4) Любой равносторонний треугольник является равнобедренным.

60. Укажите номера **верных** утверждений.

1) Любой прямоугольник является квадратом.
2) Любой квадрат является прямоугольником.
3) Если треугольники имеют равные площади, то треугольники равны.
4) Если треугольники равны, то они имеют равные площади.

61. Укажите номера **неверных** утверждений.

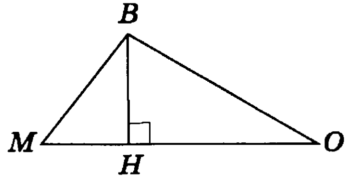
1) Любой параллелограмм является прямоугольником.
2) Любой прямоугольник является параллелограммом.
3) Если сумма двух углов равна 180°, то они являются смежными.
4) Если углы смежные, то их сумма равна 180°.

Часть 2

62. В треугольнике со сторонами 7, 9 и 14 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

63. Найдите длину окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

64. В треугольнике MBO $BO = 5$, $OH = 4$, радиус окружности, описанной около треугольника MBO равен 10. Найдите MB.



65. В треугольнике MNP сторона MN не длиннее 12, сторона NP не длиннее 5, а его площадь не меньше 30. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника MNP.

66. Сторона правильного шестиугольника равна 8. Найдите меньшую диагональ шестиугольника.

67. В трапецию $ABCD$ $(BC \| AD)$ вписана окружность. $BC = 12$, $AD = 16$. Найдите диаметр окружности, если $CD = 15$.

68. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 11$, $BC = 4$. Боковые стороны трапеции равны 20 и 15. Найдите площадь трапеции.

69. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 11$, $BC = 4$. Боковые стороны трапеции равны 20 и 15. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника BOC.

70. Даны координаты двух вершин треугольника MXN : $M(0;\ 4)$ и $N(4;\ 6)$. Найдите координаты третьей вершины X, если известно, что точка X лежит на прямой b, заданной уравнением $y = x$, и треугольник MXN имеет наименьший периметр.

71. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна $8\sqrt{2}$ и составляет с основанием угол $45°$.

72. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Найдите площадь этой трапеции, если меньшая боковая сторона трапеции равна 2.

73. Отрезки KE и OP пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\Delta KOE = \Delta EPK$.

74. Отрезки KE и OP пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $S_{KOE} = S_{PEO}$.

75. В четырехугольнике $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ и $\angle B = \angle D$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

76. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle ABC + \angle BCD = 180°$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

77. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник — равнобедренный.

78. Докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.

79. Хорды AB и CK — диаметры окружности. Докажите, что хорды AK и BC равны.

80. Хорды AB и CK — диаметры окружности. Докажите, что $\angle BAK = \angle BCK$.

81. Отрезки OB и CK пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые OC и BK параллельны.

82. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что биссектрисы соответственных углов параллельны.

83. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

84. В разностороннем треугольнике ABC (AC — большая сторона) проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой равен полуразности углов B и C.

85. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

УКАЗАНИЯ

Модуль «Алгебра»

Тема 1. Числа и выражения. Преобразование выражений

1.1. Делимость натуральных чисел

17. Представьте каждое слагаемое суммы в виде степени 2. Смотрите также решение типового задания № 3.

18. Преобразуйте выражение к виду $3^7 - 3^4 - 3^6$. Смотрите также решение типового задания № 3.

19. Произведение делится и на 2, и на 5. См. решение типового задания № 6.

20. См. решение типового задания № 11.

21. См. решение типового задания № 11.

22. Разложите числа 180 и 270 на простые множители. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. См. также решение типового задания № 13.

23. Разложите числа 180 и 270 на простые множители. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. См. также решение типового задания № 12.

24. Разложите числа 168 и 450 на простые множители. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. См. также решение типового задания № 13.

25. Разложите числа 168 и 450 на простые множители. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. См. также решение типового задания № 12.

26. Найдите наибольший общий делитель чисел 660 и 924, для этого разложите эти числа на простые множители. $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. См. также решение типового задания № 12.

27. Найдите наибольший общий делитель чисел 462 и 990, для этого разложите эти числа на простые множители. $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. См. также решение типового задания № 12.

28. **Простым числом** называется такое натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: 1 и само это число.

29. $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

30. Рассмотрите последовательные натуральные степени числа 3, попробуйте выяснить закономерность. См. также решение типового задания № 8.

31. Так как остаток от деления некоторого натурального числа x на 16 равен 9, то его можно записать в виде $x = 16n + 9$, где n — некоторое натуральное число. Далее число x можно представить следующим образом $x = 4(4n + 2) + 1$. См. также решение типового задания № 9.

32. Так как остаток от деления некоторого натурального числа x на 4 равен 1, то его можно записать в виде $x = 4n + 1$, где n — некоторое натуральное число. Далее число n можно представить в виде $4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$, где k — некоторое натуральное число. См. также решение типового задания № 10.

33. Так как остаток от деления некоторого натурального числа a на 12 равен 7, то его можно записать в виде $a = 12n + 7$, где n — некоторое натуральное число. Тогда

$$a^2 - 2a + 5 = (12n + 7)^2 - 2(12n + 7) + 5 =$$
$$= 144n^2 + 144n + 36 + 4.$$

34. Так как остаток от деления некоторого натурального числа a на 5 равен 2, а другого натурального числа — равен 4, то эти числа можно записать в виде $x = 5n + 2$, $y = 5m + 4$, где n и m — некоторые натуральные числа. Тогда $x + y = 5n + 5m + 5 + 1$.

35. Так как остаток от деления некоторого натурального числа a на 5 равен 2, а другого натурального числа — равен 4, то эти числа можно записать в виде $x = 5n + 2$, $y = 5m + 4$, где n и m — некоторые натуральные числа. Тогда

$$x \cdot y = (5n + 2) \cdot (5m + 4) = 25mn + 10m + 20n + 5 + 3.$$

36. Представьте выражение в виде $5^4 \cdot 29$.

37. Так как число делится на 2, то последняя цифра в записи этого числа равна 2. Теперь надо учесть признак делимости на 3.

38. Приписав справа и слева одинаковую цифру к числу 14, мы должны получить число, сумма цифр которого делится на 3.

39. Найдите наименьшее общее кратное чисел 48 и 60.

40. $220 = 19{,}5 \cdot 11 + 5{,}5$.

41. Найдите наибольший общий делитель чисел 120, 280, 320.

42. Пусть S — сумма всех баллов, а n — количество учеников, тогда $\frac{S}{n} = \frac{34}{7}$, получите, что n делится на 7, поэтому не превосходит 7. Можно придумать пример, чтобы сумма баллов семи учеников была равна 34.

43. Пусть S — сумма всех баллов, а n — количество учеников, тогда $\frac{S}{n} = \frac{17}{4}$, получите, что n делится на 4, поэтому не превосходит 4. Можно придумать пример, чтобы сумма баллов четырех учеников была равна 17.

44. а) Например, расположите числа по кругу последовательно. б) Количество пар равно 8 и наибольший общий делитель не превосходит 8, значит, делители должны быть следующими 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Но он не может быть равен 5, 6, 7, 8. в) Количество пар равно 8 и наибольший общий делитель не превосходит 8, значит, делители должны быть следующими 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Но он не может быть равен 5, 6, 7, 8, поэтому возможные делители 1, 2, 3, 4 — четыре попарно различных общих делителя.

45. а) Например, расположите числа по кругу последовательно. б) Количество пар равно 10 и наибольший общий делитель не превосходит 10, значит, делители должны быть следующими 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Но он не может быть равен 6, 7, 8, 9, 10. в) Количество пар равно 10 и наибольший общий делитель не превосходит 10, значит, делители должны быть следующими 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Но он не может быть равен 6, 7, 8, 9, 10, поэтому возможные делители 1, 2, 3, 4, 5 — пять попарно различных общих делителей.

46. а) Пусть в исходном двузначном числе x десятков и y единиц, тогда его можно записать в виде $10x + y$. Решите уравнение $10x + y = 10(x + y)$, где x и y — цифры. б) Пусть в исходном двузначном числе x десятков и y единиц, тогда его можно записать в виде $10x + y$. Решите уравнение $10x + y = 11(x + y)$, где x и y — цифры.

47. Если задумано два числа, то на доске будет три числа. Если задумано три числа, то на доске будет семь чисел.

48. Представьте 24 как сумму натуральных чисел и переберите все варианты.

49. Из произведения исключите числа 137 и 139 как простые числа и осуществите перебор по делителям чисел 136, 138, 140, 141, 142, 143, 144.

1.3. Степень с целым показателем

38. Подставьте значения x и a в выражение $\dfrac{x-a}{xa}$.

39. Подставьте значения x и y в выражение $\dfrac{5^4x^{12}}{5^4y^4}$.

40. Подставьте значения x и y в выражение $\dfrac{81y^4}{16x^2}$.

1.4. Квадратный корень. Корень третьей степени

33. Рассмотрите квадрат выражения $3-\sqrt{2}$.

34. Представьте выражение в виде $\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{3^9}\cdot\sqrt[3]{5^3}$.

35. Вынесите общий множитель $\sqrt{3}$.

36. См. решение типового задания № 3, № 4.

37. При вычислении значения выражения $\sqrt{62{,}5^2-58{,}5^2}$ примените формулу разности квадратов.

38. При вычислении значения выражения $\sqrt{484-2\cdot 22\cdot 13+169}$ примените формулу квадрата разности.

39. Представьте каждое число в виде арифметического квадратного корня, или числа ему противоположного. И сравните подкоренные выражения.

40. Представьте каждое число в виде корня третьей степени. И сравните подкоренные выражения.

1.5. Выражения и преобразования

33. Сгруппируйте слагаемые в выражении следующим образом $\left(x^3+y^3\right)-\left(xy^2+x^2y\right)$. В первых скобках примените формулу суммы кубов, во вторых — вынесите общий множитель xy.

34. Сгруппируйте слагаемые в выражении следующим образом: $\left(9x^2-12xy+4y^2\right)+(3x-2y)$. В первых скобках примените формулу квадрата суммы.

35. Сгруппируйте слагаемые в выражении следующим образом: $(2p+3m)+\left(4p^2-9m^2\right)$. Во вторых скобках примените формулу разности квадратов.

36. В числителе используйте формулу разложения на множители квадратного трехчлена (см. решение типового задания № 8). В знаменателе вынесите общий множитель.

37. В числителе используйте формулу квадрата суммы, а в знаменателе сгруппируйте слагаемые следующим образом: $(6ax + 2x) - (3a + 1)$ и вынесите за скобки общий множитель $(3a + 1)$.

38. В числителе используйте группировку и вынесите за скобки общий множитель $(y - 1)$. См. также решение типового задания № 5.

39. В числителе примените формулу разности кубов. В знаменателе — квадрата суммы.

40. Сначала разложите на множители числитель и знаменатель каждой дроби. В числителе первой дроби примените формулу квадрата суммы. В числителе второй дроби — разности квадратов.

41. Сначала разложите на множители числитель и знаменатель каждой дроби. В числителе первой дроби обратите внимание на число слагаемых. Это подскажет вам прием разложения на множители. В знаменателе второй дроби примените формулу разложения квадратного трехчлена на множители. В случае затруднения смотрите решение типового задания № 9.

42. Приведите дроби к общему знаменателю, учтите, что $(m - 1)^3 = -(1 - m)^3$.

43. Разложите на множители числитель дроби, применив формулу разности кубов, и сократите дробь на общий множитель $(4 + 2 \cdot 3^n + 9^n)$.

44. В числителе первой дроби используйте формулу разности квадратов, а в знаменателе второй дроби — суммы кубов.

45. В первых скобках приведите к общему знаменателю. Получите $\frac{9}{3 - \sqrt{x}}$. Во вторых скобках примените формулу квадрата разности.

46. *1-й способ.* Введите новую переменную $a = x^2$ и разложите квадратный трехчлен $a^2 + a - 2$ на множители. *2-й способ.* Представьте выражение в виде $x^4 + x^2 - 1 - 1$ и используйте группировку.

47. Выражение состоит из шести слагаемых. Сгруппируйте их по три и вынесите общий множитель (например, в первых скобках сгруппируйте все слагаемые, содержащие p^2).

48. Выражение состоит из шести слагаемых. Сгруппируйте их по три и вынесите общий множитель (например, в первых скобках сгруппируйте все слагаемые, содержащие m^2).

49. Выполняйте действия последовательно и аккуратно. В первых скобках сначала разложите на множители и числитель, и знаменатель первой дроби, а затем приведите дроби к общему знаменателю $x + 3$.

50. Сначала преобразуйте множитель $\frac{5}{1 + 4x^{-1}}$, заменив отрицательный показатель степени на положительный. Далее избавьтесь от двухэтажности в знаменателе. В случае затруднений смотрите решение типового задания № 10. В скобках, прежде чем приводить дроби к общему знаменателю, разложите на множители знаменатели каждой дроби.

51. В первой дроби и в числителе, и в знаменателе раскройте скобки и примените группировку. Во второй дроби примените формулу разности квадратов.

52. В числителе выделите степени чисел 5 и 3. Получите: $9 \cdot 75^n = 3^{n+2} \cdot 5^{2n}$.

53. В числителе вынесите общий множитель 2^{n-1}. Получите: $2^{n+2} - 2^{n-1} = 2^{n-1}(8 - 1)$.

54. Введите новую переменную $a = \sqrt{n}$ и сократите дробь $\frac{a^2 + a - 12}{3 - a}$.

55. Введите новую переменную $a = \sqrt{x}$. В числителе первой дроби используйте формулу разности квадратов, а в знаменателе второй дроби — разности кубов.

56. В первых скобках разложите на множители знаменатели каждой дроби, для этого вынесите множитель

$\sqrt{y}$. Выражение в скобках тождественно выражению $\frac{2\sqrt{7}}{y-7}$, $y > 0$. В выражении $\frac{49-14y+y^2}{2\sqrt{7}y}$ выделите в числителе квадрат разности.

57. Не торопитесь с решением. Внимательно посмотрите на выражение в скобках и сравните его с выражением $a^2 - 4a + 4$, которое представляет собой квадрат разности.

58. Используйте следующее свойство: для любого действительного числа x : $\sqrt{x^2} = |x|$.

59. Выполните следующую замену: $a = \sqrt{x-9}$. Выразите переменную x через переменную a и подставьте в исходное выражение.

Тема 3. Системы уравнений

14. Умножьте и первое, и второе уравнение на 12 и приведите подобные слагаемые.

15. *1-й способ.* Метод подстановки. Выразите из первого уравнения x или y и подставьте во втрое уравнение. *2-й способ.* Рассмотрите второе уравнение и попробуйте «увидеть» формулу квадрата суммы. Только не забудьте, что уравнение $a^2 = 25$ имеет два решения.

16. Преобразуйте второе уравнение системы. Перенесите все слагаемые в левую часть и примените формулу квадрата разности.

17. Удобнее решать систему методом сложения. Получаем, что $x^2 = 25$, $y^2 = 4$ и исходная система распадается на четыре системы.

18. При сложении уравнений получите, что $x^2 = 25$. Далее исходная система распадается на четыре системы.

19. Сложите уравнения и получите, что $x^2 = 25$. Система имеет четыре решения.

20. Решите систему методом сложения, при этом получите квадратное уравнение $x^2 + x - 6 = 0$.

21. См. решение типового задания № 5.

22. См. решение типового задания № 4.

23. Рассмотрите первое уравнение системы. Получите возможное решение системы $(5;\ -2)$. Проверьте, удовлетворяет ли эта пара чисел второму уравнению системы.

24. Во втором уравнении примените формулу разности квадратов и замените выражение $x^2 + y^2$ числом 13.

Тема 4. Неравенства

20. Раскройте скобки и получите неравенство $-0{,}5n > 5$.

21. Решите двойное неравенство $0 < 3 - 2t < 2$.

22. Из первого неравенства системы получите $x > -1{,}4$. Из второго неравенства: $x > 1$.

23. Решением первого неравенства является промежуток $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{3}\right)$. Решением второго неравенства — отрезок $[-3;\ 3]$.

24. Корни уравнения — (-1) и (-3). Решение неравенства — промежуток $(-\infty; -1)$. Произведите отбор корней, принадлежащих этому промежутку.

25. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые. Получите $2 \geq -2$.

26. См. решение типового задания № 7.

27. См. решение типового задания № 7.

28. Уравнение имеет корни 1 и 2. Решением неравенства является промежуток $(-\infty;\ 1{,}5)$.

29. Решением линейного неравенства при $a \neq 0$ является луч. А если $a = 0$?

30. Вынесите общий множитель. Исходное неравенство равносильно неравенству $(2x - 1)(2x - 4) < 0$, которое можно решить методом интервалов. См. решение типового задания № 8.

Тема 5. Прямоугольная система координат на плоскости

5.1. Уравнения прямой, параболы и гиперболы

18. Смотрите решение типового задания № 3.

19. Смотрите решение типового задания № 3.

20. Смотрите решение типового задания № 5.

21. Смотрите решение типового задания № 5.

22. Смотрите решение типового задания № 5.

23. Найдите ординаты точек пересечения графиков функций.

24. Запишите уравнение прямой, проходящей через две точки. Проверьте, принадлежит ли третья точка этой прямой.

5.2. Уравнение окружности

13. Преобразуйте уравнение к виду $x^2 + y^2 = 121$.

14. См. решение типового задания № 4. Уравнение окружности имеет вид $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$.

15. См. решение типового задания № 4. Уравнение окружности имеет вид $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 1$.

16. См. решение типового задания № 4.

Тема 6. Функции

8. Смотрите решение типового задания № 4.

9. Смотрите решение типового задания № 4.

10. Смотрите решение типового задания № 4.

11. Смотрите решение типового задания № 4.

12. Смотрите решение типового задания № 5.

13. После преобразования выражения $y = \frac{x^2+x}{x}$ получим $y = x + 1,\ x \neq 0$.

14. Смотрите решение типового задания № 5.

15. Смотрите решение типового задания № 5.

16. Смотрите решение типового задания № 5.

Тема 7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

15. Пусть $AB = a_1$, тогда $AC = a_1+d$ и $BC = a_1+2d$. Периметр треугольника ABC равен $AB + AC + BC = 3a_1+3d$ или 36, поэтому $a_1 + d = 12$.

16. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, найдите a_4, а затем по формуле n-ого члена и a_1, и d.

17. $b_3 = b_1q^2$, значит, $q^2 = 3$. Выразите b_5 через b_3.

18. Используйте характеристическое свойство арифметической прогрессии или см. решение типового задания № 9.

19. См. решение типового задания № 4. $a_{41} = 0$ не является отрицательным членом прогрессии.

20. Запишите формулу n-ого члена. Получите неравенство $a_n < 0$, $n < 41$.

21. Найдите a_4, используя характеристическое свойство арифметической прогрессии. Далее найдите разность прогрессии.

22. Имеем: $a_1 = 3$ и $a_5 = 48$. Используйте формулу n-ого члена.

23. См. решение типового задания № 10.

Тема 10. Элементы теории вероятностей

10.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. 1) Вынутый шар может быть или зеленым, или красным. Примените теорему сложения вероятностей несовместных событий.

2. 1) Примените теорему умножения вероятностей независимых событий.

3. 1) Примените теорему умножения вероятностей независимых событий. Обратите внимание, что шар возвращается в корзину, поэтому вероятность появления второго белого шара тоже равна 0,3.
4. См. решение типового задания. Определите события, благоприятные соответствующему событию, найдите вероятность каждого события и примените теоремы сложения или умножения.
5. См. решение типового задания. 1) Рассмотрите вероятность трех промахов.
6. См. решение типового задания. 1) Примените теорему умножения независимых событий.
7. Рассмотрите вероятность, когда все билеты будут проигрышными.

ОТВЕТЫ

Модуль «Алгебра»

Тема 1. Числа и выражения. Преобразование выражений

1.1. Делимость натуральных чисел

1	**2**	**3**	**4**
2	3	4	2
5	**6**	**7**	**8**
3	6	4	0, 2, 4, 6, 8
9	**10**	**11**	**12**
1, 4, 7	0,5	4	5
13	**14**	**15**	**16**
1	3	4	4
17	**18**	**19**	**20**
верно	верно	0	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
21	**22**	**23**	**24**
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$	540	90	12 600
25	**26**	**27**	**28**
6	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{15}$	19,23
29	**30**	**31**	**32**
3	1	1	1, 5, 9, 13
33	**34**	**35**	**36**
4	1	3	10

Окончание таблицы

37	38	39	40
1212, 1122, 2112	5,8	240	11
41	**42**	**43**	**44**
40	7	4	А) да Б) нет В) 4
45	**46**	**47**	**48**
А) да Б) нет В) 5	А) да Б) нет В) да Г) нет Д) 2 и 10	А) −3 и 4 Б) −2; 1; 3	14 и 10; 15 и 9
49			
11 и 13; 12 и 12; 14 и 10			

1.2. Приближенные значения

1	2	3
больше $4 \cdot 10^9$ кг	0,91 м	0,7 см
4	**5**	**6**
3,8	300 000	в 4,4 раза
7	**8**	**9**
1,41	4	3
10	**11**	**12**
183	0,62	0,143
13	**14**	**15**
0,71	0,27	384
16	**17**	**18**
2	4	3
19	**20**	**21**
2	3	4
22	**23**	**24**
1	3	1
25	**26**	**27**
2	1	2
28	**29**	**30**
2	1	3
31	**32**	**33**
3	3	4
34		
$970 \le p \le 1030$		

1.3. Степень с целым показателем

1	2	3
1	4	4
4	**5**	**6**
1	3	4
7	**8**	**9**
312	2	4
10	**11**	**12**
183	25	27
13	**14**	**15**
1	690	−60
16	**17**	**18**
30	81	5200
19	**20**	**21**
113	10 > 9	135 > 100
22	**23**	**24**
4	3	3
25	**26**	**27**
2	4	2
28	**29**	**30**
3	4	4
31	**32**	**33**
1	3	1
34	**35**	**36**
3	2	3
37	**38**	**39**
2	1	81
40		
4		

1.4. Квадратный корень. Корень третьей степени

1	**2**	**3**
7,3	-1	0,5
4	**5**	**6**
4,8	8	4
7	**8**	**9**
4	18	3
10	**11**	**12**
8	2	0,5
13	**14**	**15**
3	-16	2
16	**17**	**18**
3	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$a<b$
19	**20**	**21**
$a>b$	1	2
22	**23**	**24**
3	1	24
25	**26**	**27**
4	12	0,25
28	**29**	**30**
$\sqrt{159}<13$	4,8	1,5
31	**32**	**33**
6	1	верно
34	**35**	**36**
540	0	62
37	**38**	**39**
19	9,7	$-8;\ -3\sqrt{7};\ 2\sqrt{2};\ 3$
40		
$2;\ 2\sqrt[3]{2};\ -2;\ -2\sqrt[3]{3};\ -4$		

1.5. Выражения и преобразования

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
6	-7	3	1	x^5	x^{12}
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
4	2	3	$-3x^2+49$	3	3
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
4	$5p^2-36$	1	$\frac{4b}{b+3}$, $b \neq 3$	1	3
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
$\frac{3x-y}{x}, y \neq -3x;$ 0,01	$\frac{3x}{2x-1}$	2	4	$\frac{ab}{a-b}, a \neq -b$	$\frac{b^2}{a+b}, a \neq b$
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$\frac{x}{12}, x \neq 0$	2	$\frac{2y-x}{4xy}, x \neq -2y,$ $y \neq 0$	$\frac{4ab}{b^2-a^2}, a \neq \pm ab$	2	4
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
2	$-\sqrt{3a}$	$(x+y)(x-y)^2$	$(3x-2y)\times$ $\times(3x-2y+1)$	$(2p+3m)\times$ $\times(2p-3m+1)$	$0{,}5(x-1), x \neq -\frac{1}{3}$

Окончание таблицы

37	38	39	40	41	42
$\frac{3a+2}{2x-1}, a \neq -\frac{1}{3}$	$y-1, x \neq 1$,2009	$4x-3$	$\frac{x^2}{x-5}$, $x \neq 0, x \neq -5$	$x-1$, $x \neq -1, -2, -3$	$\frac{1}{1-m}$, 4
43	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
2009	12, $x \neq -2$	$9(3-\sqrt{x}), x \neq 9$, −90	$(x^2-1)(x^2+2)$	$(x+y-1)(p^2-n)$	$(m-1)(m+1)\times$ $\times(x+1)(x-4)$
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**
$x-3, x \neq \pm 3$	$\frac{5}{x-4}$ $x \neq 0, \pm 4$	$x-2b$	15	0,5	$-\sqrt{n}-4, n \neq 9$
55	**56**	**57**	**58**	**59**	
$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)$, $x \neq 1$; 0,21	$-\frac{7}{y}, y \neq 7$, −700	200	24	−13	

Тема 2. Уравнения

1	2	3
1,5	2	1
4	**5**	**6**
−30	−6; 5	3
7	**8**	**9**
4	± 4	0; 16
10	**11**	**12**
2	4	1
13	**14**	**15**
321	4	−6
16	**17**	**18**
−7	Решений нет	−9; 7
19	**20**	**21**
−9	−32	3,5
22	**23**	**24**
3,5	1	28

Тема 3. Системы уравнений

1	2	3
(1; 4)	(−3; 2), (4; −1,5)	(−1; 2)
4	**5**	**6**
(2; −3)	(1; −3)	1
7	**8**	**9**
3	2	2
10	**11**	**12**
1	1	4
13	**14**	**15**
(1; 0), (4; 3)	(1; 12)	(6; −1), (1; −6)
16	**17**	**18**
(1; 5), (5; 1)	4	(5; 6), (5; −6), (−5; 6), (−5; −6)
19	**20**	**21**
−7	4	(24; 12), (16; 4)
22	**23**	**24**
(2,5; −0,5)	(5; 2), (−5; −2), (1; −2)	4

Тема 4. Неравенства

1	2	3
1	2	$(-\infty;\ -4)$
4	**5**	**6**
$(-\infty;\ 1]$	4	3
7	**8**	**9**
1	2	4
10	**11**	**12**
3	2	4
13	**14**	**15**
$[-2;\ 8]$	$[-8;\ -1)$	$[-5;\ 0)$
16	**17**	**18**
$\left[-\frac{1}{3};\ 3\right]$	$(-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$	5
19	**20**	**21**
Решений нет	-11	$(0{,}5;\ 1{,}5)$
22	**23**	**24**
5	-1	-3
25	**26**	**27**
$(-\infty;\ +\infty)$	$[-1;\ 1]$	$(-\infty;\ -5) \cup (-5;\ 1)$
28	**29**	**30**
1	0	1

Тема 5. Прямоугольная система координат на плоскости

5.1. Уравнения прямой, параболы и гиперболы

1	2	3	4	5
23	4	3	3	2
6	**7**	**8**	**9**	**10**
3	3	1	3	2
11	**12**	**13**	**14**	**15**
1	2134	2	3	1
16	**17**	**18**	**19**	**20**
3	4	$y = 3x + 6$, да	$y = 0{,}25x - 1$, II четв.	$1\frac{1}{8}$
21	**22**	**23**	**24**	
2	−0,8; (0,4; 0)	B (1; −9)	да; (2; 4)	

5.2. Уравнение окружности

1. (0; 0)

2. 2

3. 3

4. 4

5. 1

6. 4

7. 3

8. 4

9. 3

10. 2

11. $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

12. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

13. Окружность с центром в начале координат (0; 0) и радиусом 11.

14. Окружность с центром в точке (1; 1) и радиусом 3.

15. Окружность с центром в точке (2; 4) и радиусом 1.

16. Окружность с центром в точке (0; 3) и радиусом 2.

Тема 6. Функции

1. а) 1; б) 3.

2. а) 3; б) 1.

3. 1)

4. 2)

5. 1) на высоте пятого этажа;
2) на пять этажей;
3) этажа в секунду или 1 м/с;
4) между пятым и шестым.

6. 1) 75 км/ч и 50 км/ч; 2) на 20 минут; 3) 50 км.

7. 1) 20 °С; 2) в 15 ч; 3) с 12 ч до 21 ч; 4) в 6 ч.

8. Если $0 \le x \le 6$, то $2 \le y \le 4$.

9. Если $2 \le x \le 5$, то $2 \le y \le 1{,}4$.

10. Если $2 \le x \le 1$, то $1 \le y \le 7$.

11. Если $1 \le x \le 4$, то $0{,}5 \le y \le 3$.

12. Область значений — промежуток $[2; +\infty)$.

13. Область значений — множество всех чисел, кроме 1.

14. Если $1 \le x \le 2$, то $7 \le y \le 15$.

15. Если $2 \le x \le 3$, то $29 \le y \le 14$.

16. Если $0 \le x \le 4$, то $1 \le y \le 8$.

Тема 7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1	2	3
3	1	−23
4	**5**	**6**
3	2	162
7	**8**	**9**
2	2	312
10	**11**	**12**
1,3	4800	2
13	**14**	**15**
4	4	12
16	**17**	**18**
24,5	72	10
19	**20**	**21**
40	9	12,7
22	**23**	
14,25; 25,5; 36,75	5^5	

Тема 8. Текстовые задачи части 1

1	2	3
1	2	2
4	**5**	**6**
3	4	56 м
7	**8**	**9**
64 м	1	300,04 руб.
10	**11**	**12**
10,25%	660 руб.	16%
13	**14**	**15**
32%	12 500 руб.	200 кг
16	**17**	**18**
уменьшилась на 2,5%	на 9,2%	12%
19	**20**	**21**
1,2,3	2,5	1,2,4

Задание 22

1	2	3	4	5	6	7	8
231	42	600	36	98	24	30	10
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
7	5	5	7	470	19600	1157625	7752

Тема 9. Текстовые задачи части 2

1	2	3	4	5
4,5; 40,7	4,7;20,9	80	500	4
6	**7**	**8**	**9**	**10**
40;60	20; 30	5; 6	14,4	3,75
11	**12**	**13**	**14**	**15**
12; 15	35; 40	130	550	140
16	**17**	**18**	**19**	**20**
100 г	2 л	20 г, 30 г	3:2	0,25 л

Тема 10. Элементы теории вероятностей

10.1. Классическое определение вероятности

1	2
0,5	$\frac{1}{6}$
3	**4**
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
5	**6**
$\frac{1}{24}$	0,3; 0,7
7	**8**
0,25; 0,75	0,4
9	**10**
$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$
11	**12**
0,2	$\frac{2}{9}$

10.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1	2	3	4	5	6	7
1) 0,8 2) 0,7 3) 0,5 4) 0,8 5) 0,5 6) 0,7	1) $\frac{1}{15}$ 2) $\frac{7}{15}$ 3) $\frac{7}{15}$	1) 0,09 2) 0,49 3) 0,42	1) 0,75 2) 0,25 3) 0,25 4) 0,75 5) 0,5 6) 1 7) 0,75 8) 0,5 9) 0,25 10) 0,75	1) 0,94 2) 0,38 3) 0,56 4) 0,44 5) 0,38	1) 0,006 2) 0,994 3) 0,092 4) 0,902 5) 0,398 6) 0,504 7) 0,098 8) 0,496	0,92

Тема 11. Элементы статистики

1. а) 4; б) 3,6; в) 4; г) 5

2. а) 7; б) 4,5; в) 4,5; г) 2

3. а) 500; б) 650 и 750; в) 17500; г) 2000

4. 3

5. 1,2

6. а) увеличится на 0,8; б) увеличится на 8

7. а) уменьшится на 0,5; б) уменьшится на 5

8. 3

9. 14 и 2

10. 17,5

Модуль «Геометрия»

Тема 12. Планиметрия

1	2	3	4
14	$14\sqrt{3}$	32; 148	58; 122
5	**6**	**7**	**8**
20	26	5,5	5
9	**10**	**11**	**12**
1	2	1	4
13	**14**	**15**	**16**
4	$6\sqrt{3}$	$36\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
17	**18**	**19**	**20**
$4\sqrt{3}$	72; 36	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
21	**22**	**23**	**24**
48	0,6	10	6
25	**26**	**27**	**28**
48	9,6	32	8
29	**30**	**31**	**32**
$3\sqrt{3}$	4	2	17
33	**34**	**35**	**36**
240	4,8	2,4	12
37	**38**	**39**	**40**
68; 76	60; 84	$\sqrt{13}$	7
41	**42**	**43**	**44**
4	12	720°	360°
45	**46**	**47**	**48**
120°	60°	85°	25°

Окончание таблицы

49	**50**	**51**	**52**
$120°$	$70°$	$128°$	$20°$
53	**54**	**55**	**56**
12	$12\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}$	$65°; 5°$
57	**58**	**59**	**60**
$45°$	1,4	2,3	2,4
61	**62**	**63**	**64**
1,3	4	12π	12
65	**66**	**67**	**68**
13	$8\sqrt{3}$	12	90
69	**70**	**71**	**72**
6,4	(4; 4)	64	6

Справочное издание
анықтамалық баспа

ОГЭ. СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Кочагин Вадим Витальевич
Кочагина Мария Николаевна

ОГЭ 2020

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий:
750 заданий с ответами
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*. Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *А. Кашлев*. Технический редактор *Л. Зотова*
Компьютерная верстка *А. Григорьев*. Корректор *Т. Кожевникова*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Россия, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Интернет-магазин : www.book24.ru

Интернет-магазин : www.book24.kz
Интернет-дүкен : www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды
қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»
www.eksmo.ru/certification
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 14.06.2019. Формат 60×90 $^1/_{16}$.
Гарнитура «SchoolBook». Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,0.
Тираж 18000 экз. Заказ № О-1574.

Отпечатано в типографии филиала
АО «ТАТМЕДИА» «ПИК «Идел-Пресс».
420066, Россия, г. Казань, ул. Декабристов, 2.
E-mail: idelpress@mail.ru

ISBN 978-5-04-104106-9

9 785041 041069 >

6+

Москва. ООО «Торговый Дом «Эксмо»
Адрес: 123308, г. Москва, ул. Зорге, д.1.
Телефон: +7 (495) 411-50-74. **E-mail:** reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми
покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»
E-mail: **international@eksmo-sale.ru**

International Sales: International wholesale customers should contact
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном
оформлении, обращаться по тел.: +7 (495) 411-68-59, доб. 2261.
E-mail: **ivanova.ey@eksmo.ru**

Оптовая торговля бумажно-беловыми
и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»:
Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2,
Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс: +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).
e-mail: **kanc@eksmo-sale.ru**, сайт: www.**kanc-eksmo.ru**

Филиал «Торгового Дома «Эксмо» в Нижнем Новгороде
Адрес: 603094, г. Нижний Новгород, улица Карпинского, д. 29, бизнес-парк «Грин Плаза»
Телефон: +7 (831) 216-15-91 (92, 93, 94). **E-mail**: reception@eksmonn.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Санкт-Петербурге
Адрес: 192029, г. Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, д. 84, лит. «Е»
Телефон: +7 (812) 365-46-03 / 04. **E-mail**: server@szko.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Екатеринбурге
Адрес: 620024, г. Екатеринбург, ул. Новинская, д. 2щ
Телефон: +7 (343) 272-72-01 (02/03/04/05/06/08)

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Самаре
Адрес: 443052, г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е»
Телефон: +7 (846) 207-55-50. **E-mail**: RDC-samara@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Ростове-на-Дону
Адрес: 344023, г. Ростов-на-Дону, ул. Страны Советов, 44А
Телефон: +7(863) 303-62-10. **E-mail**: info@rnd.eksmo.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Новосибирске
Адрес: 630015, г. Новосибирск, Комбинатский пер., д. 3
Телефон: +7(383) 289-91-42. E-mail: eksmo-nsk@yandex.ru

Обособленное подразделение в г. Хабаровске
Фактический адрес: 680000, г. Хабаровск, ул. Фрунзе, 22, оф. 703
Почтовый адрес: 680020, г. Хабаровск, А/Я 1006
Телефон: (4212) 910-120, 910-211. **E-mail**: eksmo-khv@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Тюмени
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Тюмени
Адрес: 625022, г. Тюмень, ул. Пермякова, 1а, 2 этаж. ТЦ «Перестрой-ка»
Ежедневно с 9.00 до 20.00. Телефон: 8 (3452) 21-53-96

Республика Беларусь: ООО «ЭКСМО АСТ Си энд Си»
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Минске
Адрес: 220014, Республика Беларусь, г. Минск, проспект Жукова, 44, пом. 1-17, ТЦ «Outleto»
Телефон: +375 17 251-40-23; +375 44 581-81-92
Режим работы: с 10.00 до 22.00. **E-mail:** exmoast@yandex.by

Казахстан: «РДЦ Алматы»
Адрес: 050039, г. Алматы, ул. Домбровского, 3А
Телефон: +7 (727) 251-58-12, 251-59-90 (91,92,99). E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Украина: ООО «Форс Украина»
Адрес: 04073, г. Киев, ул. Вербовая, 17а
Телефон: +38 (044) 290-99-44, (067) 536-33-22. **E-mail**: sales@forsukraine.com

Полный ассортимент продукции ООО «Издательство «Эксмо» можно приобрести в книжных магазинах «Читай-город» и заказать в интернет-магазине: www.chitai-gorod.ru.
Телефон единой справочной службы: 8 (800) 444-8-444. Звонок по России бесплатный.

Интернет-магазин ООО «Издательство «Эксмо»
www.book24.ru
Розничная продажа книг с доставкой по всему миру.
Тел.: +7 (495) 745-89-14. E-mail: **imarket@eksmo-sale.ru**

ДЛЯ ЗАМЕТОК